Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

МАХМУД БАЈРАКТАРЕВИЋ

О НИЗОВИМА ДЕФИНИСАНИМ ЈЕДНАЧИНОМ $x_\nu = \varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\ldots(\varepsilon_\nu f(0))\ldots))$

Предмет овог рада је испитивање особина низова дефинисаних једначином (2). Специјалан случај низа ове врсте, гдје је $f(x)=\sqrt{2+x}$, испитиван је и у страној [1] и у домаћој литератури [2] и [3]. У отсјеку I овог рада дате су неке опште особине низова (2), а у отсјеку II наведен је извјестан број критерија за конвергенцију ових низова. За илустрацију резултата добивених у I и II наведена су у отсјеку III два примјера, од којих први претставља генерализацију малочас наведеног специјалног низа.

I

Функција $f(x)$ нека буде у затвореном размаку $[-a,+a]$ $(a>0)$ непрекидна и нека у том размаку монотоно расте у ужем смислу. Нека је осим тога, $f(-a)=b\geqslant 0$, $f(x)>x$ $(|x|<a)$, $f(a)=a$.

Сваки број z затвореног размака $I=[0,2]$ претставићемо у облику

$$z=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{d_\nu}{2^\nu}, \quad (0\leqslant z\leqslant 2), \tag{1}$$

гдје бројеви d_ν $(\nu=0,1,2,\ldots)$ за свако z имају одређену вриједност 0 или 1.

Сваком броју z из I одговара једнозначно један низ бројева облика

$$x_\nu=\varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\ldots(\varepsilon_\nu f(0))\ldots)) \quad (\nu=0,1,2,\ldots), \tag{2}$$

гдје бројеви ε_ν $(\nu=0,1,2,\ldots)$, дати једначинама

$$\varepsilon_0=1-2d_0, \quad \varepsilon_\nu=\frac{1-2d_\nu}{1-2d_{\nu-1}} \quad (\nu=1,2,\ldots) \tag{3}$$

за свако z из I, имају одређену вриједност $+1$ или -1. При томе пар низова (2), односно пар низова (3), који одговарају коначном диадном разломку $z=p/2^q$ $(0<p<2^{q+1},\ q\geqslant 0)$ сматрамо само једним чланом скупа низова (2), односно скупа низова (3).

Под овим условима вриједи:

A. — *Сваки низ* (2) *има највише двије тачке нагомилавања:* $\xi_1 = \underline{\lim}_{\nu\to\infty} x_\nu$, $\xi_2 = \overline{\lim}_{\nu\to\infty} x_\nu$ $(\xi_1 \leqslant \xi_2)$. *Према томе,* ξ_1 *и* ξ_2 *су овим једначинама дефинисане као функције од* z *у размаку* I: $\xi_1 = \xi_1(z)$, $\xi_2 = \xi_2(z)$.

B. — *Функције* $\xi_1(z)$ *и* $\xi_2(z)$ *монотоно опадају у ужем смислу од* a *до* $-a$, *и то тако да је*

$$a \geqslant \xi_2(z) \geqslant \xi_1(z) > \xi_2(z_1) \geqslant \xi_1(z_1) \geqslant -a \quad (0 \leqslant z < z_1 \leqslant 2).$$

C. — *Функције* $\xi_1(z)$, $\xi_2(z)$ *имају особину*

$$\xi_1(2-z) + \xi_2(z) = 0 \quad (0 \leqslant z \leqslant 2),$$

тј. ове функције су међусобно симетричне у односу на тачку (1,0) *као центар симетрије.*

D. — *У свакој тачки размака* $(0 \leqslant z < 2)$, $\xi_1(z)$ *је непрекидна функција са десне стране. У свакој тачки размака* $0 < z \leqslant 2$, $\xi_2(z)$ *је непрекидна са лијеве стране. — Посљедица: Ако је* $\xi_1(z) = \xi_2(z)$ *за свако* z *размака* I, *тада је ова функција непрекидна у том размаку. У овом случају је* $f(-a) = b = 0$.

E. — *Ако постоји макар једна тачка* z *размака* I *за коју је* $\xi_2(z) > \xi_1(z)$, *онда су свуда у том размаку тачке дисконтинуитета функција* $\xi_1(z)$ *и* $\xi_2(z)$ *густо распоређене а има их пребројиво много.*

Докази.

