Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

ЈОВАН КАРАМАТА

О АСИМПТОТСКОМ ПОНАШАЊУ НИЗОВА ДЕФИНИСАНИХ РЕКУРЕНТНИМ РЕЛАЦИЈАМА

1. У саопштењу „О геометријској интерпретацији М. Миланковића конвергенције бесконачних редова“ [2], показао сам да се поменута геометријска интерпретација конвергенције бесконачних редова своди на решавање једначине

$$x=f(x)$$

методом сукцесивне апроксимације, тј. низом узастопних приближних вредности x_n одређених рекурентном релацијом облика

$$x_{n+1}=f(x_n)\,,\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

као и да брзина конвергенције посматраних редова, тј. низа x_n, зависи од реда додира у тачки пресека криве

$$y=f(x)$$

са правом

$$y=x\,.$$

Том приликом, поред осталих примера, навео сам и општи став који даје брзину конвергенције низа приближних вредности (1) кад је поменути ред додира $k>1$ и који гласи

Став I. *Нека је*

$$a>0\,,\quad k>1\,,$$

$$f(x)=x+a\,(w-x)^k+o\,\{(w-x)^k\}\,,\quad x\to w-0,$$

и низ x_n дефинисан са (1)*; ако је $w-x_0>0$ и довољно мало, тада је*

$$x_n=w-a^*/n^{k^*}+o\,(1/n^{k^*})\,,\quad n\to\infty\,,$$

са

$$k^*=1/(k-1)\quad и\quad a=1/(k-1)\,a^{k^*}.$$

У вези са овим ставом цитирао сам аналоган став који се налази код G. Pólya и G. Szegö [8, стр. 31, зад. 174 и 173], али је тај став нешто ужи, јер не само што претпоставља да је

$$f(x)=x+a\,(w-x)^k+b\,(w-x)^l+o\,\{(w-x)^l\}\,,\quad x\to w-0\,,\quad са\quad l<k,$$

већ се и у доказу имплицитно претпоставља да је и функција $f(x)$ монотона у близини тачке $x=w$. [1])

Доказ става I у овом општем облику дао је А. Островски [**7**]. У истом раду он даје и преглед ставова ове врсте, упоређује их и проучава њихову ефикасност. Због доцније примене навешћу први од ових ставова који је основни став ове врсте, јер даје најопштије услове које треба да задовољава функција $f(x)$ да би низ (1) конвергирао. Без ограничења могу ставити да је $w=0$, а тада овај став у нешто измењеној транскрипцији гласи (види напр. [**1**] и [**6**]).

Став II. *Ако је*

$$f(x)\geqslant 0 \quad \text{за} \quad 0\leqslant x\leqslant c$$

и

$$\inf_{x\leqslant t\leqslant c}\{t-f(t)\}>0 \quad \text{за свако} \quad 0<x<c. \tag{2}$$

(*што је испуњено ако је $f(x)$ непрекидно и $0\leqslant f(x)<x$ за $0\leqslant x\leqslant c$*) *тада низ x_n, дефинисан рекурентном релацијом*

$$x_{n+1}=f(x_n), \quad n=0,1,2,\ldots, \quad \text{са} \quad 0<x_0\leqslant c,$$

монотоно опада и тежи нули кад $n\to\infty$.

Доказ овог става је непосредан, јер из (2) следи да је $x_n>x_{n+1}$, тако да x_n мора тежити неком $\xi\geqslant 0$, па

$$x_n-f(x_n)=x_n-x_{n+1}\to 0 \quad \text{кад} \quad x_n\to+0,$$

а ово се противи претпоставци (2) ако је $\xi>0$.

Што се тиче доказа става I, напоменуо бих само да се он може непосредно свести на специјалан случај где је

$$f(x)=x+a(w-x)^k, \quad a>0, \quad k>1, \tag{3}$$

ако се има у виду ова лема:

Нека су $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ монотоне функције које не опадају за $0\leqslant x\leqslant c$, и нека је

$$t_{n+1}=\varphi(t_n), \quad T_{n+1}=\Phi(T_n), \quad n=0,1,2,\ldots;$$

тада из

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\Phi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant c,$$

---

[1]) Наиме у скици доказа примера 174, на стр. 188, аутори се ослањају на поступак E. Jacobsthala наведен у примеру 173, који се односи на исти став, али са специјалном функцијом $f(x)=\sin x$. Том приликом на стр. 188, у другом и трећем реду одозго, аутори из $\sin_N x>c/\sqrt{N+\alpha}$ закључују да је $\sin(\sin_N x)>$ $>\sin(c/\sqrt{N+\alpha})$, чиме имплицитно уводе претпоставку да функција $f(x)=\sin x$ монотоно расте.

