Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Acad. Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

МИЛОШ РАДОЈЧИЋ

О ПРОБЛЕМУ РИМАНОВИХ ПОВРШИ

1. *Риманова површ и Риманова област.* — Реч је о конформном пресликавању области које припадају Римановим површима. Занимаће нас питање руба тих области. Ограничићемо се на конформно пресликавање *једноструко повезаних отворених области*. Но пре него што пређемо на предмет овог излагања утврдимо извесне називе, не износећи строгих дефиниција. Разликоваћемо наиме *Риманову* (или *риманску*) *површ** од макакве *вишелисне области*. Та се разлика увек не поставља јасно, али често претпоставља.

Имајући на уму да се листовима називају извесне области које нигде не покривају раван више од једанпут, ми ћемо сваку отворену или затворену област разастрту над једном равни у смислу Риманових површи, — област за коју можемо сматрати и да настаје аналитичким продужавањем неке мултиформне аналитичке функције — називати напросто *Римановом* или *вишелисном облашћу*. Опште посматрано, таква област покрива раван негде више, негде мање пута, а неге ни једанпут. У том смислу *једнолисне области* су посебна врста Риманових области.

Римановом површи називаћемо пак у овом излагању вишелисну област само ако се она не може сматрати „правим" делом друге (шире) вишелисне облати (ако се дакле, међу осталим, аналитичко продужавање изврши до крајњих могућности).

Према томе, сваку вишелисну област можемо сматрати делом неке Риманове површи.** Обичне тачке и алгебарске завојне тачке су увек унутарње тачке Риманових површи, трансцендентне завојне тачке образују (ако их има) њихове рубове.***

---

* Употребљавамо реч *површ* за геометриски лик који се у нас обично назива површином (surface, Fläche) а реч *површина* за величину или меру површи (aire, Flächeninhalt).

** Под Римановом површи подразумева се често макаква област екситенције неке мултиформне аналитичке функције, у којој је ова униформа, дакле макаква вишелисна област. Оправдана је и таква употреба назива, но тада би оно што сад називамо „Римановом површи" требало друкчије назвати (нпр. „потпуном Римановом површи", за разлику од осталих, „непотпуних").

*** *Завојна тачка* или *тачка гранања* = Windungspunkt (Verzweigungspunkt), point de ramification.

2. *Основни став конформног пресликавања.* — Пођимо од тзв. основног става конформног пресликавања једнолисних, једноструко повезаних отворених области. Њиме се изражава неограничена могућност конформног пресликавања таквих области међу собом, под условом да разликујемо *три врсте* тих области: 1. области чији руб садржи више од једне тачке, 2. области чији се руб састоји само из једне тачке и 3. област која нема руба, која се дакле састоји из целе бројне равни укључивши и бесконачно далеку тачку. Постоји наиме став који потиче још од Римана [*B. Riemann*, **1**, 1851], али је тек доцније потпуно доказан [*D. Hilbert*, **1—3**, 1900—1909; *R. Courant*, **1—4**, 1910—1914; *P. Koebe*, **1**, **2**, 1912—1915; *C. Carathéodory*, **1**, **2**, 1912—1914 и др.] и по коме се *свака једнолисна једноструко повезана отворена област може пресликати обострано једнозначно и конформно на сваку другу такву област исте врсте.*

У ствари доказује се прво став по коме се *свака једнолисна једноструко повезана отворена област равни може пресликати обострано једнозначно и конформно* на једну од три отворене области w-равни:

на кружну област $|w| < R < \infty$

или на целу отворену раван $|w| < \infty$

или на целу затворену раван $|w| \leqslant \infty$

према томе да ли се њен руб састоји из више тачака, или само из једне тачке, или ниједне. Из овог става следује претходни непосредно. Једва је потребно споменути да у другом и трећем случају пресликавања врше линеарне функције. Само у првом случају функције које врше пресликавања су опште природе.

3. *Конформно пресликавање вишелисних једноструко повезаних области.* — За вишелисне једноструко повезане отворене области може се унапред очекивати аналоган став, уопштење претходног. Заиста постоји [*Koebe*, **3**, **4**, 1909; *Courant*, **1—4**, 1910—1914] следећи општи став:

Свака вишелисна једноструко повезана отворена област може се пресликати обострано једнозначно и конформно на једнолисну једноструко повезану отворену област.

