Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Acad. Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

ВЛАДЕТА ВУЧКОВИЋ

ЈЕДНО ПРОШИРЕЊЕ УСЛОВА КОНВЕРГЕНЦИЈЕ КОД СТАВОВА ТАУБЕРОВЕ ПРИРОДЕ

За примену ставова Тауберове природе потребно је имати што општији облик услова конвергенције, како би се став могао применити на што ширу класу функција. Осим тога, истраживања у овом правцу дају дубљи увид у структуру инверзних ставова, показујући границе за класу функција које дозвољавају инверзију.

Циљ овог рада је да у том смислу настави нека проучавања J. Карамате, и то нарочито она из расправа [**3**] и [**4**].

1. Најпознатији облик услова конвергенције за ставове Тауберове природе је Шмитов:

$$\text{(УК-1)} \qquad \liminf_{x=\infty} \ \operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon)} [f(x') - f(x)] \geqslant -\omega(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

При томе је $f(x)$ подинтегрална функција, а $X(x, \varepsilon)$ функција којом се одређује дужина размака конвергенције. Тако, на пример, за $(C\text{-}1)$- и A-збирљивост је $X(x, \varepsilon) = (1+\varepsilon)\,x$, за B-збирљивост $X(x,\varepsilon) = x + \varepsilon\sqrt{x}$ итд.

Карамата, који се у низу радова бавио проширавањем Шмитова услова, дао му је општи облик

$$\text{(УК-2)} \quad \liminf_{x=\infty} \ \operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon)} \frac{\rho(x') f(x') - \rho(x) f(x)}{\rho(x)} \geqslant -\omega(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

где је $\rho(x)$ функција која не опада и осим тога задовољава још низ накнадних услова (в. нпр. Карамата [**5**]). Авакумовић [**1**] је у случају A-збирљивости (па према томе и $(C\text{-}k)$-збирљивости) показао да су сви ти услови непотребни и да је довољно да $\rho(x)$ припада класи $R-O$, тј. да је $\rho(x)$ функција дефинисана за $x \geqslant 0$ и да и да задовољава услов*

$$\text{(1.1)} \qquad \rho(x') \asymp \rho(x) \quad \text{униформно за} \quad x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon).$$

* Знак $F(x) \asymp G(x)$ значи да постаје две константе $0 < \mu < M$ тако да је $\mu \leqslant \dfrac{F(x)}{G(x)} \leqslant M$ кад $x \to \infty$.

С друге стране, у тежњи да обухвати један услов конвергенције који је дао Боас [2], Карамата је у [4] проширио Шмитов услов код $(C\text{-}1)$ - збирљивости дајући му облик

$$(\text{УК-3})\qquad \liminf_{x=\infty}\ \operatorname*{Min}_{x\leqslant x'\leqslant X(x,\varepsilon)} \{\Phi[f(x')] - \Phi[f(x)]\} \geqslant -\omega(\varepsilon)\to 0,\quad \varepsilon\to 0,$$

где је функција $\Phi(x)$ непрекидна и стварно расте на целој реалној оси $(-\infty < x < \infty)$.

У овом раду ићи ћемо за тиме да Караматин услов конвергенције УК-3 проширимо на сличан начин као што услов УК-2 проширује услов УК-1, као и да том проширењу дамо неке специјалне облике.

2. У овој тачки увешћемо неке ознаке које ћемо стално задржати.

За функцију $\Phi(x)$ казаћемо да припада класи Φ ако је $\Phi(x)$ непрекидна и стално расте у целом размаку $-\infty < x < \infty$.

За функцију $\rho(x)$ рећи ћемо да припада класи $R-o$ ако она припада класи $R-O$ и ако уз то задовољава и услов

$$(2.1)\qquad \limsup_{x=\infty}\ \operatorname*{Max}_{x\leqslant x'\leqslant X(x,\varepsilon)} \left|\frac{\rho(x')-\rho(x)}{\rho(x)}\right| = o(1),\quad \varepsilon\to 0.$$

С обзиром на финитну форму збирљивости коју ћемо проучавати, имаћемо углавном да је $X(x,\varepsilon)=x+\varepsilon$.