A. — Навешћемо претходно неке чињенице које се могу лако доказати:

1. — Сваком коначном низу бројева $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ у којем сваки члан има или вриједност $+1$ или вриједност -1, одговара одређена функција $x_\nu(t)$ дефинисана у затвореном размаку $[-a, +a]$ једначином

$$x_\nu(t) = \varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\ldots(\varepsilon_\nu f(t))\ldots)) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Функција $x_\nu(t)$ је непрекидна функција, и у наведеном размаку монотоно расте или монотоно опада у ужем смислу, према томе да ли је

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu = 1 \quad \text{или} \quad -1.$$

2. — Ако ставимо да је $x_\nu = x_\nu(0)$, тада је:

$$\text{за } \varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu = +1 \quad \begin{cases} x_\nu < x_{\nu+1} & \text{за} \quad \varepsilon_{\nu+1} = +1, \\ x_\nu > x_{\nu+1} & \text{за} \quad \varepsilon_{\nu+1} = -1; \end{cases}$$

$$\text{за } \varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu = -1 \quad \begin{cases} x_\nu > x_{\nu+1} & \text{за} \quad \varepsilon_{\nu+1} = +1, \\ x_\nu < x_{\nu+1} & \text{за} \quad \varepsilon_{\nu+1} = -1. \end{cases}$$

Из ових чињеница и из претпоставки учињених о функцији $f(x)$ слиједи да се за свако $z \neq p/2^q$ $(0 < p < 2^{q+1};\ q \geqslant 0)$ одговарајући низ (2) састоји од два дијела: једног који монотоно расте у ужем смислу и другог који монотоно опада у ужем смислу, при чему је сваки члан првог дијела мањи од сваког члана другог дијела. Чланови низа (2) могу се груписати у групе облика

$$x_{\lambda_k - 1},\ x_{\lambda_k},\ x_{\lambda_k+1},\ldots,\ x_{\lambda_{k+1}-2}\quad (k=0,1,2,\ldots),$$

гдје смо претпоставили да за низ бројева $\varepsilon_i\ (i=0,1,2,\ldots)$, који одговара броју z, вриједи

$$\varepsilon_0,\ \begin{array}{l}\varepsilon_i=-1 \ \text{ за } \ i=\lambda_k\\ \varepsilon_i=+1 \ \text{ за } \ i\neq\lambda_k\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\end{array}}\right\}\ \begin{array}{l} i>0;\ k=0,1,2,\ldots;\\ \lambda_k<\lambda_{k+1},\ \lambda_0\geqslant 1,\end{array} \tag{4}$$

тако да свака група за непарно k (парно k) припада првом дијелу низа (2), а свака група за парно (непарно) k другом дијелу тог низа ако је уз то $\varepsilon_0=+1$ $(\varepsilon_0=-1)$. Јасно је да су оба дијела конвергентна, јер су оба монотона и ограничена. У случају кад је $\lambda_0>1$, наведеним групама треба додати и групу чланова чији су индекси мањи од λ_0-1. Изузетак чине случајеви $z=0$ и $z=2$, када је $\varepsilon_i=1\ (i=1,2,\ldots)$, а одговарајући низ (2) монотоно расте према граничној вриједности a, односно монотоно опада према граничној вриједности $-a$.

За $z=p/2^q$ из (3) добивају се два низа бројева ε_ν облика

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ldots,\ \varepsilon_{q-1},\ \begin{cases}\varepsilon_q=+1,\\ \varepsilon_q=-1,\end{cases}\ \varepsilon_{q+1}=-1,\ \varepsilon_{q+i}=1\ (i=2,3,\ldots;\ q\geqslant 0) \tag{5}$$

који се разликују само по члану ε_q, а сваком од њих одговара по један конвергентан низ (2), јер

$$f(\varepsilon_{q+2} f(\varepsilon_{q+3} f(\ldots(\varepsilon_{q+i} f(0))\ldots)))\to a$$

кад $i\to\infty$ $(q\geqslant 0)$. Први од ових низова монотоно опада (расте) у ужем смислу, а други монотоно расте (опада) у ужем смислу, апстрахујући чланове $x_i\ (i<q)$, кад је

$$\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_q=1,\quad \varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\bar{\varepsilon}_q=-1\quad (\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_q=-1,\ \varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\bar{\varepsilon}_q=1).$$

Граничне вриједности ових низова су

$$\xi'=\varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\ldots(\varepsilon_{q-1} f(b))\ldots)) \quad \text{и} \quad \xi''=\varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\ldots(\varepsilon_{q-1} f(-b))\ldots)).$$

Ако ова два низа сматрамо дијеловима само једног низа, онда су ξ' и ξ'' његова горња и доња тачка нагомилавања ξ_2 и ξ_1, за које вриједи

$$\xi'=\xi_1\leqslant x_{q-1}\leqslant\xi_2=\xi'' \quad \text{за} \quad \varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_q=-1,\ \ \varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\bar{\varepsilon}_q=+1,$$

$$\xi''=\xi_1\leqslant x_{q-1}\leqslant\xi_2=\xi' \quad \text{за} \quad \varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_q=+1,\ \ \varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\bar{\varepsilon}_q=-1.$$

Знак једнакости важи за $b=f(-a)=0$. – Овим је доказана тврдња А.

