Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

РАДИВОЈЕ КАШАНИН

ИНТЕГРАЛИ ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНИХ ФУНКЦИЈА

1. Диференцијабилне функције

1.1. Као што је познато*, каже се да је функција $f(x, y)$ диференцијабилна у тачки (x, y) ако постоје $A(x, y)$ и $B(x, y)$ независно од h и k, тако да је

$$(1)\qquad \begin{gathered} f(x+h, y+k) - f(x, y) = h\,A(x, y) + k\,B(x, y) + \sigma\varepsilon, \\ \sigma = \sqrt{h^2+k^2}, \qquad \lim_{\sigma\to 0} \varepsilon = 0. \end{gathered}$$

Одатле непосредно излази да је функција $f(x, y)$ у истој тачки непрекидна и да има у овој делимичне изводе првог реда:

$$f_x'(x, y) = A(x, y), \quad f_y'(x, y) = B(x, y).$$

Ако је функција диференцијабилна у свакој тачки неког подручја, каже се једноставно да је диференцијабилна у том подручју.

Из саме егзистенције делимичних извода не може се закључити диференцијабилност. Може се закључити ако су делимични изводи непрекидни. Но, тај услов је и сувише строг. Диференцијабилност је осигурана и онда кад је само један од њих непрекидан, а други постоји. Ако функција $f(x, y)$ има у тачки (x, y) изводе $f_x'(x, y)$ и $f_y'(x, y)$, да би она у истој тачки била диференцијабилна, потребно је и довољно да буде

$$(2)\qquad \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sigma}\,[f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)] = 0.$$

Извесне теореме изведне под претпоставком да функција има непрекидне делимичне изводе $f_x'(x, y)$ и $f_y'(x, y)$ важе и под широм претпоставком да је она диференцијабилна; на пример, правило о диференцирању сложених функција. Циљ овога рада је да извесне интегралне теореме прошири на диференцијабилне функције, и то служећи се што елементарнијим средствима анализе. *Изричито претпостављамо да се ради о једнозначним функцијама.*

---

* *Р. Кашанин:* Виша математика I (3-ће изд. 1949), № 172.

1.2. На диференцијабилне функције наилази се и при разматрању функција једне комплексне променљиве. Доказаћемо, наиме, ово:

Да би функција

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$$

комплексне променљиве $z=x+iy$, *дефинисана у отвореном подручју* D, *имала у тачки* z *тог подручја извод, потребно је и довољно да функције* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *буду у тачки* (x,y) *диференцијабилне и и да за њих у тој тачки важе Коши-Риманове једначине*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Из дефиниције првог извода

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

излази, наиме,

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\cdot\Delta z+\gamma\cdot\Delta z,\qquad \lim_{\Delta z\to 0}\gamma=0. \tag{4}$$

Обрнуто, ако постоји $C(z)$, независно од Δz, тако да је

$$f(z+\Delta z)-f(z)=C(z)\cdot\Delta z+\gamma\cdot\Delta z,\qquad \lim_{\Delta z\to 0}\gamma=0,$$

онда функција $f(z)$ има извод $f'(z)=C(z)$. Ствар стоји, дакле, као и код функција једне реалне променљиве.

Раставићемо комплексне променљиве и функције у реалне и имагинарне делове:

$$z=x+iy,\qquad \Delta z=h+ik,\qquad \gamma=\varepsilon+i\eta,$$

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y),\qquad f'(z)=A(x,y)+i\,B(x,y).$$

Тада (4) даје у подручју D две једначине:

$$u(x+h,y+k)-u(x,y)=h\,A(x,y)-k\,B(x,y)+h\varepsilon-k\eta,$$

$$v(x+h,y+k)-v(x,y)=h\,B(x,y)+k\,A(x,y)+h\eta+k\varepsilon.$$

Ставимо ли $\sigma=+\sqrt{h^2+k^2}$, можемо писати

$$h\varepsilon-k\eta=\sigma\left(\frac{h}{\sigma}\varepsilon-\frac{k}{\sigma}\eta\right)=\sigma\varepsilon_1,$$

$$h\eta+k\varepsilon=\sigma\left(\frac{h}{\sigma}\eta+\frac{k}{\sigma}\varepsilon\right)=\sigma\varepsilon_2.$$

Како $\gamma = \varepsilon + i\eta \to 0$ кад $\sigma = |\Delta z| \to 0$, и како је $|h/\sigma| \leqslant 1$ и $|k/\sigma| \leqslant 1$, то $\varepsilon_1 \to 0$ и $\varepsilon_2 \to 0$ кад $\sigma \to 0$. Према томе, ако постоји $f'(z)$, биће

$$u(x+h, y+k) - u(x, y) = h A(x, y) - k B(x, y) + \sigma \varepsilon_1,$$

$$v(x+h, y+k) - v(x, y) = h B(x, y) + k A(x, y) + \sigma \varepsilon_2,$$

$$\lim_{\sigma \to 0} \varepsilon_1 = 0, \quad \lim_{\sigma \to 0} \varepsilon_2 = 0.$$

Одавде закључујемо, прво, да су $u(x, y)$ и $v(x, y)$ диференцијабилне функције, и друго да је

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -B(x, y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = B(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A(x, y).$$

Имамо, дакле, (3).