и

$$0 \leqslant t_0 \leqslant x_0 \leqslant T_0 \leqslant c,$$

следи

$$t_n \leqslant x_n \leqslant T_n, \quad \text{за} \quad n=0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Доказ ове леме добива се непосредно индукцијом, јер ако претпоставимо да је за неко n (4) испуњено, биће

$$t_{n+1} = \varphi(t_n) \leqslant \varphi(x_n) \leqslant f(x_n) = x_{n+1},$$

као и

$$x_{n+1} = f(x_n) \leqslant \Phi(x_n) \leqslant \Phi(T_n) = T_{n+1}.$$

Став I се, међутим, може проширити и на случај кад ред додира k није чист степен. Довољно је да се претпостави да се функција $f(x) - x$ у близини тачке додира „правилно понаша", тј. да буде

$$f(x) - x \sim a x^k L(x), \quad x \to +0,$$

где се $L(x)$ „споро мења", што значи да је $L(x) > 0$ и да

$$L(ux)/L(x) \to 1 \quad \text{кад} \quad x \to +0,$$

и то за свако $u > 0$. Дефиницију и особине функција које се правилно понашају дао сам у радовима [3] и [4], а оне особине које ће нам у овом излагању бити потребне навешћу у тачки 2.

Прецизно формулисано ово уопштење става I дато је ставом III у тачки 3. У овом случају се, међутим, доказ не може више свести на наведену лему и специјални случај (3), али се може у главним цртама применити Островсков поступак.

Ако се у ставу III функција $f(x)$ замене функцијом $1/g(1/x)$, добива се непосредно у тачки 4 наведени став IV. Овај став даје тада асимптотско понашање низа y_n који тежи бесконачности са n и који је дефинисан рекурентном релацијом облика

$$y_{n+1} = g(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и казује како се ово асимптотско понашање може добити из асимптотског понашања функције $g(y)$ кад $y \to \infty$. Ставови ове врсте су од нарочитог интереса у многим проблемима анализе, а примера ради, навешћу у тачки 5 један случај где се такав став јавља.

Напомињем да је у ставовима III и IV изричито претпостављено да k буде веће од 1, односно $r < 1$, јер не само да наведени поступци у доказу не важе кад је $k = 1$, односно $r = 1$, већ би се и одговарајући став битно разликовао, а претпоставке о функцији $L(x)$ морале би бити много прецизније.

2. Пре него што пређем на поменуто проширење става I, навешћу овде оне од особина функција које се правилно понашају које ће ми у доказу става III бити потребне.

Претпоставка да се извесна функција $h(x)$ правилно понаша у близини тачке $x=+0$ своди се на чињеницу да она има облик

$$h(x)=x^r L(x),$$

где је r коначан реалан број, а $L(x)$ функција која се у близини тачке $x=+0$ споро мења и која се може написати у каноничном облику

$$L(x)=C(x)\exp\left\{\int_x^1 \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\right\}, \quad x>0,$$

при чему

$$C(x)\to C\neq 0 \quad \text{а} \quad \varepsilon(x)\to 0 \quad \text{кад} \quad x\to+0.$$

Према томе, ако се функција $h(x)$ правилно понаша у близини тачке $x=+0$, тада можемо увек ставити да је

$$h(x)\sim C\,x^r L(x), \quad \text{са} \quad C\neq 0, \quad x\to+0,$$

и, без ограничења, за компаративну функцију $L(x)$ можемо претпоставити да има облик

$$L(x)=\exp\left\{\int_x^1 \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\right\},$$

односно да је

$$x\,L'(x)=o\{L(x)\} \quad \text{кад} \quad x\to+0.$$

У томе случају је функција

$$x^r L(x) \quad \text{за} \quad r>0$$

монотона у близини тачке $x=+0$. Према томе, за довољно мало x постоји увек њена инверсна функција, која тада има облик

$$x^{1/r} L^*(x),$$

где се $L^*(x)$ такође споро мења у близини тачке $x=+0$.