Али питање: којој ће од три поменуте врсте припадати та једнолисна област, није потпуно решено ни до данас. Свакако, постоје извесни лаки случајеви кад се одговор на ово питање може одмах дати. Можемо их скупити у следећа два става. Први се односи на области које можемо сматрати деловима затворених, тј. алгебарских једноструко повезаних риманских површи; тада је лако разликовати којој ће од три врсте припадати уочена вишелисна област. Други се односи на извесне области које не можемо сматрати деловима затворених риманских површи, него само отворених.

I. Свака вишелисна једнострyко повезана отворена област која припада једној затвореној Римановој површи може се пресликати обострано једнозначно и конформно на унутрашњост круга, или на целу отворену бројну раван, или на целу затворену бројну раван, или на целу затворену бројну раван, према томе да ли се њен руб састоји из више тачака, или из само једне тачке, или ни из једне.

II. Свака вишелисна једнострyко повезана отворена област која се може сматрати делом само једне отворене једнострyко повезане Риманове површи, али која има рубних тачака међу унутарњим тачкама те површи, може се пресликати обострано једнозначно и конформно на унутрашњост једног круга.

Како је садржај првог става једноставна последица споменутога Риманова става, докажимо само други став. Претпоставимо да унутрашња тачка α дотичне Риманове површи припада рубу уочене вишелисне области Δ. Како се та површ може конформно пресликати на неку равну област B у z-равни, а површ је отворена, област B има известан руб b (који се састоји из једне или више тачака). Но α је унутарња тачка површи, дакле одговара јој унутарња тачка a области B. Област Δ је једноструко повезана, дакле одговара јој у z-равни једноструко повезана област D, садржана у B и чији руб d садржи како тачку a тако руб b. Дакле руб d садржи најмање две тачке и према томе D, дакле и Δ, може се конформно пресликати на унутрашњост једног круга.

4. *Проблем типа Римановиx површи.* — Према претходном, тешкоће чине само области отворених риманских површи које немају рубних тачака површи, тј. *„целе" отворене Риманове површи.* Питање конформног пресликавања вишелисних једноструко повезаних области, које још чека на своје потпуно решење гласи дакле: *када ће се једнострyко повезана отворена Риманова површ пресликати на круг а када на целу отворену раван?* Другим речима: *када ће се отворена Риманова површ моћи сматрати као површ функције инверсне функцији мероморфној у целој отвореној равни, а када као површ функције инверсне функцији мероморфној у неком кругу и којој је тај круг есенцијална линија?*

Кад се Римамова површ пресликава (обострано једнозначно и конформно) на унутрашњост круга кажемо да је та површ *хиперболна* или *хиперболног типа;* кад се пресликава на целу отворену раван кажемо да је *параболна* или *параболног типа;* а кад је Риманова површ затворена, кад се дакле пресликава на целу затворену раван, кажемо да је *елипсна* или *елипсног типа.* Ови називи стоје у вези с теоријом линеарно аутоморфних одн. полиморфних функција, које су у неку руку карактерисане истоименим линеарним супституцијама [*F. Klein*, **1**, 1878; **2**, 1882]. С тим називима питање гласи: *кад ће једнострукo повезана отворена Риманова површ бити хиперболног а када параболног типа?*

Отуд се овај проблем назива и *проблемом типа Риманове површи.* На њему се у новије време доста радило и налазили су се разни *услови (критеријуми) за параболни или хиперболни тип.* То је уствари *проблем руба у конформном пресликавању једноструко повезаних вишелисних области* или, тачније, основно питање које би се у том проблему имало решити пре свих других. То је дакле један од битних састојака општег и средишњег задатка теорије аналитичких функција: испитивања конформног пресликавања општих области.

Овде ћемо изнети известан преглед тих услова, који се не може сматрати потпуним, али би могао послужити ради првог сналажења у проучавању тог предмета.