Слично ћемо за низ U_n рећи да припада класи $R-O$ ако је задовољен услов

$$(2.2)\qquad U_{n'} \asymp U_n \ \text{униформно за}\ n\leqslant n'\leqslant N(n,\varepsilon),$$

а да припада класи $R-o$ ако је поред (2.2) задовољен и услов

$$(2.3)\qquad \limsup_{n=\infty}\ \operatorname*{Max}_{n\leqslant n'\leqslant N(n,\varepsilon)} \left|\frac{U_{n'}-U_n}{U_n}\right| = o(1),\quad \varepsilon\to 0.$$

3. Основни став овог рада је

Став I. *Нека је за* $x\geqslant 0$:

$\alpha(x)$ *функција која не опада, тежи бесконачности кад* $x\to\infty$ *и нека је*

$$(3.1)\qquad \alpha(x)=\alpha(x+0);$$

$\varphi(x)$ *нека је инверзна функција функције* $\alpha(x)$ *и нека је*

$$(3.2)\qquad \varphi(x)=\varphi(x-0);$$

$X=X(x,\varepsilon)$ *нека је најмањи број такав да буде*

$$(3.3)\qquad \alpha(X)\geqslant\alpha(x)+\varepsilon,\ \varepsilon>0,$$

тј.

$$(3.4)\qquad X(x,\varepsilon)=\varphi[\alpha(x)+\varepsilon];$$

нека функција $\Phi(x)$ *припада класи* Φ, *а функција* $\rho(x)$ *класи* $R-o$ *и нека је функција* $f(x)$ *интеграбилна у односу на функцију* $\alpha(x)$.

Тада из

(3.5) $$\int_0^x f(t)\,d\alpha(t)=o(1)\,,\quad x\to\infty.$$

следи

(3.6) $$f(x)=o(1)\,,\quad x\to\infty$$

кадгод је задовољен услов конвергенције

(УК-4) $$\liminf_{x=\infty}\ \operatorname*{Min}_{x\leqslant x'\leqslant X(x,\varepsilon)}\frac{\rho(x')\,\Phi[f(x')]-\rho(x)\,\Phi[f(x)]}{\rho(x)}>o(1),\ \varepsilon\to 0.$$

4. Да би доказали став I довољно је доказати само да је

(4.1) $$f(x)=O(1),\quad x\to\infty.$$

Наиме из (4.1) следи тада да услов УК-4 добива облик

(4.2) $$\liminf_{x=\infty}\ \operatorname*{Min}_{x\leqslant x'\leqslant X(x,\varepsilon)}\{\Phi[f(x')]-\Phi[f(x)]\}>o(1),\quad \varepsilon\to 0,$$

који је потребан за o-инверзију*. То се лако увиђа из неједначине

$$\Phi[f(x')]-\Phi[f(x)]-M\left|\frac{\rho(x')-\rho(x)}{\rho(x)}\right|\leqslant\frac{\rho(x')\,\Phi[f(x')]-\rho(x)\,\Phi[f(x)]}{\rho(x)}\leqslant$$

$$\leqslant\Phi[f(x')]-\Phi[f(x)]+M\left|\frac{\rho(x')-\rho(x)}{\rho(x)}\right|,$$

узевши у обзир да из $f(x)=O(1)$ следи и $\Phi[f(x)]=\Phi[O(1)]=O(1)$, $x\to\infty$.

Без ограничења општости, нека је $\Phi(t)>0$ (иначе посматраћемо функцију $\Phi(t)+K$). Из услова УК-4 следи да је за $x>x_0$

$$\Phi[f(t)]>\frac{\rho(x)}{\rho(t)}\{\Phi[f(x)]-\omega(\varepsilon)-\varepsilon'\},\quad x\leqslant t\leqslant X(x,\varepsilon),$$
$$\omega(\varepsilon)\to 0 \text{ кад } \varepsilon\to 0,\quad \varepsilon'\to 0 \text{ кад } x\to\infty,$$

па по услову (1.3)

$$\Phi[f(t)]>M(\varepsilon)\{\Phi[f(x)]-\omega(\varepsilon)-\varepsilon'\},$$

тј.

(4.3) $$f(t)>\psi\{M(\varepsilon)[\Phi[f(x)]-\omega(\varepsilon)-\varepsilon']\},\quad x\leqslant t\leqslant X(x,\varepsilon)$$

где је $\psi(t)$ инверзна функција функције $\Phi(t)$.

* o-инверзију нећемо доказивати, јер се она врши потпуно аналогно као код Карамате у [4].