B. — За доказивање тачности тврдње B поступићемо овако. Нека су дата два броја из I:

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu} < z_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\overline{d}_\nu}{2^\nu}.$$

Тада је увијек могуће наћи један индекс q такав да је

$$\overline{d}_\nu = d_\nu, \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, q-1), \quad d_q = 0, \quad \overline{d}_q = 1.$$

Из (3) слиједи

$$d_\nu = \frac{1 - \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu}{2} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots). \tag{3a}$$

Претпоставимо да је $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q-1} = -1$, тј. да је, према (3a), $d_{q-1} = 1$. Тада је, према (3), $\varepsilon_q = -1$, $\overline{\varepsilon}_q = 1$, гдје цртица изнад ознаке означава да дотични број одговара броју z_1. Функција $x_{q-1}(t)$, према А, монотоно опада у ужем смислу. Како је пак

$$\varepsilon_q f(\dots(\varepsilon_{q+i} f(0))\dots) < 0 < \overline{\varepsilon}_q f(\dots(\overline{\varepsilon}_{q+i} f(0))\dots) \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

то је

$$x_{q+i} > x_{q-1} = \overline{x}_{q-1} > \overline{x}_{q+i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

За $i \to \infty$ добивамо

$$\varliminf_{\nu \to \infty} x_\nu \geqslant x_{q-1} \geqslant \varlimsup_{\nu \to \infty} \overline{x}_\nu.$$

Међутим, оба знака једнакости не могу заједно доћи у обзир, јер би то значило да је

$$z = z_1 = \frac{p}{2^q} \quad (0 < p < 2^{q+1}, \ q \geqslant 0),$$

што се противи претпоставци да је $z < z_1$. Према томе је заиста

$$\xi_1(z) > \xi_2(z_1) \quad (z < z_1).$$

На потпуно аналоган начин доказује се да је $\xi_1(z) > \xi_2(z_1)$ $(z < z_1)$ и у случају кад је $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q-1} = 1$, тј. кад је $d_{q-1} = -1$.

Специјално:

за $z = 0$ је $d_\nu = 0$, $\varepsilon_\nu = 1$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots)$, те је $\xi_1(0) = a$;

за $z = 1$ $\begin{cases} d_0 = 1, \ d_\nu = 0 \ (\nu = 1, 2, \dots) \text{ и } \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = -1, \varepsilon_\nu = 1, \ (\nu = 2, 3, \dots), \\ \qquad \text{те је } \xi_1(1) = -b; \\ d_0 = 0, \ d_\nu = 1 \ (\nu = 1, 2, \dots) \text{ и } \varepsilon_1 = -1, \varepsilon_0 = \varepsilon_\nu = 1, \ (\nu = 2, 3, \dots), \\ \qquad \text{те је } \xi_2(1) = b; \end{cases}$

за $z=2$ је $d_\nu=1$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$ и $\varepsilon_0=-1$, $\varepsilon_\nu=1$ $(\nu=1,2,\ldots)$, те је $\xi_2(2)=-a$.

Овим је доказана тврдња B.

C. — За доказивање тачности тврдње C користићемо се слиједећим помоћним ставом који је лако доказати: Да би се два низа ε_ν и $\bar{\varepsilon}_\nu$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$, који одговарају респективно бројевима z и z_1 из I, разликовали само по члану са индексом нула, тј. да би било $\bar{\varepsilon}_0=-\varepsilon_0$, $\bar{\varepsilon}_i=\varepsilon_i$ $(i=1,2,\ldots)$, потребно је и довољно да бројеви z и z_1 задовољавају релацију $z+z_1=2$. Ако је $z=p/2^q$, под одговарајућим низом бројева ε_i $(i=1,2,\ldots)$ треба подразумијевати пар низова (5).

Нека су сада дата два броја z и z_1 из I, $z+z_1=2$. Тада за низове (2) који одговарају овим бројевима, на основу помоћног става, вриједи $x_\nu=-\bar{x}_\nu$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$. Одавде за $\nu\to\infty$ слиједи $\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, x_\nu=-\underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \bar{x}_\nu$, тј. $\xi_2(z)=-\xi_1(z_1)$ односно $\xi_1(2-z)=-\xi_2(z)$. Овим је доказана и тврдња C.

D. — Нека је $z=d_0, d_1 d_2\ldots$ Из оног што је речено у A о природи низова (2), слиједи да је за свако $\varepsilon>0$ могуће увијек наћи довољно велик број $N(\varepsilon)$ такав да је за бесконачно много вриједности индекса $\nu>N(\varepsilon)$

$$\underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, x_\nu - x_\nu = \xi_1(z) - x_\nu < \varepsilon. \tag{6}$$

Нека су ν_1 и ν_2 таква два индекса и нека је $\nu_2>\nu_1$. Тада је $x_{\nu_1}<x_{\nu_2}<\xi_1(z)$.