5. *Пикаров став о изузетним вредностима као критеријум типа.* — На првоме месту може се навести познати Пикаров став [**1**, **2**, 1879] о изузетним вредностима у близини есенцијалних сингуларности као став који даје довољан услов да Риманова површ буде хиперболног типа. Општи Пикаров став казује да *функција узима у близини усамљене есенцијалне тачке* (тј. есенцијалне тачке у чијој је околини функција регуларна сем у половима) *сваку вредност бескрајно много пута, изузев, највише, две вредности.* Но како се у овом излагању ограничавамо на једноструко повезане области, довољно је узети у обзир Пикаров став за функције мероморфне у целој отвореној равни, који тада казује да таква функција узима *сваку вредност бескрајно много пута, изузев, највише две.* Дакле, ако постоје више од две изузетне вредности, функција не може бити мероморфна у целој отвореној равни. Према томе може се изрећи следећи довољни услов за хиперболни тип:

Ако изнад три или више тачака бројне равни једноструко повезана отворена Риманова површ нема унутарњих тачака ни на једном листу, или само на коначно много њих, та површ је хиперболног типа.

6. *Иверсенова два става.* — Изнесимо још неке довољне услове за хиперболни тип Риманове површи, замишљајући да је површ распрострта изнад комплексне w-равни. Постоји следећи став [*F. Iversen*, **1**, 1914, стр. 18]:

Уочимо ма коју (унутарњу) *тачку једне параболне Риманове површи, којој одговара у w-равни тачка w_0, и нека је w_1 ма која друга тачка w-равни ($w_0 \neq w_1$), обе у коначном делу равни. Тада постоји на тој површи непрекидан лук* (састојећи се из самих њених унутарњих тачака) *који полази из уочене тачке w_0 те површи а у равни спаја w_0 са w_1 не излазећи изван круга $|w-w_1| < |w_0-w_1|$.*

Обртањем Иверсенова става добијамо следећи услов за хиперболни тип риманске површи:

Ако на једнострукo повезаној Римановој површи постоји тачка w_0 *и у* w*-равни још једна тачка* w_1 *(*$w_0 \neq w_1$*) па ако не постоји непрекидан лук на површи, који полази из* w_0 *на површи а у* w*-равни спаја* w_0 *са* w_1 *остајући у кругу* $|w - w_1| < |w_0 - w_1|$*, тада је та Риманава површ хиперболног типа.*

Очигледно, лук поменут у овом ставу не мора постојати у случају кад на површи има извесних сингуларних линија. Дакле по Иверсенову ставу ако на површи има сингуларних линија, она је хиперболна. Тиме је обухвећен став II у бр. 3.

Из Иверсенова исказаног става произлази лако следећи, на изглед општији став [*Iversen*, **1**, 1914, стр. 24]:

Уочимо у некој тачки w_0 *елемент функције инверсне мероморфној функцији и непрекидну криву* g *(у* w*-равни) која спаја* w_0 *са неком другом тачком* w'*. Тада постоји пут* (на Римановој површи) *који из* w_0 *води ка* w'*, садржан у произвољно узаној траци што садржи криву* g*, а дуж кога се уочени елемент може аналитички продужити до* w'*.*

Сад се обрнути став може изрећи овако:

Ако на једнострукo повезаној Римановој површи, полазећи од извесне њене тачке изнад w_0 *не можемо описати непрекидну криву која се у равни удаљује произвољно мало ма од кога датог непрекидног лука који спаја* w_0 *са којом било тачком* w_1 *у* w*-равни, тада је та Риманова површ хиперболног типа.*

7. *Гросов став.* — Иверсенов став утврђује могућност аналитичког продужавања дуж ма које, у равни изабране континуираве криве, с произвољно малим удаљавањем од ње, али не казује ништа у погледу на униформност продужавања, тј. не тврди да пут којим се на површи крећемо нема у равни вишеструких тачака. Одређенији у том смислу је следећи Гросов став [*W. Gross*, **1**, 1918] који се односи на аналитичко продужавање дуж правих у разним правцима. Њиме се такође добија један критеријум за хиперболне површи. Став гласи:

Из сваке обичне тачке једне параболне Риманове површи могу се повући на тој површи у правцима који са извесним почетним правцем заклапају ма који угао φ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ *полуправе на тој површи,* које се састоје из самих обичних тачака површи — *сем можда у извесним правцима за које мноштво вредности* φ *има меру једнаку нули.*

Вреди напоменути следећи став, садржан у суштини у Гросову ставу, мањег домета, али елементарније природе, јер не употребљава појам мере неког мноштва:

Уочимо на параболној Римановој површи коју било тачку и у w*-равни који било круг са средиштем у тој тачки. Тада у сваком исечку тога круга постоји на површи исечак истога круга, са средиштем у реченој тачки и који се састоји из самих њених обичних тачака.*

Обртањем Гросова става и претходнога добијамо опет довољне услове за хиперболне Риманове површи. Тако настаје из Гросова става следећи:

Ако се из неке обичне тачке једноструко повезане Риманове површи не могу повући на тој површи полуправе у правцима за које поменути угао φ, *који их одређује, образује мноштво вредности коме је мера позитивна, тада је та Риманова површ хиперболна.*

8. *Ставови из теорије линеарно аутоморфних функција.* — Међу ставове који имају карактер критеријума за тип Риманових површи можемо унети и следеће ставове, који садрже елементарне чињенице из теорије линеарно аутоморфних функција [*F. Klein*, **1**, 1878; **2**, 1882 и *H. Poincaré*, **1**, 1882; итд.]:

Ако на једноструко повезаној риманској површи постоји (на њој униформна *линеарно полиморфна функција и ако њена група линеарних супституција садржи макар само једну хиперболну супституцију, та површ је хиперболног типа; ако не садржи хиперболних супституција, али садржи макар само једну параболну супституцију, површ је параболног типа; ако садржи само елипсне супституције, површ је елипсног типа.*

Напоменимо да је тај став прилично опште природе, јер су, по дефиницији, линеарно аутоморфне функције у појединим „основним областима“ општег мероморфног карактера.

9. *О типу правилно разгранатих Риманових површи.* — Теорија линеарно аутоморфних функција даје и тачније податке о разгранатости Риманових површи сва три типа. Реч је о *правилно разгранатим* површима чије су завојне тачке изнад коначно много тачака w-равни, рецимо, изнад $a_1, a_2, \ldots, a_q$ $(q \geqslant 2)$. Ред завојне тачке изнад a_ν нека буде за сваки лист m_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, q)$. То значи да се око a_ν пермутује увек по m_ν листова.

Ако је $q=2$ то су, очигледно, Риманове површи функција

$$z = \left(\frac{w - a_1}{w - a_2}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{или} \qquad z = \lg\left(\frac{w - a_1}{w - a_1}\right).$$

У првом, алгебарском случају површ је елипсног типа, у другом случају је парабалног типа.

Ако је $q=3$ имамо Шварцове „функције троугла“ [види нпр. *Klein*, **3**, 1890]. Опишемо ли затворену линију, рецимо круг, кроз тачке a_1, a_2, a_3, цела риманска површ је подељена на области тако да две суседне области увек сачињавају цео један њен лист. Тим областима одговарају у z-равни кружни троугли чији углови, као што се лако увиђа, имају величине $\frac{\pi_1}{m_1}, \frac{\pi_2}{m_2}, \frac{\pi_3}{m_3}$. Као што је познато из теорије аутоморфних функција, тип Риманове површи зависи од величине тих углова: ако је он већи од π површ је елипсна, ако је једнак π параболна је, ако мањи од π хиперболна. Према томе:

Ако је правилно разграната Риманова површ разграната изнад три тачке a_1, a_2, a_3 бројне равни а ред тих завојних тачака је m_1, m_2, m_3, тада је та површ елипсна, параболна или хиперболна према томе да ли је

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}>1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}<1.$$

Једноставним рачуном налазимо да постоје свега четири случаја елипсног типа, као што показује схема I (у схеми n значи 2, 3, 4,...). Исто тако постоје свега четири случаја кад је површ параболног типа, као што показује схема II.