Како и овде $L^*(x)$ служи само као компаративна функција, то није потребно дати њену тачну вредност и довољно је наћи само најједноставнију функцију која се асимптотски подједнако понаша. За одређивање таквог једног израза можемо се у многим случајевима такође послужити сукцесивном апроксимацијом. Ако наиме ставимо

$$L_1^*(x)=L^{-r^*}(x^{r^*})$$

и

$$L_{n+1}^{*}(x)=L^{-r*}(x^{r*}L_{n}^{*}(x)),\quad n=1,2,\ldots,$$

где је

$$r^{*}=1/r,$$

тада су

$$y_n=L_n^{*}(x),\quad n=1,2,\ldots,$$

узастопна приближна решења једначине

$$y=L^{-r*}(x^{r*}y),$$

а која се за $z=x^{r*}y$ своди на

$$z^{r}L(z)=x.$$

Дакле, ако овај поступак конвергира, тада

$$L_n^{*}(x)\sim L^{*}(x)\quad \text{кад}\quad n\to\infty.$$

Међутим, како се овде тражи само што једноставнији израз који се асимптотски понаша као $L^{*}(x)$ и како се $L(x)$ споро мења у близини тачке $x=+0$, то често већ прве од функција $L_n^{*}(x)$ имају ову особину. Ово наступа чим је за неко $n=k$

$$L_{n+1}^{*}(x)\sim L_n^{*}(x),\tag{5}$$

јер се тада и

$$L_n^{*}(x)\sim L_k^{*}(x)\quad \text{за свако}\quad n>k,$$

тако да се и

$$L^{*}(x)\sim L_k^{*}(x)\quad \text{кад}\quad x\to+0.$$

Према томе се у овом случају можемо задржати на првој од функција $L_k^{*}(x)$ за коју важи релација (5), и као компаративну функцију уместо функције $L^{*}(x)$, можемо узети ову функцију.

Тако, напр., ако је

$$L(x)=(\lg 1/x)^{p}\quad \text{са произвољним } p,$$

биће већ

$$L_2^{*}(x)\sim L_1^{*}(x),$$

па је

$$L^{*}(x)\sim L_1^{*}(x)=(\lg x^{-r*})^{-pr*}=r^{pr*}(\lg 1/x)^{-pr*},\quad x\to+0,$$

Ако је, међутим,

$$L(x)=e^{(\lg 1/x)^{c}}\quad \text{са}\quad 0<c<1,$$

и ако краткоће ради ставимо

$$y=\lg 1/x,$$

биће

$$L_1^{*}(x)=\exp\{-r^{-1-c}y^{c}\},$$

$$L_2^{*}(x)=\exp\{-r^{-1-c}(y+r^{-c}y^{c})^{c}\},$$

$$L_3^{*}(x)=\exp\left\{-r^{-1-c}\left[y+r^{-c}(y+r^{-c}y^{c})^{c}\right]^{c}\right\},$$

па је за

$$0 < c < 1/2,$$

већ

$$L_2^*(x) \backsim L_1^*(x),$$

тј.

$$L^*(x) \backsim L_1^*(x) = e^{-r^{-1-c}} y^c,$$

док је за

$$1/2 \leqslant c < 2/3,$$

тек

$$L_3^*(x) \backsim L_2^*(x),$$

тако да је

$$L^*(x) \backsim L_2^*(x) \backsim e^{-r^{-1-c}(y^c + cr^{-c} y^{2c-1})}.$$

Уопште, ако је

$$\frac{k-1}{k} \leqslant c < \frac{k}{k+1},$$

тада је тек

$$L_{k+1}^*(x) \backsim L_k^*(x),$$

па је

$$L^*(x) \backsim L_k^*(x), \quad x \to +0,$$

тек за

$$k = [1/(1-c)].$$

Отуда можемо закључити да не мора увек постојати коначно n тако да се нека од функција $L_n^*(x)$ асимптотски понаша као $L^*(x)$, а ово наступа нарочито кад $L(x)$ сувише брзо тежи нули или бесконачности.