Нека је, најприје,

$$z=\frac{p}{2^q}\quad (p \text{ и } q \text{ цијели; } 0<p<2^{q+1};\ q\geqslant 0).$$

Онда је

$$z=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{d_\nu}{2^\nu}\quad \text{гдје је } d_q=1,\ d_{q+i}=0\quad (i=1,2,\ldots).$$

Из овог слиједи да је

$$\varepsilon_0\,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_q=-1,\quad \varepsilon_{q+1}=-1,\quad \varepsilon_{q+i}=1\quad (i=2,3,\ldots).$$

Према томе, одговарајући низ (2) x_ν $(\nu=q,q+1,\ldots)$ монотоно расте. За ν_1 и ν_2 можемо, дакле, узети ма која два броја већа од q, тј. $q<\nu_1<\nu_2$. Нека је, даље,

$$z_1=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\bar{d}_\nu}{2^\nu}\quad (\bar{d}_\nu=d_\nu,\ \nu\leqslant\nu_2;\ \bar{d}_{\nu_2+1}=+1,$$

гдје је
$$d_{\nu_2+i}, \quad i=2,3,\ldots \tag{7}$$
низ бројева 0 и 1 узетих ма којим редом). Тада за одговарајући низ бројева $\bar{\varepsilon}_\nu$ вриједи: $\bar{\varepsilon}_\nu=\varepsilon_\nu,\ \nu\leqslant\nu_2$; $\bar{\varepsilon}_{\nu_2}=1$, $\bar{\varepsilon}_{\nu_2+1}=-1$, те је
$$x_{\nu_1}<\bar{x}_{\nu_2+i}<x_{\nu_2} \quad (i=1,2,\ldots). \tag{8}$$
Множењем ове неједначине са -1, додавањем сваком њеном члану броја $\xi_1(z)$, за $i\to\infty$, с обзиром на (6), добива се да је
$$0<\xi_1(z)-\xi_1(z_1)<\varepsilon. \tag{9}$$
Како је пак по дефиницији броја z_1
$$z_1=z+\sum_{\nu=\nu_2+1}^{\infty}\frac{\bar{d}_\nu-d_\nu}{2^\nu}=z+\frac{1}{2^{\nu_2+1}}+\frac{\theta}{2^{\nu_2+1}}, \quad 0\leqslant\theta\leqslant1,$$
јер је, по претпоставци, избор низа (7) сасвим произвољан, то је (9) испуњено за све вриједности z_1 из затвореног размака
$$\left[z+\frac{1}{2^{\nu_2+1}},\ z+\frac{1}{2^{\nu_2}}\right].$$
Како се мјесто ν_2 може узети ма који број ν_2+i $(i=1,2,\ldots)$, то се на тај начин добива низ затворених размака, који заједно чине један размак
$$\left[z+\frac{1}{2^{\nu_2+i}},\ z+\frac{1}{2^{\nu_2}}\right].$$
Овај за $i\to\infty$ прелази у размак $[z, z+1/2^{\nu_2}]$. Овим је доказано да је $\xi_1(z)$ непрекидна функција од z с десне стране у свакој тачки $z=p/2^q$ размака $0<z<2$. Слично се доказује тачност ове тврдње и за $z=0$.

Нека је сада $z\neq p/2^q$, $0\leqslant z\leqslant2$. — Како је $x_{\nu_2+1}>x_{\nu_2}$, то мора бити или $\varepsilon_0\ldots\varepsilon_{\nu_2}=+1$, $\varepsilon_{\nu_2+1}=+1$, и према томе $d_{\nu_2}=0$ и $d_{\nu_2+1}=0$, или $\varepsilon_0\ldots\varepsilon_{\nu_2}=-1$, $\varepsilon_{\nu_2+1}=-1$, и према томе $d_{\nu_2}=1$ и $d_{\nu_2+1}=0$. Ако и сада са (7) дефинишемо z_1, биће опет испуњене неједначине (8) и (9). Како је пак, по дефиницији бројева z и z_1,
$$z_1=z+\sum_{\nu=\nu_2+1}^{\infty}\frac{\bar{d}_\nu-d_\nu}{2^\nu}=z+\frac{1+\theta}{2^{\nu_2+1}}-\sum_{\nu_2+2}^{\infty}\frac{d_\nu}{2^\nu}, \quad 0\leqslant\theta\leqslant1,$$

то је (9) испуњено за све вриједности од z_1 из затвореног размака

$$\left[z + \frac{1}{2^{\nu_2+1}} - \sum_{\nu_2+2}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu},\ z + \frac{1}{2^{\nu_2}} - \sum_{\nu_2+2}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu}\right]. \tag{10}$$

Ако је још и $x_{\nu_2} < x_{\nu_2+1} < \xi_1(z)$, може се ν_2 замијенити у (10) са ν_2+1. Ова два затворена размака, уствари, чине један затворени размак

$$\left[z - \sum_{\nu_2+3}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu_2+2}},\ z - \sum_{\nu_2+2}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu_2}}\right].$$

За свако z_1 овог размака је испуњена неједначина (9). Ако је пак

$$x_{\nu_2} < x_{\nu_2+\lambda} < \xi_1(z) < x_{\nu_2+\lambda-1} < \ldots < x_{\nu_2+2} < x_{\nu_2+1} \quad (\lambda \geqslant 2), \tag{11}$$

може се ν_2 у (10) замијенити са $\nu_2+\lambda$, те имамо да је (9) испуњено за свако z_1 из затвореног размака

$$\left[z - \sum_{\nu_2+\lambda+2}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu_2+\lambda+1}},\ z - \sum_{\nu_2+\lambda+2}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu_2+\lambda}}\right]. \tag{12}$$

Међутим, лако је доказати да је десна граница размака (12) једнака лијевој граници размака (10). Из овог слиједи да је (9) испуњено и за свако z_1 затвореног размака који се састоји из оба размака (10) и (12).