Узмимо обрнуто: функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ су у тачки (x,y) диференцијабилне и важе за њих једначине (3). Тада је

$$u(x+h, y+k) - u(x,y) = h u'_x(x, y) + k u'_y(x, y) + \sigma \varepsilon_1, \quad \lim_{\sigma \to 0} \varepsilon_1 = 0,$$

$$v(x+h, y+k) - v(x, y) = -h u'_y(x, y) + k u'_x(x, y) + \sigma \varepsilon_2, \quad \lim_{\sigma \to 0} \varepsilon_2 = 0.$$

На основи тога,

$$f(z+\Delta z) - f(z) = [u(x+h, y+k) - u(x, y)] + i[v(x+h, y+k) - v(x, y)] =$$

$$= u'_x(x, y)\Delta z - i u'_y(x, y)\Delta z + \sigma(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2),$$

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = u'_x(x, y) - i u'_y(x, y) + \frac{\sigma}{\Delta z}(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2).$$

како је $|\sigma/(\Delta z)| = 1$, то се одмах види да постоји $f'(z)$ и да је

$$f'(z) = u'_x(x, y) - i u'_y(x, y). \tag{5}$$

Тиме је наведено тврђење доказано.

1.3. Извешћемо једну општу особину диференцијабилних функција:

Ако су функције $f(x, y)$ и $g(x, y)$ диференцијабилне у затвореном подручју S, онда за сваки дати позитиван број ε постоји подела подручја S у под-подручја $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ове особине: у сваком од ових под-подручја S_k или на његовој контури постоји тачка (x_k, y_k) тако да је за свако x, y из S_k

$$(6) \quad \begin{cases} |[f(x, y) - f(x_k, y_k)] - [(x - x_k) f'_x(x_k, y_k) + (y - y_k) f'_y(x_k, y_k)]| < \varepsilon \sigma_k, \\ |[g(x, y) - g(x_k, y_k)] - [(x - x_k) g'_x(x_k, y_k) + (y - y_k) g'_y(x_k, y_k)]| < \varepsilon \sigma_k, \\ (\sigma_k = +\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}). \end{cases}$$

Доказ је ово. Поделимо подручје S еквидистантним правима паралелним x- и y-осовини у делове. Ако том поделом постигнемо да релације (6) буду испуњене, ствар је у реду. Ако у неком од ових делова бар једна од тих релација није испуњена, поделићемо га на исти начин у делове. Итд.

Доћи ћемо тако до низа подручја $S'_1, S'_2, S'_3, \ldots$, који тежи ка некој граничној тачки (x_0, y_0) у подручју S, а у којима наше тврђење не важи. Према дефиницији диференцијабилности, постоји око те тачке подручје S' тако да је за сваку тачку (x, y) из S'

$$|[f(x,y)-f(x_0,y_0)]-[(x-x_0)f'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f'_y(x_0,y_0)]|<\varepsilon\sigma_0,$$

$$|[g(x,y)-g(x_0,y_0)]-[(x-x_0)g'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)g'_y(x_0,y_0)]|<\varepsilon\sigma_0.$$

Међутим, ако узмемо m_0 довољно велико, сва подручја S'_m код којих је $m > m_0$ лежаће у S' те ће ове две неједначине важити и за те S'_m, што је у противречности с претпоставком да у њима наше тврђење не важи.

Јасно је да се ова особина може пренети и на три, четири,.... функције (коначан скуп њих). Наравно да важи и за једну функцију.

2. Криволиниски интеграл

2.1. Доказаћемо овај став:

Претпоставке: 1° *Функције* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *диференцијабилне су у отвореном подручју* D;

2° *У* D *је* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$;

3° *Затворена Жорданова крива линија* K *лежи у* D *и може се ректифицирати;*

4° *Затворено подручје* (K), *чија је контура* K, *део је подручја* D *и може се разложити у коначно много подручја нормалних и с обзиром на* x- *и с обзиром на* y-*осовину.* *

Тврђење:

$$\int_K P\,dx + Q\,dy = 0. \tag{7}$$

Доказ је сличан класичном доказу који је дао Гурса за Кошијеву теорему.

Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Према **1.3** поделићемо (K) у n под-подручја у којима важи (6); означићемо њихове контуре са C_k. Растојање између правих којима је подела извршена нека буде δ. Узећемо поделу тако фином да при том буде изведено и разлагање предвиђено у претпоставци 4°. На основи претпоставке 1°, можемо на $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ применити (6):

* Подручје је нормално с обзиром на x-осовину ако му контуру чине праве $x=a$ и $x=b$ и криве $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, где су функције $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрекидне за $a < x < b$ и $f_1(x) < f_2(x)$. Аналогно за y-осовину.

$$P(x,y) = P(x_k, y_k) + (x - x_k)\, P'_x(x_k, y_k) +$$
$$+ (y - y_k)\, P'_y(x_k, y_k) + \varepsilon_k \sigma_k, \quad |\varepsilon_k| < \varepsilon;$$
$$Q(x,y) = Q(x_k, y_k) + (x - x_k)\, Q'_x(x_k, y_k) +$$
$$+ (y - y_k)\, Q'_y(x_k, y_k) + \eta_k \sigma_k, \quad |\eta_k| < \varepsilon.$$

Како су, на основи претпоставке 1^0, функције $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ на C_k непрекидне, то, на основи претпоставке 3^0, постоје криволиниски интеграли

$$\int_{C_k} P(x,y)\, dx = P(x_k, y_k) \int_{C_k} dx + P'_x(x_k, y_k) \int_{C_k} (x - x_k)\, dx +$$
$$+ P'_y(x_k, y_k) \int_{C_k} (y - y_k)\, dx + \int_{C_k} \varepsilon_k \sigma_k\, dx,$$
$$\int_{C_k} Q(x,y)\, dy = Q(x_k, y_k) \int_{C_k} dy + Q'_x(x_k, y_k) \int_{C_k} (x - x_k)\, dy +$$
$$+ Q'_y(x_k, y_k) \int_{C_k} (y - y_k)\, dy + \int_{C_k} \eta_k \sigma_k\, dy.$$

Међутим је

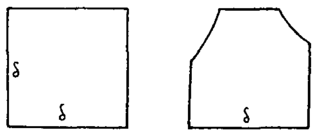
$$\int_{C_k} dx = 0, \quad \int_{C_k} dy = 0;$$
$$\int_{C_k} (x - x_k)\, dx = \int_{C_k} d\, 1/2\, (x - x_k)^2 = 0,$$
$$\int_{C_k} (y - y_k)\, dy = \int_{C_k} d\, 1/2\, (y - y_k)^2 = 0.$$

Затим је, на основи претпоставке 3^0,

$$\left| \int_{C_k} \varepsilon_k \sigma_k\, dx \right| < \varepsilon\, \delta \sqrt{2}\, l_k, \quad \left| \int_{C_k} \eta_k \sigma_k\, dy \right| < \varepsilon\, \delta \sqrt{2}\, l_k,$$

где је l_k дужина контуре C_k (сл. 1). Напослетку, на основи претпоставке 4^0, над подручјима (K) и (C_k) може се извршити квадратура, а површина последњег је

$$p_k = \int_{C_k} x dy = -\int_{C_k} y dx.$$



Сл. 1

Према томе је

$$\int_{C_k} P(x,y)\, dx = -p_k P'_y(x_k, y_k) + \bar{\varepsilon}_k\, \delta \sqrt{2}\, l_k, \quad |\bar{\varepsilon}_k| < \varepsilon;$$
$$\int_{C_k} Q(x,y)\, dy = \quad p_k Q'_x(x_k, y_k) + \bar{\eta}_k\, \delta \sqrt{2}\, l_k, \quad |\bar{\eta}_k| < \varepsilon.$$

Сабирањем добивамо

$$(8)\quad \begin{cases} \int\limits_{C_k} P\,dx+Q\,dy=p_k\,[Q'_x(x_k,y_k)-P'_y(x_k,y_k)]+2\,\alpha_k\,\delta\,\sqrt{2}\,l_k, \\ |\alpha_k|<\varepsilon. \end{cases}$$

Ако је испуњена и претпоставка 2°, биће

$$\int\limits_{C_k} P\,dx+Q\,dy=2\sqrt{2}\,\delta\,l_k\alpha_k.$$

Но свакако је

$$l_k\leqslant 4\,\delta+s_k,$$

где је s_k дужина оног дела криве K који учествује у контури C_k. Према томе је

$$\int\limits_{C_k} P\,dx+Q\,dy=2\sqrt{2}\,(4\,\delta^2+\delta\,s_k)\,\bar{\alpha}_k,\quad |\bar{\alpha}_k|<\varepsilon.$$