3. На основи наведених особина функција које се правилно понашају можемо сад прећи на доказ уопштења става I, а које гласи

Став III. *Нека је функција $f(x)$ дефинисана у близини тачке $x = +0$ и нека се у близини ове тачке функција $x - f(x)$ правилно понаша, тј. нека је*

$$f(x) = x - a(x)\, x^k\, L(x), \tag{6}$$

где

$$a(x) \to a \neq 0, \quad x \to +0, \tag{7}$$

и

$$x L'(x) = o\{L(x)\}, \quad x \to +0. \tag{8}$$

Ако је

$$a > 0 \quad \text{и} \quad k > 1, \tag{9}$$

и ако је x_0 довољно мало, тако да буде

$$f(x) > 0 \quad \text{за} \quad 0 < x \leqslant x_0,$$

и

$$\inf_{\xi \leqslant x \leqslant x_0} \{x - f(x)\} > 0 \quad \text{за свако} \quad 0 < \xi < x_0, \tag{10}$$

тада из

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{11}$$

следи да је

$$x_n \sim a^* n^{-k^*} L^*(1/n), \quad n \to \infty, \tag{12}$$

где је

$$k^* = 1/(k-1) \quad \text{и} \quad a^* = (k^*/a)^{k^*}, \tag{13}$$

а

$$x^{k^*} L^*(x)$$

инверсна функција функције

$$x^{k-1} L(x).$$

Доказ. Из (10) и става II следи да

$$x_n \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Ако ставимо

$$f(x) = x - h(x) \quad \text{и} \quad k = 1 + q,$$

тада је, према (9),

$$q > 0,$$

а према (6) и (7)

$$h(x) = a(x)\, x^{1+q} L(x) \sim a\, x^{1+q} L(x), \quad x \to +0,$$

па је, према (11) и (14)

$$x_n - x_{n+1} = h(x_n) \sim a\, x_n^{1+q} L(x_n), \quad n \to \infty. \tag{15}$$

Према томе се

$$x_{n+1} \sim x_n \quad \text{кад} \quad n \to \infty. \tag{16}$$

Даље је

$$\begin{aligned} & x_n^q L(x_n) - x_{n+1}^q L(x_{n+1}) = \\ & = (x_n^q - x_{n+1}^q) L(x_n) + x_{n+1}^q \{L(x_n) - L(x_{n+1})\} = \\ & = q(x_n - x_{n+1})\, \xi_n^{q-1} L(x_n) + x_{n+1}^q (x_n - x_{n+1}) L'(\eta_n), \end{aligned} \tag{17}$$

при чему се ξ_n и η_n налазе у размаку (x_{n+1}, x_n). Како се, према (16), x_n и x_{n+1} асимптотски подједнако понашају, то је, дакле, и

$$x_n \sim \xi_n \sim \eta_n \sim x_{n+1}, \quad n \to \infty,$$

а отуда је, на основу особина функција које се споро мењају, и

$$L(x_n) \sim L(\eta_n) \sim L(x_{n+1}), \quad n \to \infty.$$

Из ових релација и (15) добивамо за први члан обрасца (17)

$$\begin{aligned} q(x_n - x_{n+1})\, \xi_n^{q-1} L(x_n) & \sim aq x_n^{2q} (L^2(x_n)) \sim \\ & \sim aq x_n^q x_{n+1}^q L(x_n) L(x_{n+1}), \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

а за други члан

$$x_{n+1}^q (x_n - x_{n+1}) L'(\eta_n) \backsim a x_n^{q+1} \; x_{n+1}^q L(x_n) L'(\eta_n) \backsim$$

$$\backsim a \, x_n^q \, x_{n+1}^q \; L(x_n) L(x_{n+1}) \frac{\eta_n L'(\eta_n)}{L(\eta_n)}, \quad n \to \infty .$$

Према томе се, с обзиром на (8), релација (17) своди на

$$\frac{1}{x_{n+1}^q L(x_{n+1})} - \frac{1}{x_n^q L(x_n)} \to aq \quad \text{кад} \quad n \to \infty ,$$

тако да се

$$\frac{1}{x_n^q L(x_n)} \backsim aqn \quad \text{кад} \quad n \to \infty ,$$

па се

$$x_n^q L(x_n) \backsim 1/aqn \quad \text{кад} \quad n \to \infty .$$

Ако сад са

$$x^{k*} L^*(x)$$

означимо инверсну функцију функције

$$x^q L(x) = x^{k-1} L(x),$$

то добивамо коначно (види, напр. [5, стр. 116—120]), с обзиром на (13),

$$x_n \backsim \frac{1}{(aqn)^{k*}} L^*\left(\frac{1}{aqn}\right) \backsim a^* n^{-k*} L^*(1/n), \quad n \to \infty ,$$

чиме је тврђење (12) става III доказано.