Из свега овог, резонујући даље слично као и у случају кад је било $z = p/2^q$, слиједи да је (9) испуњено за свако z_1 из размака

$$\left[z,\ z + 2^{-\nu_2} - \sum_{\nu_2+2}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu}\right].$$

Овим је у потпуности доказано да је $\xi_1(z)$ непрекидна функција од z са десне стране у свакој тачки размака $0 \leqslant z < 2$.

На потпуно сличан начин доказује се да је $\xi_2(z)$ непрекидна функција од z с лијеве стране у свакој тачки размака $0 < z \leqslant 2$. — Ако је $\xi_1(z) = \xi_2(z)$ за свако z размака I, онда је, према оном што је речено у B,

$$\xi_1(1) = -b = \xi_2(1) = b = 0.$$

Овим је доказана тврдња D.

E. — За доказивање тврдње E поступићемо овако. Нека је z тачка у којој, по претпоставци, $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ имају прекид. То је, с обзиром ка особине B и D, могуће онда и само онда ако је $\xi_1(z) < \xi_2(z)$. Нека су z_1 и z_2 $(0 \leqslant z_1 < z_2 \leqslant 2)$ крајеви ма каквог размака који не садржи тачку z. Бројеве: k; $\overline{d}_0, \overline{d}_1, \dots, \overline{d}_{k-1}$ можемо увијек изабрати тако да

$$\overline{z} = \varsigma + \frac{z}{2^k}, \quad \left(\varsigma = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\overline{d}_\nu}{2^\nu}\right)$$

буде тачка затвореног размака $[z_1, z_2]$. У тачки $\overline{z}$ морају $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ имати прекид, јер из општег члана низа (2), који одговара броју $\overline{z}$, $\overline{x}_{k+i} = \overline{x}_{k-1}(x_i)$ због монотоније и непрекидности функције $\overline{x}_{k-1}(t)$, слиједи за $i \to \infty$ да је $\xi_1(\overline{z}) < \xi_2(\overline{z})$.

Да је број тачака дисконтинуитета функција $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ пребројив, слиједи из особине монотоности тих функција. Овим је доказана тврдња E.

II

У овом дијелу навешћемо неколико критерија за непрекидност функције $\xi_1(z)$ (а према томе и функције $\xi_2(z)$) у размаку $0 \leqslant z \leqslant 2$, у ком случају је, за свако z тог размака, $\xi_1(z) = \xi_2(z)$ и одговарајући низ (2) конвергентан.

A. — *Да би $\xi_1(z)$ била непрекидна функција од z у размаку $0 \leqslant z \leqslant 2$, потребно је и довољно да буде $b = f(-a) = 0$ и да $x_{\nu+1} - x_\nu \to 0$ кад $\nu \to \infty$.*

B. — *Да би $\xi_1(z)$ била непрекидна функција од z у размаку $0 \leqslant z \leqslant 2$, потребно је да једначина*

$$-t = f(-f(t)) \quad (-a < t < 0) \tag{13}$$

има само једно рјешење ξ_0 и да је $b = f(-a) = 0$.

У слиједећим критеријима претпоставићемо да функција $f(x)$ има први извод $f'(x)$ у свакој тачки размака $-a < x < +a$ и да је $b = f(-a) = 0$.

C. — *Да би функција $\xi_1(z)$ била непрекидна функција у затвореном размаку $[0,2]$, потребно је да је $f'(\xi_0) \leqslant 1$; ξ_0 је такође (једини) коријен једначине $t = -f(t)$.*

D. — *Да би $\xi_1(z)$ била непрекидна функција од z у $[0,2]$, довољно је да је $f'(x) \leqslant q < 1$ $(-a < x < +a,\ q > 0)$.*

E. — *Нека је функција $f(x)$, задржавајући све досад учињене претпоставке о њој, у размаку $-a \leqslant x \leqslant +a$ конвексна одоздо. Тада је $\xi_1(z)$ непрекидна функција од z.*

Прије него што наведемо остале критерије, боље прегледности ради, учинићемо ово:

1. — Увешћемо нову ознаку једначином

$$\left.\begin{aligned} & y_i^{(\nu)}(t) = \varepsilon_i f(\varepsilon_{i+1} f(\ldots(\varepsilon_\nu f(t))\ldots)) \quad (i=0,1,2,\ldots); \\ & \text{специјално је: } y_0^{(\nu)}(t) = x_\nu(t), \ y_\nu^{(\nu)}(t) = \varepsilon_\nu f(t). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

2. — Примијенићемо став о средњим вриједностима на разлику

$$x_{\nu+1} - x_\nu = x_\nu(\varepsilon_{\nu+1} f(0)) - x_\nu(0) = \varepsilon_{\nu+1} f(0) \cdot x'_\nu(\xi^{(\nu)}),$$

гдје је

$$\xi^{(\nu)} = \theta \cdot \varepsilon_{\nu+1} f(0), \quad 0 < \theta < 1. \tag{15}$$

3. — Увешћемо ознаку: $f'_{i,\nu} = f'(y_i^{(\nu)}(\xi^{(\nu)}))$.