Саберемо ли ове једначине од $k=1$ до $k=n$, поништиће се на левој страни интеграли по трансверзалама и добићемо

$$\int\limits_{C_K} P\,dx+Q\,dy=2\sqrt{2}\,(4\,n\,\delta^2+\delta s)\,\alpha,\quad |\alpha|<\varepsilon,$$

где је s дужина контуре K. Број $n\,\delta^2$ је збир површина квадрата који леже у (K) и на контури K. Он је сигурно мањи од површине c^2 једног довољно великог квадрата у ком се налази (K); онда је и $\delta<c$. Према томе је

$$\Big|\int\limits_{K} P\,dx+Q\,dy\Big|<2\,\sqrt{2}\,(4c^2+cs)\,\varepsilon,$$

где су c и s одређени бројеви. И тако, посматрани криволиниски интеграл је, по апсолутној вредности, мањи од сваког унапред датог позитивног броја. Он је, дакле, нула.

Тиме је тврђење (7) доказано.*

Уобичајеним поступком може се изведени став пренети и на вишеструко повезана подручја.

2.2. Из става **2.1** лако је извести ово:

Претпоставке: 1° *Функције* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *диференцијабилне су у отвореном једноструко повезаном подручју* D;

2° *У* D *је* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,

3° Γ *и* Γ' *су једноставне Жорданове криве*

* Претпоставка 2° тврђења интервенише у поништавања збира првих чланова десне стране једначина (8). Стога је довољно претпоставити: *у* D *је* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, *осим евентуално у једном скупу тачака чија је мера нула.*

линије које спајају тачке M и N, леже у D и могу се ректифицирати;

4⁰ *Затворено подручје* (K), *чија је контура* $K=\Gamma+\Gamma'$, *део је подручја* D *и може се разложити у коначно много подручја нормалних и с обзиром на* $x-$ *и с обзиром на* $y-$*осовину.*

Тврђење:

$$\int_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy=\int_{\Gamma'} P\,dx+Q\,dy\,.$$

То значи да тада интеграл зависи само од почетне и завршне тачке.

2.3. Став **2.1** допушта овакву инверзију:

Претпоставке: 1^0 *Функције* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *диференцијабилне су у отвореном подручју* D;

2^0 *Затворена Жорданова крива линија* K *лежи у* D *и може се ректифицирати;*

3^0 *Затворено подручје* (K), *чија је контура* K, *може се разложити у коначно много подручја нормалних и с обзиром на* $x-$ *и с обзиром на* $y-$*осовину;*

4^0 *Ма како изабрали* K *(уз услове* 2^0 *и* 3^0*), увек је*

$$\int_K P\,dx+Q\,dx=0\,.$$

Тврђење: *Ако је дато* $\eta>0$, *у сваком под-подручју* D' *подручја* D *има бар једна тачка* (x',y') *у којој је*

$$|\,Q'_x(x',y')-P'_y(x',y')\,|<\eta\,. \tag{9}$$

Наиме, доказујући **2.1**, дошли смо, под садашњим претпоставкама 1^0, 2^0 и 3^0, до једначине (8). Поделу ћемо извршити тако фином да се у изабраном под-подручју D' налази један квадрат C_k. У њему, према (8), постоји тачка (x_k,y_k) тако да је

$$\int_{C_k} P\,dx+Q\,dy=\delta^2\,[Q'_x(x_k,y_k)-P'_y(x_k,y_k)]+8\sqrt{2}\,\delta^2\,\alpha_k\,,\qquad |\alpha_k|<\varepsilon\,,$$

јер је сад $p_k=\delta^2$, $l_k=4\,\delta$. Међутим, према садашњој претпоставци 4^0, криволиниски интеграл на левој страни је нула. Дакле,

$$Q'_x(x_k,y_k)-P'_y(x_k,y_k)=-8\sqrt{2}\,\alpha_k,\qquad |\alpha_k|<\varepsilon\,.$$

Узмемо ли $\varepsilon<\eta/8\sqrt{2}$, тврђење је доказано.

Из (8) не излази да је $Q'_x(x_k,y_k)=P'_y(x_k,y_k)$. Још мање се сме тврдити да је у свакој тачки подручја D, под наведеним претпоставкама, $Q'_x=P'_y$.

2.4. H. Loomann у својој расправи „Über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen" (*Gött. Nachr.* 1923, p. 97-108) доказао је ово:

„Нека буду $p(x,y)$ и $q(x,y)$ две једнозначне у G дефинисане функције од x и y које задовољавају ове услове а) $p(x,y)$ и

$q(x,y)$ су непрекидне у (x,y); б) у свакој тачки постоје $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial q}{\partial x}$; в) изузевши једног скупа мере нула важи $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$. Тада је

$$\int p\,dx+q\,dy=0$$

дуж сваког оног правоугаоника са странама паралелним осовинама чија унутрашњост и контуре падају у G".