По једначини (3.5) је за произвољно $\eta > 0$

$$\eta > \frac{1}{\alpha(X)-\alpha(x)} \int_{x}^{X(x,\varepsilon)} f(t)\, d\alpha(t) > -\eta, \tag{4.4}$$

па је, узевши у обзир (4.3) и леву страну неједначине (4.4),

$$\eta > \psi \{M(\varepsilon)\, [\Phi[f(x)] - \omega(\varepsilon) - \varepsilon']\},$$

тј.

$$\frac{\Phi(\eta)}{M(\varepsilon)} > \Phi[f(x)] - \omega(\varepsilon) - \varepsilon'. \tag{4.5}$$

Ако у (4.5) пустимо прво да $x \to \infty$, а онда $\varepsilon \to 0$, добивамо најзад

$$\limsup_{x=\infty} \Phi[f(x)] \leqslant \frac{\Phi(0)}{M(0)} = C, \tag{4.6}$$

при чему је по (1.3) $M(0) \neq 0$.

Слично, из услова

$$\liminf_{x=\infty} \mathop{\mathrm{Min}}_{x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon)} \frac{\rho(X)\,\Phi[f(X)] - \rho(x')\,\Phi[f(x')]}{\rho(X)} > o(1), \quad \varepsilon \to 0 \tag{4.7}$$

који је еквивалентан са условом УК-4, и из десне стране неједначине (4.4) добићемо

$$\liminf_{x=\infty} \Phi[f(x)] \geqslant C_1. \tag{4.8}$$

Из (4.6), (4.8) и из непрекидности функције $\Phi(t)$ закључујемо да је

$$f(x) = O(1), \quad x \to \infty. \tag{4.9}$$

Тиме је завршена O-инверзија.

Према примедби на почетку ове тачке, сада је лако извршити o-инверзију и добити да је

$$f(x) = o(1), \quad x \to \infty. \tag{4.10}$$

чиме је завршен доказ става I.

5. Став I садржи уопштења већине ставова за интеграле и функције из Караматине расправе [3]. Ми их овде нећемо наводити сем једног, који нам се чини нарочито погодним да осветли природу уопштења које се постигло условом УК-4.

Уопштавајући више ставова Ландауа и Харди-Литлвуда, Карамата је у наведеној расправи доказао и следећи став:

Ако фунција $F(x)$ има своја прва два извода, тада из

$$F(x) \to A, \quad x \to \infty \tag{5.1}$$

а услова

$$c F'(x) + F''(x) > O(1), \quad x \to \infty, \tag{5.2}$$

где је c произвољна константа, следи

$$F'(x) \to 0, \quad x \to \infty. \tag{5.3}$$

(в. Карамата [**3**], став 2.)

Извешћемо сада једно даље уопштење овог става. То је

Став 5.1. *Из* (5.1) *следи* (5.3) *кадгод је задовољен услов*

$$c\,\Phi[F'(x)] + \Phi'[F'(x)] \cdot F''(x) > O(1), \quad x \to \infty, \tag{5.4}$$

где је c произвољна константа, а $\Phi(x)$ припада класи Φ и има у свакој тачки први извод.

Јасно је да се за $\Phi(x) = x$ услов (5.4) своди на услов (5.2).

Став 5.1 специјалан је случај става I, и то ако се узме да је

$$\mathrm{X}(x, \varepsilon) = x + \varepsilon, \quad \rho(x) = \exp(cx), \quad \alpha(x) = x \quad \text{и} \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + A.$$

Да бисмо показали да је услов УК-4 заиста задовољен ако је задовољен услов (5.4), помножимо (5.4) са e^{cx} и скупимо чланове са леве стране. Тад услов (5.4) постаје

$$\{e^{cx}\,\Phi[F'(x)]\}' > -Me^{cx}. \tag{5.5}$$

Интеграцијом неједначине (5.5) од x до $x' = x + \varepsilon$ и деобом са e^{cx} добивамо, стављајући $F'(x) = f(x)$,

$$\frac{e^{cx'}\,\Phi[f(x')] - e^{cx}\,\Phi[f(x)]}{e^{cx}} > -M\,\frac{e^{cx'} - cx}{e^{cx}}.$$

Како је, за $x' \leqslant x + \varepsilon$,

$$\frac{e^{cx'} - e^{cx}}{e^{cx}} \leqslant e^{\varepsilon} - 1 \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

следи да је услов УК-4 заиста задовољен за $\rho(x) = e^{cx}$. Остале замене су очевидне, те их не морамо детаљно изводити.