4. Ако у ставу III извршимо смене

$$x = 1/y \quad \text{и} \quad f(x) = 1/g(y),$$

тада се претпоставке (6), (7) и (8) своде на чињеницу да се

$$g(y) - y$$

правилно понаша кад $y \to \infty$, тако да функцију $g(y)$ можемо написати у облику

$$g(y) = y + A(y) \, y^r L(y), \tag{18}$$

где

$$A(y) \to A \neq 0, \quad y \to \infty , \tag{19}$$

$$y L'(y) = o\{L(y)\}, \quad y \to \infty , \tag{20}$$

и где је, с обзиром на (9),

$$A > 0 \quad \text{и} \quad r < 1. \tag{21}$$

Заиста, према (6) је

$$g(y) - y = \frac{y}{1 - a(1/y)\, y^{1-k} L(1/y)} - y =$$

$$= \frac{a(1/y)}{1 - a(1/y)\, y^{1-k} L(1/y)}\, y^{2-k} L(1/y),$$

тако да се, ако ставимо

$$A(y) = \frac{a(1/y)}{1 - a(1/y)\, y^{1-k} L(1/y)}, \quad 2 - k = r,$$

и $L(1/y)$ заменимо са $L(y)$, релације (6), (7) и (8) своде на (18), (19) и (20), а услови (9) на услове (21).

Ако затим ставимо

$$\xi = 1/\eta \quad \text{и} \quad x_0 = 1/y_0,$$

тада из

$$x - f(x) = \frac{g(y) - y}{y g(y)}$$

следи да ће услови (10) бити испуњени ако је y_0 довољно велико да буде

$$\inf_{y_0 \leqslant y \leqslant \eta} \{g(y) - y\} > 0 \quad \text{за свако} \quad \eta > y_0.$$

Даље се рекурентна релација (11) своди на

$$y_{n+1} = g(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и најзад тврђење (12) на

$$y_n \sim A^* n^{r^*} L^*(n), \quad n \to \infty,$$

где је

$$r^* = 1/(1 - r), \quad A^* = (A/r^*)^{r^*},$$

а

$$x^{r^*} L^*(x)$$

инверсна функција функције

$$x^{1-r} L(x).$$

Овим добијамо ставу III аналоган став који гласи

Став IV. *Нека је функција $g(y)$ дефинисана за велике вредности од y и нека се $g(y)-y$ правилно понаша кад $y\to\infty$, тј. нека је*

$$g(y)=y+A(y)\,y^r L(y);$$

где

$$A(y)\to A\neq 0, \quad y\to\infty,$$

и

$$y L'(y)=o\{L(y)\}, \quad y\to\infty.$$

Ако је

$$A>0, \quad r<1,$$

и ако је y_0 довољно велико тако да буде

$$\inf_{y_0\leqslant y\leqslant \eta}\{g(y)-y\}>0 \quad \text{за свако} \quad \eta>y_0,$$

тада из

$$y_{n+1}=g(y_n), \quad n=0,1,2,\ldots, \tag{22}$$

следи да је

$$y_n\backsim A^* n^{r^*} L^*(n), \quad n\to\infty,$$

где је

$$r^*=1/(1-r), \quad A^*=(A/r^*)^{r^*},$$

а

$$y^{r^*} L^*(y)$$

инверсна функција функције

$$y^{1-r} L(y).$$

5. Илустрације ради навешћу овде још поступак којим је Б. Поповић [9] показао да постоји таква функција $A(t)$ која се за бескрајно много вредности од t понаша као

$$C\,t^{1+\varepsilon}, \quad 0<\varepsilon<1, \quad C>0,$$

а при томе не опада сувише брзо, тј. задовољава услов

$$A(t+h)-A(t)\geqslant -Mh,$$

за свако $t\geqslant 0$ и $0\leqslant h\leqslant h_0$, где су M и h_0 коначни и позитивни бројеви, и поред тога што њена Laplace-ова трансформација, тј.

$$J(\sigma)=\int_0^\infty e^{-\sigma t}\,dA(t)=\sigma\int_0^\infty e^{-\sigma t}A(t)\,dt$$

остаје ограничена кад $\sigma\to 0$.