Претпоставке су овде шире него у **2.1**: не тражи се диференцијабилност функција p и q, већ само егзистенција извода $\partial p/\partial y$ и $\partial q/\partial x$ и непрекидност функција p и q. Но, резултат је ужи него онај у **2.1**: код Ломана је K специјална крива линија, наиме правоугаоник чије су стране паралелне координатним осовинама.

3. Коши-Риманове једначине

3.1. У отвореном подручју D функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ нека буду диференцијабилне и нека у свакој тачки тог подручја задовољавају Коши-Риманове једначине

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{10}$$

Ако у диференцијабилним функцијама $u(x,y)$ и $v(x,y)$ пређемо са правоуглих координата x и y на поларне ρ и φ, можемо због диференцијабилности применити правило о диференцирању сложених функција:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\rho\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi+\rho\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi, \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial x}\sin\varphi+\rho\frac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi.$$

Одавде се види да u и v имају изводе по ρ и φ.

Променимо ли ρ и φ за $\Delta\rho$ и $\Delta\varphi$, промениће се x и y за h и k, а ако $\Delta\rho$ и $\Delta\varphi$ теже ка нули, тежиће и h и k ка нули и обрнуто. Према томе, ако су u и v диференцијабилне функције од x и y, биће то и с обзиром на ρ и φ.

Даље је

$$\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}-\frac{\partial v}{\partial \varphi}=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\varphi+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin\varphi,$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\varphi-\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin\varphi.$$

Према томе, услов (10) повлачи за собом

$$(10^{\text{bis}}) \qquad \rho\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial \rho},$$

и обрнуто.

На тај начин, еквиваленција једначина (10) и (10^{bis}) изведена је под претпоставком о диференцијабилности функција $u(x,y)$ и $v(x,y)$, а не о непрекидности њихових извода првог реда.

Лако се директним рачуном уверити о овом: ако функција $g(x,y)$ има у подручју D непрекидне делимичне изводе првог и другог реда и при том је

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0,$$

а функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ су у истом подручју диференцијабилне функције и задовољавају Коши-Риманове једначине (10), онда су и функције

$$(11) \qquad \begin{cases} P(x,y)=u\dfrac{\partial g}{\partial y}-v\dfrac{\partial g}{\partial x}, \\[2ex] Q(x,y)=u\dfrac{\partial g}{\partial x}+v\dfrac{\partial g}{\partial y} \end{cases}$$

у D диференцијабилне и задовољавају Коши-Риманове једначине

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x},$$

3.2. На основи **2.1** излази одмах ово:

Претпоставке: 1^0 *Функције* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *диференцијабилне су у отвореном подручју* D *и задовољавају у њему Коши-Риманове једначине* (10);

2^0 *Затворена Жорданова крива линија* K *лежи у* D *и може се ректифицирати;*

3^0 *Затворено подручје* (K), *чија је контура* K, *део је подручја* D *и може се разложити у коначно много под-подручја нормалних и с обзиром на* x – *и с обзиром на* y – *осовину.*

Тврђење:

$$(12) \qquad \int_K u\,dx-v\,dy=0, \quad \int_K v\,dx+u\,dy=0.$$

Тако је (12) изведено претпостављајући диференцијабилност функција $u(x,y)$ и $v(x,y)$, а не непрекидност њихових извода првог реда.

Уопштавање на вишеструко повезана подручја евидентно је.

3.3. Пошавши од оног што смо рекли у **2.1** за (11), извешћемо ово:

Претпоставке: 1° *Функције* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *диференцијабилне су у отвореном подручју* D *и задовољавају у њему Коши-Риманове једначине* (10);

2° *Затворена Жорданова крива линија* K *лежи у* D *и може се ректифицирати*;

3° *Затворено подручје* (K), *чија је контура* K, *део је подручја* D *и може се разложити у коначно много подручја нормалних и с обзиром на* x – *и с обзиром на* y – *осовину.*

Тврђење: *У свакој тачки* (ξ, η) *из* (K) *која не лежи на* K *је*

$$(13)\begin{cases} 2\pi u(\xi,\eta) = \\ = \oint\limits_K \dfrac{[(x-\xi)v(x,y)-(y-\eta)u(x,y)]\,dx+[(y-\eta)v(x,y)+(x-\xi)u(x,y)]\,dy}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \\ 2\pi v(\xi,\eta) = \\ = \oint\limits_K \dfrac{[(x-\xi)v(x,y)-(y-\eta)u(x,y)]\,dy-[(y-\eta)v(x,y)+(x-\xi)u(x,y)]\,dx}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}. \end{cases}$$