6. Да би у ставу I од функција прешли на низове, ставићемо

$$\alpha(x) = Q_n = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \quad \text{за} \quad n \leqslant x < n+1, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\rho(x) = \rho_n \quad \text{за} \quad n-\theta \leqslant x < n+1-\theta, \quad 0 < \theta < 1$$

$$f(x) = a_n \quad \text{за} \quad n-\theta \leqslant x < n+1-\theta.$$

Тако ћемо добити

Став I'. *Нека је за* $n = 1, 2, 3, \ldots$ a_n *дати низ произвољних реалних бројева;* $Q_n = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu$ *низ бројева који не опадају и теже бесконачности са* n, *тј.*

$$q_n \geqslant 0\,; \quad Q_n \to \infty, \quad n \to \infty\,; \tag{6.1}$$

број $N = N(n, \varepsilon)$ *дефинисан као најмањи цео број који задовољава неједначину*

$$Q_N \geqslant Q_n + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0; \tag{6.2}$$

ρ_n *низ који припада класи* $R-o$ *и* $\Phi(t)$ *функција која припада класи* Φ.

Тада из

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu q_\nu = o(1), \quad n \to \infty \tag{6.3}$$

следи

$$a_n = o(1), \quad n \to \infty \tag{6.4}$$

кадгод је задовољен услов конвергенције

$$\liminf_{n=\infty} \; \min_{n \leqslant n' \leqslant N(n,\varepsilon)} \frac{\rho_{n'}\,\Phi[a_{n'}] - \rho_n\,\Phi[a_n]}{\rho_n} > o(1), \quad \varepsilon \to 0. \tag{УК-4'}$$

И овај став садржи проширења већине ставова за низове из Караматине расправе [**3**], од којих ћемо навести само једно.

7. Приметимо пре свега да је услов УК-4′ увек задовољен ако је $0 < q_n \to 0,\ n \to \infty,\ \log(\rho_{n-1}/\rho_n) = O(q_n),\ n \to \infty$ и

(7.1) $$\rho_{n+1}\,\Phi(a_{n+1}) - \rho_n\,\Phi(a_n) < O(\rho_n\,q_n)\,,\quad n \to \infty\,,$$

(в. Карамата [3] стр. 220).

Ставимо ли $q_n = 1/D_n$, $a_n = D_n\,U_n$ и претпоставимо ли да је

$$D_n - D_{n-1} = O(1)\,,\quad n \to \infty\,.$$

тада ставу I' можемо дати следећи облик:

Став 7.1. *Под претпоставком да за $n = 1, 2, 3, \ldots$ низови D_n и ρ_n задовољавају следеће услове:*

$$0 < D_n \to \infty,\quad D_n - D_{n-1} = O(1)\,,\quad n \to \infty,$$

$$0 < \rho_n\,,\quad \rho_n - \rho_{n-1} = O(\rho_n/D_n)\,,\quad n \to \infty$$

и да функција $\Phi(t)$ *припада класи* Φ, *из*

$$\sum_{\nu=1}^{n} U_\nu = o(1)\,,\quad n \to \infty$$

следи

$$D_n\,U_n \to 0\,,\quad n \to \infty$$

кадгод је задовољен услов

(7.1) $$\rho_{n+1}\,\Phi(D_{n+1}\,U_{n+1}) - \rho_n\,\Phi(D_n\,U_n) < O\left(\frac{\rho_n}{D_n}\right),\ n \to \infty.$$

Ставимо ли у овом ставу $\rho_n = n^{-\mu}$, $D_n = n$, $n = 1, 2 \ldots$ и $\Phi(t)) = t^{1/(2k+1)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ он прелази у

Став 7.2. *Из конвергенције реда* $\sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$ *са произвољним реалним члановима* U_ν *следи да*

$$n\,U_n \to 0 \quad \textit{са} \quad 1/n$$

кадгод је задовољен услов

$$U_{n+1}^{\frac{1}{2k+1}} - U_n^{\frac{1}{2k+1}} < \mu \frac{U_n^{\frac{1}{2k+1}}}{n} + \frac{M}{n^{1+\frac{1}{2k+1}}} \tag{7.2}$$

где су μ *и* M *произвољне константе.*

Напоменимо да услов (7.1) не добива одмах облик

$$U_{n+1}^{\frac{1}{2k+1}} - U_n^{\frac{1}{2k+1}} < \mu \frac{U_n}{n} + \frac{M}{n^{1+\frac{1}{2k+1}}},$$