При образовању ове функције јавља се низ бројева y_n који је дефинисан рекурентном релацијом облика (22) са специјалном функцијом облика

$$g(y) = y + 2y^r \quad \text{и} \quad r < 1.$$

Иако за сам поступак није битан експлицитни облик овог низа, ипак је од интереса да се напомене да овај низ не расте сувише брзо, јер се према ставу III он понаша само као известан степен од n кад $n \to \infty$. Према томе, за конструкцију овакве функције $A(t)$ није потребно да овај низ расте сувише брзо, као што је то обично случај код многих сличних проблема. Али, ако желимо да образујемо функцију $A(t)$ која се местимично понаша као Ct, ово би се евентуално могло постићи само низовима y_n који теже бесконачности брже од маког степена од n, уколико таква функција уопште постоји. Ово се најбоље увиђа из самог начина образовања функције $A(t)$; стога ћу овај поступак изнети у нешто сажетом облику и том приликом штавише показати да се наведени услови које мора задовољавати функција $A(t)$ могу још нешто сузити, и то овако:

Постоји таква функција $A(t)$ чији извод остаје ограничен, тј.

$$|A'(t)| < M, \quad \text{за свако} \quad t \geqslant 0, \tag{23}$$

чија Laplace-ова трансформација тежи нули, и то тако да буде

$$J(\sigma) = \sigma \int_0^\infty e^{-\sigma t} A(t)\, dt = O(\sigma^k), \quad \sigma \to 0, \tag{24}$$

ма колико велик био број k, а која се при томе ипак местимично понаша као $Ct^{1-\varepsilon}$, тј. постоји низ бројева t_n такав да је

$$A(t_n) \backsim C t_n^{1-\varepsilon}, \quad t_n \to \infty, \tag{25}$$

са $C > 0$ и произвољно мало $\varepsilon > 0$.

Да бисмо ово показали, образујмо најпре функцију $H(t)$, која у размаку $(-1, +1)$ има одређен извод и ове особине:

$1^0 \quad H(-1) = H(+1), \quad H'(-1) = H'(+1),$ (26)

2^0 функција

$$K(x) = \int_{-1}^{+1} e^{-xt} H(t)\, dt \tag{27}$$

има у тачки $x = 0$ нулу најмање q-тог реда, тј.

$$K^{(\nu)}(0) = (-1)^\nu \int_{-1}^{+1} t^\nu H(t)\, dt = 0 \quad \text{за} \quad \nu = 0, 1, \ldots, q-1. \tag{28}$$

Из (28) следи да је

$$|K(x)| \leqslant \frac{2^q K}{q!} x^{q-1} (e^x - e^{-x}) \quad \text{за свако} \quad x \geqslant 0, \tag{29}$$

где је

$$|H(t)| \leqslant K \quad \text{за} \quad -1 \leqslant t \leqslant +1.$$

Заиста, парцијалном интеграцијом интеграла (27) добивамо, према (28),

$$K(x) = x^q \int_{-1}^{+1} e^{-xt} H_q(t)\, dt, \tag{30}$$

где је $H_q(x)$ q-ти интеграл функције $H(x)$, тј.

$$H_q(x) = \frac{1}{(q-1)!} \int_{-1}^{+1} (x-t)^{q-1} H(t)\, dt,$$

тако да је

$$|H_q(x)| \leqslant \frac{K\, 2^q}{q!} \quad \text{за свако} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

што према (30) даје неједначину (29).

Једна таква функција $H(t)$ која има особине 1° и 2° је, например, полином $(q+8)$-ог степена,

$$H(t) = (1-t^2)^2 P(t),$$

где је $P(t)$ Лежандров полином $(q+4)$-тог степена.