Узећемо, наиме у (11)

$$g(x, y) = -\log r, \quad r = +\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

јер ова функција задовољава услове у D осим у тачки (ξ, η). Опишемо ли око те тачке круг γ тако да он лежи у (K), моћи ћемо на функције P и Q из (11) применити (12):

$$\oint\limits_K P\,dx - Q\,dy = \oint\limits_\gamma P\,dx - Q\,dy,$$

$$\oint\limits_K Q\,dx + P\,dy = \oint\limits_\gamma Q\,dx + P\,dy.$$

Међутим је

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x-\xi}{r^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{y-\eta}{r^2},$$

па је, према (11), лако видети да су

$$P\,dx - Q\,dy \quad \text{и} \quad Q\,dx + P\,dy$$

баш изрази који стоје под интегралом у (13).

На кругу γ они ће се упростити, јер је ту

$$x-\xi = R_0\cos\psi, \quad y-\eta = R_0\sin\psi, \quad r = R_0;$$

$$dx = -R_0\sin\psi\,d\psi, \quad dy = R_0\cos\psi\,d\psi.$$

Према томе, на контури γ имамо

$$P\,dx - Q\,dy = u(x, y)\,d\psi, \quad Q\,dx + P\,dy = v(x, y)\,d\psi.$$

Дакле,

$$\int_\gamma P\,dx - Q\,dy = \int_0^{2\pi} u(\xi + R_0 \cos\psi,\ \eta + R_0 \sin\psi)\,d\psi,$$

$$\int_\gamma Q\,dx + P\,dy = \int_0^{2\pi} v(\xi + R_0 \cos\psi,\ \eta + R_0 \sin\psi)\,d\psi.$$

Но, како су, због диференцијабилности, $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрекидне функције у D, можемо R_0 узети тако мало да буде

$$|u(\xi + R_0 \cos\psi,\ \eta + R_0 \sin\psi) - u(\xi, \eta)| < \varepsilon,$$
$$|v(\xi + R_0 \cos\psi,\ \eta + R_0 \sin\psi) - v(\xi, \eta)| < \varepsilon,$$

ма како изабрали $\xi > 0$. На основи тога је

$$\left|2\pi u(\xi, \eta) - \oint_K P\,dx - Q\,dy\right| < 2\pi\varepsilon,$$

$$\left|2\pi v(\xi, \eta) - \oint_K Q\,dx + P\,dy\right| < 2\pi\varepsilon.$$

Како ε може бити произвољно мален позитиван број, то је тиме (13) доказано.

3.4. *Ако у отвореном подручју D диференцијабилне функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ задовољавају Коши-Риманове једначине, оне у свакој тачки тог подручја имају непрекидне изводе по x и y свих редова.*

Наиме, око ма које тачке (ξ, η) отвореног подручја D можемо повући криву која ће задовољавати услове из **3.3**, па написати формуле (13). У интегралима на десној страни сматраћемо ξ и η као параметре. Одмах се види да функције под интегралима имају непрекидне изводе по ξ и η свих редова и да се може применити правило о диференцирању под знаком интеграла. Тиме је тврђење доказано.

3.5. Став **3.2** допушта овакву инверзију:

Претпоставке: 1^0 *Функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ су непрекидне у отвореном подручју D;*

2^0 *Затворена Жорданова крива линија K лежи у D и може се ректифицирати;*

3^0 *Затворено подручје (K), чија је контура K, може се разложити у коначно много подручја нормалних и с обзиром на x – и с обзиром на y – осовину;*

4^0 *Ма како изабрали K (уз услове 2^0 и 3^0), увек је*

$$\int_K u\,dx - v\,dy = 0, \quad \int_K v\,dx + u\,dy = 0.$$

Тврђење: *Функције* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *су у* D *диференцијабилне и задовољавају Коши-Риманове једначине* (10).

Јер на основи претпоставке 4^0, интегралима

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u\,dx - v\,dy, \quad G(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v\,dx + u\,dy$$

једнозначно су дефинисане у D функције $F(x, y)$ и $G(x, y)$, за које, према претпоставци 1^0, имамо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -v; \quad \frac{\partial G}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = u.$$

Одмах се види да је

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial x},$$

тј. да функције F и G задовољавају Коши-Риманове једначине. Осим тога, како су u и v, према претпоставци 1^0, непрекидне функције, сигурни смо да су F и G диференцијабилне функције. На основи **2.4** постоје, дакле, непрекидни изводи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}.$$

Одавде излази да су функције u и v диференцијабилне и да је

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

што смо и тврдили.