I

m_1	m_2	m_3
2	2	n
2	3	3
2	3	4
2	3	5

II

m_1	m_2	m_3
2	2	∞
2	3	6
2	4	4
3	3	3

У свим осталим случајевима (кад је $q=3$) којих има бескрајно много, тип је хиперболан.

Ако је $q=4$ постоји само један случај у коме је површ параболна, наиме кад је $m_1=m_2=m_3=m_4=2$. У сваком другом случају, а исто тако и кад год је $q>4$ површ је хиперболног типа.

Све случајеве регуларно разгранатих површи можемо дакле сажети у следећи став (види нпр. *R. Nevanlinna*, **2**, 1936, стр. 278 и след.):

Ако је правилно разграната Риманова површ разграната изнад q тачака равни ($q \geqslant 2$) а ред тих тачака гранања је $m_1, m_2, \ldots, m_q$, тада је та површ елипсна, параболна или хиперболна према томе да ли је збир

$$s=\sum_{1}^{q}\frac{1}{m_\nu}$$

већи, једнак или мањи од $q-2$.

10. *Неванлинин критеријум за Риманове површи потпуно разгранате изнад коначно много тачака.* — Као што произлази из општих ставова о мероморфним функцијама, које је доказао *R. Nevanlinna* [**1**, 1932] претходни став о риманским површима линеарно полиморфних функција допушта значајно уопштење у случају хиперболног типа. Реч је ма о каквим једноструко повезаним риманским површима потпуно разгранатим изнад коначно много тачака.

Каже се да је Риманова површ *потпуно разграната* изнад неке тачке бројне равни ако је то завојна тачка за сваки њен лист. Али Неванлинин став допушта да тај појам схватимо шире:

да површ сматрамо потпуно разгранатом изнад неке тачке и ако је то завојна тачка за сваки њен лист сем највише за коначно много листова. Тада се став може једноставно изрећи овако:

Ако је једноструко повезана Риманова површ, потпуно разграната изнад коначно много тачака $a_1, a_2, \ldots, a_q$ $(q \geqslant 2)$ *тако да ред завојних тачака изнад* a_ν *није мањи од* m_ν (а може бити и бескрајан) *па ако је*

$$\sum_{1}^{q} \frac{1}{m_\nu} < q-2,$$

та површ је хиперболног типа.

Из претходних разматрања (бр. 9) следује одмах да постоје свега *пет* разних случајева кад је по Неванлинину ставу површ хиперболна, према приложеној схеми.

q	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
3	2	3	7	—	—
3	2	4	5	—	—
3	3	3	4	—	—
4	2	2	2	3	—
5	2	2	2	2	2

Разуме се, сваки од тих случајева подразумева бескрајно много разних, различито разгранатих риманских површи, јер услов је само да ред завојних тачака не буде мањи од m_ν.

Кад је $q=3$ може се нпр. узети да су све завојне тачке изнад a_1, a_2, a_3 логаритамске (∞, ∞, ∞). Но тада добијамо Пикаров став (бр. 5). Дакле *Пикаров став је посебан случај тога Неванлинина става.*

11. *Алфорсово уопштење Неванлинина става.* — Могло се унапред очекивати да ће Неванлинин став остати тачан и кад се уочена Риманова површ непрекидно деформише у извесним границама, ако се дакле и завојне тачке, које се налазе изнад извесне тачке равни и сачињавају једно место потпуне разгранатости, помере из те тачке, али не предалеко. Алфорс је успео да у том погледу докаже став [*L. Ahlfors*, **2**, 1932] који можемо изрећи следећим речима:

Уочимо q *једноструко повезаних области бројне равни,* G_1, $G_2, \ldots, G_q$, *које су једна изван друге, и претпоставимо да продужујући аналитички ма коју грану аналитичке функције којој та површ припада, а остајући у* G_ν *наилазимо на завојну тачку чији ред није мањи од* m_ν. *Ако је тада*

$$\sum_{1}^{q} \frac{1}{m_\nu} < q-2,$$

та површ је хиперболног типа.

12. *Неки критеријуми за параболни тип.* — Пре свега, Р. Неванлина је год. 1932 објавио доказ да су *све Риманове површи с коначно много трансцендентних и алгебарских завојних тачака параболног типа* [*R. Nevanlinna*, **1**, 1932].