Помоћу функције $H(t)$ образована функција

$$A(t) = z_n H\left(\frac{t - y_n^*}{z_n}\right) \quad \text{за} \quad y_n \leqslant t \leqslant y_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{31}$$

са

$$y_n^* = \frac{y_n + y_{n+1}}{2}, \quad z_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{2}, \quad y_0 = 0,$$

испуњаваће сва три услова (23), (24) и (25) ако низ y_n образујемо тако да буде

$$y_{n+1} = y_n + 2\,(y_n)^{p/(q+1)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad y_1 = 1, \tag{32}$$

где је p произвољан позитиван број $< q+1$.

Заиста, према (26) функција $A(t)$ има одређен извод за свако $t \neq 0$, а из (31) следи

$$|A'(t)| = \left|H'\left(\frac{t-y_n^*}{z_n}\right)\right| \leqslant \operatorname*{Max}_{-1\leqslant t\leqslant 1} |H'(t)|,$$

што казује да је услов (23) задовољен.

Даље је

$$J(\sigma) = \sigma \int_0^\infty e^{-\sigma t} A(t)\, dt =$$

$$= \sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu \int_{y_\nu}^{y_{\nu+1}} e^{-\sigma t} H\left(\frac{t-y_\nu^*}{z_\nu}\right) dt =$$

$$= \sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu^2\, e^{-\sigma y_\nu *} \int_{-1}^{+1} e^{-\sigma z_\nu t} H(t)\, dt,$$

па је према (29)

$$|J(\sigma)| \leqslant \frac{2^q K}{q!} \sigma^q \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu^{q+1}\, e^{-\sigma y_\nu *} (e^{\sigma z_\nu} - e^{-\sigma z_\nu}) =$$

$$\leqslant \frac{2^q K}{q!} \sigma^q \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu^{q+1} (e^{-\sigma y_\nu} - e^{-\sigma y_{\nu+1}}).$$

Из (32) међутим следи да је

$$z_n^{q+1} = y_n^p \quad \text{за} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а

$$z_0 = 1/2, \quad \text{јер је} \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1,$$

па је према томе

$$|J(\sigma)| \leqslant \frac{2^q K}{q!} \sigma^q \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu^p (e^{-\sigma y_\nu} - e^{-\sigma y_{\nu+1}}) + \frac{K \sigma^q}{2q!} =$$

$$\leqslant \frac{2^q K}{q!} \sigma^q \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\sigma y_\nu} (y_\nu^p - y_{\nu-1}^p) + \frac{K \sigma^q}{2q!}.$$

Како је овај последњи збир $p!/\sigma^p$ (види, напр. [5, стр. 82—83, образац 22]), то је

$$|J(\sigma)| \leqslant \frac{2^q p!}{q!} K \sigma^{q-p} + \frac{K}{2 \cdot q!} \sigma^q,$$

што казује да је и услов (24) задовољен ако само изаберемо p и q тако да буде

$$k = q - p. \tag{33}$$

Најзад, ако означимо са C апсолутни максимум функције $H(t)$ за $-1 \leqslant t \leqslant +1$ и ставимо

$$C = H(t^*),$$

тада се за

$$t_n = y_n^* + t^* z_n = y_n + (1+t^*) z_n = z_n^{(q+1)/p} + (1+t^*) z_n \tag{34}$$

и

$$T_n = A(t_n) = z_n H(t^*) = C z_n, \tag{35}$$

тачке са апсцисама t_n и ординатама $T_n = A(t_n)$ налазе на кривој

$$(T/C)^{(q+1)/p} + (1+t^*) \frac{T}{C} = t,$$

коју добивамо елиминацијом z_n из (34) и (35), а за коју важи

$$T \backsim C\, t^{p/(q+1)} = C\, t^{1-\varepsilon}, \quad t \to \infty.$$

Према томе је задовољена релација (25) ако за низ t_n узмемо вредности дате обрасцем (34) и ако ставимо

$$\varepsilon = \frac{q-p+1}{q+1}. \tag{36}$$

Из (33) и (36) видимо да заиста можемо изабрати k произвољно велико, а ε произвољно мало, ако само $q-p$ и q изаберемо довољно велико, али тако да им количник буде довољно мали. Уосталом, из (33) и (36) добивамо за p и q ове вредности:

$$p = \frac{k+1}{\varepsilon} - k - 1, \quad q = \frac{k+1}{\varepsilon} - 1,$$

а што је требало показати.