Осим тога ћемо претпоставити да је $f(x)$ за $-a \leqslant x \leqslant +a$ стално конкавна одоздо, задржавајући и све остале претпоставке учињене досад о њој.

F. — *Нека је за свако* z $(0 \leqslant z \leqslant 2)$, *узевши у обзир* (4),

$$\prod_{i=\lambda_k}^{\lambda_{k+1}-1} f'_{i,\nu} \leqslant q < 1, \quad \prod_{i=\lambda_{k_\nu}}^{\nu} f'_{i,\nu} \leqslant Q, \quad \left\{ \begin{aligned} & \nu > N; \ k = 0, 1, \ldots, k_\nu - 1; \\ & \lambda_{k_\nu} = \max_{\lambda_k \leqslant \nu} \lambda_k; \ Q > 0 \end{aligned} \right\};$$

шада је $\xi_1(z)$ *нейрекидна функција од* z $(0 \leqslant z \leqslant 2)$.

Уводећи постепено нова ограничења, добива се слиједећи низ све једноставнијих али и све ужих критерија који гласе:

G. — *Ако су за свако* $z\,(0 \leqslant z \leqslant 2)$ *испуњени услови:*

$$\left.\begin{aligned} & f'(\xi_0) < 1, \\ & f'_{\lambda_k,\nu} \cdot [f'(\tau)]^{\lambda_{k+1} - \lambda_k - 1} \leqslant q < 1, \\ & f'_{\lambda_{k_\nu},\nu} \cdot [f'(\tau)]^{\nu - \lambda_{k_\nu}} < Q, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & \nu > N; \ k = 0, 1, \ldots k_\nu - 1; \\ & \xi_0 \leqslant \tau \leqslant 0, \end{aligned}$$

шада је $\xi_1(z)$ *нейрекидна функција од* z $(0 \leqslant z \leqslant 2)$.

H. — *Да би* $\xi_1(z)$ *била нейрекидна функција од* $z\,(0 \leqslant z \leqslant 2)$, *довољно је да је испуњен услов*

$$f'(-\overset{0}{\breve{f}}(\overset{1}{\breve{f}}(\overset{2}{\breve{f}}(\ldots(\overset{n}{\breve{f}}(0))\ldots)))) \cdot [f'(0)]^n \leqslant q < 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

I. — *Функција* $\xi_1(z)$ *је нейрекидна функција од* z *у размаку* [0,2], *ако је испуњен услов*

$$f'(x) \leqslant q \cdot f'(0) \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\varkappa}$$

$$\left\{ q < 1; \ -a \leqslant x \leqslant -a(1 - f'(a)); \ \varkappa = -\frac{\log f'(0)}{\log f'(a)} \right\}. \tag{17}$$

Докази:

A. — Тачност тврдње A слиједи непосредно из особина низа (2) наведених у IA и ID.

B. — Доказ за B слиједи непосредно из IB, ID и из слиједеће чињенице: да би низ $x_0 = -f(0)$, $x_{\nu+1} = -f(x_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ био конвергентан, потребно је и довољно да једначина (13) има само један коријен ξ_0; ξ_0 је уједно и једини коријен једначине $t = -f(t)$.

C. — Претпоставимо да је $f'(\xi_0) > 1$. Тада ξ_0 није једино рјешење једначине (13), те, према II B, $\xi_1(z)$ не може бити непрекидна функција у размаку $0 \leqslant z \leqslant 2$. Овим је доказана тачност за C.

D. — Према (14) и (15) добива се

$$x_{\nu+1} - x_\nu = \varepsilon_0\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{\nu+1} \cdot f(0) \cdot \prod_{i=1}^{\nu} f'_{i,\nu} \cdot f'(\xi^{(\nu)}), \quad (0 \leqslant z \leqslant 2) \qquad (18)$$

те $|x_{\nu+1} - x_\nu| \leqslant f(0) \cdot q^{\nu+1} \to 0$ за $\nu \to \infty$. Према II A, $\xi_1(z)$ је непрекидна функција. Овим је доказано D.

E. — Из дефиниције функције $f(x)$ слиједи да је: $f'(x) < 1$ $(-a \leqslant x \leqslant +a)$, $f'(a) \leqslant 1$. Разликоваћемо два случаја према томе да ли је $\varepsilon_i = -1$ a) за коначно много, b) за бесконачно много вриједности индекса i. У случају a), према оном што је речено у I A, одговарајући низ (2) је конвергентан. У случају b) могуће је за свако N наћи један број $n(N)$ такав да за свако $\nu > n(N)$ постоји најмање N вриједности индекса $i \leqslant \nu$ за које је $\varepsilon_i = -1$. За свако такво ν можемо писати да је, с обзиром на (14), (15), (4) и особине извода $f'(x)$,

$$|x_{\nu+1} - x_\nu| = f(0) \cdot \prod_{k=0}^{N} f'_{\lambda_k,\nu} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \lambda_k \leqslant \lambda_N}}^{\nu} f'_{i,\nu} \cdot f'(\xi^{(\nu)}) < f(0) \cdot [f'(0)]^N \to 0 \text{ за } N \to \infty.$$

Овим је, према II A, доказано E.