Од разних ставова који дају критеријуме за параболне Риманове површи с изолованим завојним тачкама споменимо затим Алфорсов став за једноструко повезане Риманове површи које у коначноме имају само алгебарских завојних тачака, а у бескрајно далекој тачки могу имати и трансцендентних завојних тачака [*Ahlfors*, **1**, 1931]:

Нека је $n(\rho)$ број завојних тачака, рачунајући сваку онолико пута колики је њен ред (или тзв. степен гранања, тј. ред смањен за јединицу) до којих се по тој Римановој површи може доспети на путовима краћим од ρ. *Ако интеграл*

$$\int^{\infty} \frac{d\rho}{\rho\, n(\rho)}$$

дивергује, Риманова површ је параболна.

Ако површ нема ни у бескрајно далекој тачки трансцендентних завојних тачака, критеријум се може пооштрити:

Ако су све завојне тачке алгебарске и ако се налазе у ограниченом делу бројне равни $|w| < \mu$, *довољно је диверговање интеграла*

$$\int^{\infty} \frac{d\rho}{n(\rho) - n(\rho - \mu)}$$

да би површ била параболна (*Радојчић*, **4,** 1937).

Ако замислимо да је Риманова површ разастрта над Римановом сфером (ако дакле удаљеност ρ меримо сферном мером) сличан интеграл вреди кад год су све завојне тачке алгебарске, тј. *из дивергенције интеграла*

$$\int^{\infty} \frac{d\rho}{n(\rho) - n(\rho - \pi)}$$

следује да је таква Риманова површ параболна.

Наместо претходна два интеграла може се узети и

$$\int^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{n(\rho)},$$

тј. *ако тај интеграл дивергује површ је параболног типа* [*Ahlfors*, **3**, 1936; *Радојчић*, **4**, 1937].

13. *Критеријум за параболни тип у облику збира.* — Из претходнога следује непосредно још један критеријум за Риманове површи које имају само алгебарских завојних тачака:

Ако је ν_k број завојних тачака, рачунајући сваку онолико пута колики је њен ред, а до којих се по површи може доћи на путовима краћим од $(k+1)\pi$ а не краћим од $(k-1)\pi$ и ако је бескрајни збир

$$\sum^{\infty} \frac{1}{\nu_k}$$

дивергентан, површ је параболног типа [*Ahlfors*, **3**, 1936].

За одређивање типа можемо се ослонити и на начин како се испреплићу листови Риманове површи. Нека је површ подељена на известан начин (који овде изближе не описујемо) на листове континуираних рубова. Пошавши од извесног листа назовимо укупност листова који имају заједничких рубова с полазним листом *првом генерацијом* листова; укупност даљих листова који имају заједничких рубова с првом генерацијом назовимо *другом генерацијом,* итд. Нека је $\delta(\nu)$ број листова у ν-тој генерацији [*A. Speiser*, **1**, 1930].

Ако су, задржавајући претходне услове, сферна растојања завојних тачака, мерена на површи, изнад извесне позитивне величина ε и ако њихов ред није већи од целог броја p, може се поставити следећи критеријум:

Кад бескрајни збир

$$\sum^{\infty} \frac{\nu}{\delta(0)+\ldots+\delta(m_\nu)},$$

где је

$$m_\nu = \nu\left[\frac{p}{2}\right] + (\nu+1)\frac{(6p)^c - 1}{6p-1}, \qquad c = \left[\frac{10\pi}{\varepsilon}\right],$$

дивергује, Риманова површ је параболног типа [*Радојчић*, **7**, 1950].

Забележимо следећу последицу, која постоји под условом да је низ бројева $\delta(\nu)$ монотоно несилазан: *Ако бескрајан збир*

$$\sum^{\infty} \frac{1}{\delta(\nu)}$$

дивергује, површ је параболна.

Ово посматрање се може проширити и на случајеве кад нема ограничења за ред завојних тачака и за њихова растојања. Нека је p_ν највиши ред свих завојних тачака на рубовима листова првих ν генерација, а ε_ν најмање растојање за све те тачке.