Кад су, дакле, испуњени услови $1^0 - 4^0$, можемо на функције u и v применити став **2.4**.

3.6. Узевши у (13) за K круг са средиштем у тачки $M_o(x_o, y_o)$ који лежи у подручју D, добиће се за сваку тачку $M(\xi, \eta)$ из унутрашњости тог круга познати развоји у конвергентне бесконачне редове

$$(14) \quad \begin{cases} u(\xi, \eta) = a_o + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi)\,\rho^\nu, \\ v(\xi, \eta) = -b_o + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \sin \nu\varphi - b_\nu \cos \nu\varphi)\,\rho^\nu, \end{cases}$$

где је

$$\xi = x_o + \rho \cos \varphi, \quad \eta = y_o + \rho \sin \varphi.$$

Исто тако, за сваку тачку $M(\xi, \eta)$ из кружног прстена око тачке $M_0(x_0, y_0)$ који лежи у D добивају се развоји

$$
(15)\qquad \begin{cases} u(\xi,\eta) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} (a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi)\,\rho^\nu . \\ v(\xi,\eta) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} (a_\nu \sin\nu\varphi - b_\nu \cos\nu\varphi)\,\rho^\nu . \end{cases}
$$

Све то под претпоставком да су функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ у D диференцијабилне и да задовољавају Коши-Риманове једначине (10).

Под истим претпоставкама, на основи **3.4**, закључујемо да функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ задовољавају Лапласову једначину

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

3.7. Хармониска функција $U(x, y)$ дефинише се овако: постоје непрекидни делимични изводи првог и другог реда и при томе је

$$U''_{xx} + U''_{yy} = 0 .$$

На основи **3.4** види се да у овој дефиницији има више услова него што је потребно. Можемо, наиме, дефинисати овако: За функцију $U(x, y)$ рећи ћемо да је у отвореном подручју D хармониска ако задовољава ове услове: 1^0 она има у D диференцијабилне изводе првог реда U'_x и U'_y (према томе, постоје U''_{xx}, U''_{xy}; U''_{yx}, U''_{yy}); 2^0 у свакој тачки подручја D је

$$U''_{yx} = U'_{xy}\,, \qquad U''_{yy} = -U''_{xx} .$$

Јер, ако ставимо $u = U'_x$ и $v = -U'_y$, биће функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ у подручју D диференцијабилне и задовољаваће Коши-Риманове једначине, па можемо применити **3.4**: и изводи другог реда функције $U(x, y)$ су непрекидни.

4. Функције комплексне променљиве

4.1. На основи **1.2** и (14) одмах се може извести да се функција $f(z)$, ако има извод у свакој тачки неког отвореног подручја D, може у једном кругу око сваке тачке z_0 тог подручја развити у цео ред по $z - z_0$, тј. да је аналитичка. Одатле излази да у свакој тачки подручја D она има изводе свих редова ако има у њима извод првог реда; уосталом, ово излази и из (5), на основи **3.4**.

Применивши (15), добићемо за $f(z)$ Лоранов ред, па онда можемо увести и појам сингуларних тачака и њихово разврставање. Тако се може изградити цео диференцијални рачун комплексних функција и без појма интеграла тих функција.

Кад се уведе појам интеграла и код комплексних функција, (12) даје Кошијев став, (13) Кошијев интеграл, а **3.5** Морерин став. Подлога за све то је став **2.1**.

4.2. Ломан, у напред цитираној расправи (в. **2.4**) доказао је ово: Ако су функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ у отвореном подручју D непрекидне и имају изводе

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

који у D (осим евентуално у једном скупу мере нула) задовољавају Коши-Риманове једначине (10), функција $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ је у D аналитичка. За извођење овог става Ломан, а после њега и остали*, претпостављају да је већ изграђен интегрални рачун комплексне променљиве (дефиниција интеграла, Коши-Гурсаов став, Морерин став) и служе се теоријом скупова и Лебеговим интегралом (осим К. Мајера**, који место Лебегова интеграла употребљава виша средства из теорије комплесних функција).

Према **1.2**, из Ломанова става излази сигурно ово:

Ако су функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ у отвореном подручју D непрекидне и имају изводе

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

који у D задовољавају Коши-Риманове једначине (10), *функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$ су у D диференцијабилне.*

Кад би се овај став могао непосредно и што елементарније извести, онда би Ломанов став био брза последица онога што смо рекли у **1.2**. У основи, требало би из претпоставки Ломанова става извести да важи (2) у **1.1**.

---

* В. и *D. Menchoff:* Les conditions de monogénéité (Paris, Hermann et C[ie]) 1936.