F. У овом случају, због $f'(x) < 1$ $(x \geqslant 0)$, вриједи, с обзиром на (18) и (4),

$$| x_{\nu+1} - x_\nu | = f(0) \cdot \prod_{i=1}^{\lambda_0 - 1} f'_{i,\nu} \cdot \prod_{k=0}^{k_\nu - 1} \prod_{i=\lambda_k}^{\lambda_{k+1}-1} f'_{i,\nu} \cdot \prod_{i=\lambda_{k_\nu}}^{\nu} f'_{i,\nu} \cdot f'(\xi^{(\nu)}) \leqslant$$

$$\leqslant f(0) \cdot 1 \cdot q^{k_\nu} \cdot Q \cdot f'(\xi^{(\nu)}) \to 0 \quad \text{кад} \quad \nu \to \infty.$$

Ако је у (4) $k = 0, 1, \ldots, n$, гдје је n коначан број, одговарајући низ (2) је такођер конвергентан, како је то у IA већ раније утврђено.

G. — Доказ слиједи непосредно из II F и из чињенице да је $f'(t) < f'(\tau) < 1 \quad (t > 0)$.

H. — Да би се доказала тачност за H, довољно је доказати да су испуњени услови из II G ако је испуњен услов (16). — Заиста из (16) за $n=0$ слиједи $f'(\xi_0) \leqslant q < 1$. С друге стране, лако је доказати да је

$$f'_{\lambda_k,\nu} < f'(-\overset{0}{\breve{f}}(\overset{1}{\breve{f}}(\overset{2}{\breve{f}}(\ldots(\overbrace{f}^{n+1}(0))\ldots)))), \quad n = \lambda_{k+1} - \lambda_k - 1.$$

Према томе, ако је испуњен услов (16), онда је тим прије испуњен други од услова II G за $\tau = 0$. Надаље, због $\xi^{(\nu)} < f(0)$, имамо

$$f'_{\lambda_{k_\nu},\nu} < f'(-\overset{0}{\breve{f}}(\overset{1}{\breve{f}}(\ldots(\overbrace{f}^{n+1}(0))\ldots))), \quad n = \nu - \lambda_{k_\nu}.$$

Према томе из

$$f'(-\overset{0}{\breve{f}}(\overset{1}{\breve{f}}(\ldots(\overbrace{f}^{n+1}(0))\ldots))) \cdot [f'(0)]^n \leqslant Q, \quad n = \nu - \lambda_{k_\nu}$$

слиједи да је тим прије

$$f'_{\lambda_{k_\nu},\nu} \cdot [f'(0)]^n \leqslant Q, \quad n = \nu - \lambda_{k_\nu}.$$

Међутим, замијенивши у (16) n са $n+1$, подијеливши, затим, добивену неједначину са $f'(0)$ и ставивши $q/f'(0) = Q$, добива се

$$f'(-\overset{0}{\breve{f}}(\overset{1}{\breve{f}}(\ldots(\overbrace{f}^{n+1}(0))\ldots)))\,[f'(0)]^n \leqslant \frac{q}{f'(0)} = Q.$$

Овим је доказана тврдња H.

I. — У циљу доказивања ове тврдње користићемо се функцијом $\varphi(x) = kx + c$, $k = f'(a)$, $c = a(1-k)$. Једначина $y = kx + c$ је једначина тангенте криве $y = f(x)$ у тачки (a, a), те је

$$f(x) < \varphi(x) \quad (-a \leqslant x \leqslant +a), \quad f(a) = \varphi(a).$$

Потпуном индукцијом лако се доказује да је

$$\overset{0}{\breve{f}}(\overset{1}{\breve{f}}(\ldots(\overset{n}{\breve{f}}(0))\ldots)) < a(1-k^{n+1}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из ове неједначине, због конкавности функције $f(x)$, слиједи

$$f'(-\overset{0}{\breve{f}}(\overset{1}{\breve{f}}(\ldots(\overset{n}{\breve{f}}(0))\ldots))) < f'[-a(1-k^{n+1})] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Према томе, ако је

$$f'[-a(1-k^{n+1})]\cdot[f'(0)]^n \leqslant q < 1 \quad (n=0,1,2,\ldots), \tag{19}$$

онда је тим прије испуњен услов (16). Услов (19) је много једноставнији од услова (16), али је по обиму нешто ужи. Међутим, (19) се може замијенити још ужим и једноставнијим условом

$$f'[-a(1-k^t)]\cdot[f'(0)]^t \leqslant q\cdot f'(0), \quad (q<1;\ t\geqslant 1), \tag{20}$$

гдје је t непрекидна промењљива величина $(t\geqslant 1)$. Извршивши смјену $x=-a(1-k^t)$ и ставивши да је $\varkappa=-\log f'(0)/\log f'(a)$, услов (20) прелази у услов (17).