У наведеном поступку за конструкцију функције $A(t)$ је битно да низ y_n задовољава рекурентну релацију (32). Ова релација, међутим, је типа (22) става III, са

$$g(y) = y + 2\, y^{p/(q+1)},$$

тј. са

$$A(y) - A = 2, \quad L(y) = 1 \quad \text{и} \quad r = p/(q+1) < 1,$$

тако да су сви услови овога става задовољени, па је

$$y_n \backsim \left(2\,\frac{q-p+1}{q+1}\right)^{\frac{q+1}{q-p+1}} n^{\frac{q+1}{q-p+1}}, \quad n \to \infty .$$

Како ову релацију с обзиром на (36) можемо написати и у облику

$$y_n \backsim (2\,\varepsilon)^{1/\varepsilon}\, n^{1/\varepsilon}, \quad n \to \infty ,$$

то отуда и из (25) јасно видимо да y_n мора утолико брже да расте уколико су амплитуде функције $A(t)$ веће, и да би оно морало да расте брже од маког степена од n да би функција $A(t)$ могла местимично да се понаша као Ct.

ПОПИС ЛИТЕРАТУРЕ

[1] Бајрактаревић, М. — О конвергенцији низа (x_n) чији су чланови дефинисани једначином $x_{n+1} = f(x_n)$. *Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron.*, II. *Ser.*, 6 (1951), 201—209.

[2] Карамата, J. — О геометријској интерпретацији М. Миланковића конвергенције бесконачних редова. *Зборник радова Маш. инсш. САН* 1 (1951), стр. 125—134.

[3] Karamata, J. — Sur un mode de croissance régulière des fonctions. *Mathematica (Cluj)* 4 (1930), pp. 38—53.

[4] Karamata, J. — Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux. *Bull. de la Soc. Math. de France* LXI (1933), pp. 55—62.

[5] Карамата J. — Теорија и пракса Stieltjes-ова интеграла. Београд 1949.

[6] De Misès, R. und Pollaczek-Geiringer. — Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung. *Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechanik* 9 (1926), S. 58—62.

[7] Ostrowski, A. — Sur la convergence et l'estimation des erreurs dans quelques procédés de résolution des équations numériques. *Сборник посвященый памяти Д. А. Граве*, Москва (1940), с. 213—234.

[8] Pólya, G. u. Szegö, G. — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I. Berlin 1925.

[9] Поповић, Б. — Један став о асимптотским вредностима Laplace-ова интеграла. *„Глас" Срп. Акад. наука* (CLXXXV) 92 (1940), стр. 33—46.

ÜBER DAS ASYMPTOTISCHE VERHALTEN DER FOLGEN DIE DURCH ITERATION DEFINIERT SIND

J. KARAMATA

Anschliessend an einen in **[2]**, **[8**, Aufgaben 173—4] und **[7]** behandelten Satz wird hier die folgende Erweiterung gegeben.

Sei $f(x)$ in der Umgebung des Punktes $x=+0$ definiert und verhält sich daselbst die Funktion $x-f(x)$ regulär (vergl. **[3]** u. **[4]**), *d. h. es sei*

$$f(x)=x-a(x)\,x^k\,L(x),$$

wobei

$$a(x)\to a\neq 0;\quad x\to+0,$$

und

$$x\,L'(x)=o\{L(x)\},\quad x\to+0$$

gesetzt werden kann.

Sei weiter

$$a>0,\quad k>1$$

und x_0 genügend klein gewählt damit

$$f(x)>0\quad \textit{für}\quad 0<x\leqslant x_0,$$

und

$$\inf_{\xi\leqslant x\leqslant x_0}\{x-f(x)\}>0\quad \textit{für jedes}\quad 0<\xi<x_0$$

gilt, dann folgt aus

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad n=0,1,2,\ldots,$$

dass

$$x_n\backsim a^*\,n^{-k^*}\,L^*(1/n),\quad n\to\infty,$$

ist, wo

$$k^*=1/(k-1)\quad \textit{und}\quad a^*=(k^*/a)^{k^*}$$

ist, und wobei $x^{k^*}L^*(x)$ die inverse Funktion der Funktion $x^{k-1}L(x)$ bedeutet.