** *K. Meier:* Zum Satz von Loomann-Menchoff (*Comm. Math. Helvetici* **25** (1951), p. 181—195).

LES INTÉGRALES DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

par
R. KAŠANIN

On admet comme connu qu'une fonction $f(x, y)$ est dite différentiable au point (x, y) lorsqu'il existe des fonctions $A(x, y)$ et $B(x, y)$ telles qu'on ait, indépendamment de h et k,

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=h\,A(x, y)+k\,B(x, y)+\sigma\,\varepsilon,$$

$$\sigma=\sqrt{h^2+k^2}, \quad \lim_{\sigma\to} \varepsilon=0.$$

Il s'ensuit directement que la fonction $f(x, y)$ est continue au même point et possède en ce point les dérivées partielles du premier ordre

$$f'_x(x, y)=A(x, y), \quad f'_y(x, y)=B(x, y).$$

Le but de la présente note est d'étendre certains théorèmes intégraux aux fonctions différentiables en ne faisant intervenir que les théorèmes d'analyse les plus élémentaires. La condition essentielle est que les fonctions soient uniformes.

L'énoncé du théorème fondamental est donné dans **2.1**:

Hypothèses: 1° Les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables dans le domaine ouvert D;

2° Dans le domaine D on a $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$;

3° La courbe fermée K de Jordan est située dans D et est rectifiable;

4° Le domaine fermé (K), ayant pour contour K, est une partie du domaine D et est décomposable en un nombre fini de domaines normaux à la fois par rapport à x et par rapport à y*.

On affirme qu'on a alors

$$\int_K P\,dx+Q\,dy=0.$$

La démonstration de cette affirmation est semblable à la démonstration classique du théorème de Cauchy donnée par Goursat. On ne suppose pas la continuité des dérivées.

En admettant cela, si les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont différentiables dans le domaine ouvert D et y satisfont les équations de Cauchy-Riemann, on aura, avec les mêmes conditions sur la courbe K et le domaine (K),

$$\int_K u\,dx-v\,dy=0, \quad \int_K v\,dx+u\,dy=0,$$

sans supposer la continuité des dérivées.

* Le domaine est dit normal par rapport à l'axe des x si son contour est formé par les droites $x=a$ et $x=b$ et les courbes $y=f_1(x)$ et $y=f_2(x)$, les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant continues pour $a<x<b$ et $f_1(x)<f_2(x)$. De même pour l'axe des y.

Pour ces mêmes fonctions sont valables les formules (13), données dans **3.3**, à l'aide desquelles on parvient aux conclusions suivantes: si dans le domaine ouvert D les fonctions différentiables $u(x, y)$ et $v(x, y)$ satisfont les équations de Cauchy-Riemann, elles possèdent en chaque point de ce domaine des dérivées continues par rapport à x et y de tous les ordres.

En prenant dans (13) pour K un cercle ayant son centre au point $M_0(x_0, y_0)$, situé dans le domaine D, on aura pour chaque point $M(\xi, \eta)$ situé à l'intérieur de ce cercle, des développements en séries infinies convergentes connus (14), et pour l'anneau circulaire des développements (15), — tout ceci avec la supposition que les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont différentiables dans D et satisfont les équations de Cauchy-Riemann.

Ces considérations permettent de définir une fonction harmonique de la manière suivante: une fonction $U(x, y)$ sera dite harmonique dans le domaine ouvert D si elle satisfait les conditions suivantes:

1⁰ elle possède dans D les dérivées différentiables du premier ordre, U'_x et U'_y (par conséquent existent les $U''_{xx}, U''_{xy}, U''_{yx}, U''_{yy}$);

2⁰ en chaque point de D on a

$$U''_{yx} = U''_{xy}, \quad U''_{yy} = -U''_{xx}.$$

Les résultats précédents sont immédiatement applicables aux fonctions des variables complexes en vertu de la propriété (**1.2**) suivante:

Pour que la fonction d'une variable complexe $z = x + iy$,

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y),$$

définie dans le domaine ouvert D, ait au point z de ce domaine une dérivée, il faut et il suffit que les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ soient au point x, y différentiables et qu'en ce point les équations de Cauchy-Riemann soient valables pour ces dernières.

On peut de cette façon développer tout le calcul différentiel des fonctions complexes (existence des dérivées d'ordres supérieurs; séries de Taylor et de Laurent, notion de points singuliers) sans même la notion de l'intégrale de ces fonctions. En introduisant la notion de l'intégrale aussi pour les fonctions complexes, la formule (12) donne le théorème de Cauchy, la formule (13) l'intégrale de Cauchy, et **3.5** le théorème de Morera. Tout ceci repose sur le théorème **2.1**.