већ постаје

$$\frac{U_{n+1}^{\frac{1}{2k+1}}}{(n+1)^{\mu-\frac{1}{2k+1}}} - \frac{U_n^{\frac{1}{2k+1}}}{n^{\mu-\frac{1}{2k+1}}} < \frac{M}{n^{1+\mu}}.$$

Помножимо ли ову неједначину са $(n+1)^{\mu-\frac{1}{2k+1}}$ и одузмемо ли лево и десно $U_n^{\frac{1}{2k+1}}$, она постаје

$$U_{n+1}^{\frac{1}{2k+1}} - U_n^{\frac{1}{2k+1}} < \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu-\frac{1}{2k+1}} - 1\right] U_n^{\frac{1}{2k+1}} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu} \frac{M}{n^{1+\frac{1}{2k+1}}}.$$

Сменивши $\mu - \dfrac{1}{2k+1}$ са μ (због произвољности броја μ) одавде се лако добива облик (7.2).

У случају да желимо општи закључак, наиме да

$$n^{\alpha} U_n \to 0, \quad \alpha > 0, \quad n \to \infty,$$

у услову (7.2) мења се само други члан са десне стране, који у овом случају добива облик

$$\frac{M}{n^{\frac{2(k+\alpha)}{2k+1}}}.$$

Став 7.2 је уопштење става Ж' из наведене Караматине расправе. Караматин услов

$$U_{n+1} - U_n < \mu \frac{U_n}{n} + \frac{M}{n^2}$$

добива се из услова (7.2) за $k=0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Avakumović V. — Sur une extension de la condition de convergence des théorèmes inverses de sommabilité. *C. R.* **200** (1935), p. 1515—1517.

[2] Boas R. P. — A Tauberian theorem connected with the problem of three bodies *Am. J. of Math.* **61** (1938) str. 151—164.

[3] Карамата J. — Неколико ставова Тауберове природе у односу на асимптотско понашање интеграла и редова. *Глас С. К. А.* CLXV, **81** (1935), први разред, стр. 173—229.

[4] ——— Ein Tauberscher Satz im Dreikörperproblem. *Am. J. of Math.* **61** (1939), str. 769—770.

[5] ——— Einige weitere Konvergenzbedingungen der Inversionssätze der Limitierungsverfahren. *Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade* **2** (1933), str. 1—16

UNE EXTENSION DE LA CONDITION DE CONVERGENCE DANS LES THÉORÈMES DE NATURE TAUBERIENNE

par

Vladeta Vučković

Par un procédé analogue à celui de Karamata dans [**4**] on montre que la condition de convergence pour la sommabilitée d'un type „finite"

$$\liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon)} \{\Phi[f(x')] - \Phi[f(x)\} > o(1), \quad \varepsilon \to 0$$

peut être géneralisée sous la forme

$$\liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X(x,\varepsilon)} \frac{\rho(x')\,\Phi[f(x')] - \rho(x)\,\Phi[f(x)]}{\rho(x)} > o(1), \quad \varepsilon \to 0,$$

où $\rho(x)$ est une fonction à croissance régulière c'est-à-dire une fonction satisfaisant les conditions (1.1) et (2.1). Du théorème géneral I avec cette condition de convergence, sont tirés, comme simples corrolaires, les théorèmes suivants:

Théorème 5.1. *Soit $F(x)$ une fonction qui admet ses deux dérivées prémières, de $F(x) \to A, x \to \infty$ il s'ensuit que $F'(x) \to 0$, $x \to \infty$ s'il existe une fonction $\Phi(t)$, avec $\Phi'(t) > 0$ dans tout intervalle $(-\infty, \infty)$ telle que la condition de convergence*

$$c\,\Phi[F'(x)] + \Phi'[F'(x)]\,F''(x) > O(1), \quad x \to \infty$$

soit remplie, avec c quelconque.

Théorème 7.2. De la convergence de la série $\Sigma\, U_\nu$ *et de la condition de convergence*

$$U_{n+1}^{\frac{1}{2k+1}} - U_n^{\frac{1}{2k+1}} < \mu \frac{U_n^{\frac{1}{2k+1}}}{n} + \frac{M}{n^{1+\frac{1}{2k+1}}},$$

avec μ *et* M *quelconques, il s'ensuit que*

$$n\, U_n \to o \quad avec \quad 1/n.$$