III

За илустрацију закључака добивених у отсјецима I и II навешћемо овдје слиједећа два примјера.

Примјер 1. — Ако је

$$f(x)=\frac{a}{\sqrt[m]{2a}}\sqrt[m]{a+x}, \quad m>0,$$

онда у размаку $0\leqslant z\leqslant 2$

1º за $0<m<2^{-1}$ функције $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ имају пребројиво много тачака дисконтинуитета свуда густо распоређених у наведеном размаку;

2º за $2^{-1}\leqslant m<4$ функције $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ су непрекидне:

$$\xi_1(z)=\xi_2(z);$$

3º за $m>4$ питање остаје неријешено.

Доказ. — Посматрана функција $f(x)$ испуњава све претпоставке из I. За $0<m<1$ она је конвексна одоздо, за $m>1$ она је конкавна одоздо и за $m=1$ је $f(x)=(x+a)/2$, $f'(x)=2^{-1}$. Да би био испуњен и услов $f(x)>x$ $(|x|<a)$, у случају $m<1$, потребно је и довољно да је $m\geqslant 2^{-1}$. Према томе, а на основу II D и II E, за $2^{-1}\leqslant m\leqslant 1$ одговарајуће функције $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ су непрекидне функције од z у размаку $0\leqslant z\leqslant 2$. За $0<m<2^{-1}$ једначина $f(x)=x$ има осим корјена $x=a$ још један коријен $x=a'$ $(0<a'<a)$. У овом случају функција $f(x)$ $(-a'\leqslant x\leqslant a')$ испуњава све претпоставке наведене у I, при чему је још

$$b=f(-a)=a\,\frac{\sqrt[m]{a-a'}}{\sqrt[m]{2a}}>0.$$

За $m > 1$, примијенивши (17), добивамо услов

$$1 > q \geqslant \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{m}\left(1 - \frac{\log 2^{m-1}}{\log 2m}\right)}, \quad \left(m > 1; \quad 0 \leqslant 1 + \frac{x}{a} \leqslant \frac{1}{2m}\right).$$

Да би овај услов био испуњен, потребно је и довољно да буде $1 < m < 4$.

Примјер 2. — Нека је $f(x) = c + \lambda x$, $\lambda \leqslant 2^{-1}$, $c = a(1 - \lambda)$. Тада је, с обзиром на (3а).

$$x_\nu(t) = c\left(\sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{k^i} - 2\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_i}{k^i}\right) + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu}{k^{\nu+1}} t.$$

За $\nu \to \infty$ добива се, независно од вриједности величине t,

$$\xi_1(z) = \frac{c k \theta'}{k-1}, \quad \xi_2(z) = \frac{c k \theta''}{k-1}, \quad (-1 \leqslant \theta' \leqslant \theta'' \leqslant +1).$$

За $k = 2$ је $\xi_1(z) = \xi_2(z) = a(1 - z)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Polya und Szegö — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Berlin 1925., Aufgaben 183, 184, und 185.

[2] J. Карамата — *Весник Друштва математичара и физичара НР Србије* **3—4** (1949), стр. 157, задатак 14.

[3] Часлав Станојевић — Решење задатка 14. *Весник Друштва математичара и физичара НР Србије* **3—4** (1950), стр, 96.

SUR LES SUITES DÉFINIES PAR L'ÉQUATION $x_\nu = \varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\ldots(\varepsilon_\nu f(0))\ldots))$

par

M. BAJRAKTAREVIĆ

Chaque nombre z du segment $I = [0,2]$ peut être représenté sous la forme

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_\nu}{2^\nu}, \quad (0 \leqslant z \leqslant 2), \qquad (1$$

les nombres d_ν $(\nu=0,1,2,...)$ ayant, pour chaque z, la valeur déterminée 0 ou 1. A tout nombre z de I correspond univoquement une suite de nombres de la forme

$$x_\nu=\varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(...(\varepsilon_\nu f(0))...)), \tag{2}$$

où les nombres ε_ν, donnés par les équations

$$\varepsilon_0=1-2d_0, \quad \varepsilon_\nu=\frac{1-2d_\nu}{1-2d_{\nu-1}}, \tag{3}$$

pour chaque z de I, ont la valeur déterminée $+1$ ou -1. Les deux suites (2), respectivement les deux suites (3), qui correspondent au nombre

$$z=\frac{p}{2^q}, \quad (0<p<2^{q+1}, \ q\geqslant 0),$$

sont considérées comme un élément de l'ensemble des suites (2), respectivement de l'ensemble des suites (3).

L'auteur étudie les propriétés des suites définies par l'équation (2). Dans la partie I on donne quelques propriétés générales des suites (2). Dans la partie II on a cité un certain nombre de criteriums pour la convergence de ces suites. Pour illustrer les résultats obtenus dans I et II on donne, dans la partie III, deux exemples dont le premier représente la généralisation de la suite particulière lorsque $f(x)=\sqrt{2+x}$ et qui a été étudiée par plusieurs auteurs.