Лако је показати да тада *из дивергенције бескрајног збира*

$$\sum^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu^2}{(6p)^{c_\nu}\,\delta(\nu)}, \qquad c_\nu = \left[\frac{5\pi}{\varepsilon_\nu}\right],$$

следује да је Риманова површ параболног типа [*Радојчић*, **7**, 1950, стр. 52].

14. *Кобајашијев критеријум за параболни тип.* — *Z. Kobayashi* [**1**, 1935] дао је став који обухвата све врсте Риманових површи с усамљеним завојним тачкама. При томе се ослања о мрежу која на површи настаје на следећи начин: Одредимо на површи око сваке завојне тачке њену околину која се састоји из свих тачака површи ближих тој завојној тачки него другим завојним тачкама. Рубови свих тих околина састоје се, очигледно, из тачака површи, које су једнако удаљене од, најмање, две завојне тачке; они образују тзв. *Кобајашијеву мрежу*. Ова се може претставити тополошким дрветом [*Speiser*, **1**, 1931] којим се тополошки приказује на прост начин узајамна повезаност листова Риманових површи. Као и тополошко дрво, Кобајашијева мрежа се састоји из „дужи" које су међу собом спојене у својим крајњим тачкама, „чворовима" мреже. Дуж сваке „дужи" састају се околине двеју завојних тачака. Из обих тих тачака види се та „дуж" (или неки њен део) под извесним углом. Овај угао називамо угаоном мером те дужи (или њеног дела). Тада можемо дефинисатн *угаону раздаљину* ма којих двеју тачака на мрежи као збир угаоних мера оних дужи преко којих су те две тачке мрежом повезане; при томе бирамо онај пут повезаности на коме је тај збир најмањи. Нека је θ угаона удаљеност које било тачке на мрежи од извесне полазне тачке. Означимо са $n(\theta)$ број тачака Кобајашијеве мреже, чија је угаона удаљеност од полазне тачке једнака θ. Тада Кобајашијев став гласи:

Једноструко повезана Риманова површ са самим изолованим завојним тачкама (алгебарским или трансцендентним) је параболног типа ако дивергује интеграл

$$\int \frac{d\rho}{\int_0^\rho n(\theta)\,d\theta}.$$

15. *Још један критеријум за Риманове површи с бескрајно много трансцендентних завојних тачака.* — До засебне врсте критеријума за тип једноструко повезаних Риманових површи долазимо кад претпоставимо да ја Риманова површ подељена на листове. Под листовима подразумевамо при томе области површи, које покривају бројну раван свугде само једанпут (једнолисне области) тако да не преостане ниједна област равни непокривена. Из начина како су листови узајамно повезани може се под извесним условима закључити коме типу припада површ. Да бисмо избегли непотребне заплете претпостављамо да је руб сваког листа континуиран и да околина сваке тачке на површи припада само коначном броју листова. За врло општу врсту *„неограничених“* Риманових површи може се *доказати могућност поделе на такве листове и описати општи начин њихове конструкције.* [*М. Радојчић*, **1**, 1929; **3**, 1931; **2**, 1930 и *T. Shimizu*, **1**, 1931].

Посматрајући Риманову површ на којој је аналитичка функција $z(w)$ мероморфног карактера, уочимо какав било прост лук $(a\,b)$ који полази из тачке $w=a$, где је извесна грана функције $z(w)$ регуларна, а завршава у $w=b$. Нека је Q_ε област која се састоји из свих тачака равни чија је удаљеност од тачака лука $(a\,b)$ мања од произвољно малог броја ε. Ако у Q_ε постоји *прост* лук $(a\,b')$ који спаја тачку a с тачком b', удаљеном од b за мање од ε, а дуж кога се функција $z(w)$ може аналитички продужити, кажемо да је та Риманова површ *неограничена.** По Гросову ставу (бр. 7) *Риманове површи свих функција инверсних мероморфним функцијама су неограничене* [*Shimizu*, **1**, 1931; *Радојчић*, **2**, 1930].

Према томе критеријум за тип о коме је сада реч односи се на неограничене једноструко повезане Риманове површи. Постоји тада овај општи став:

Ако у z-равни листовима одговарају области с непрекидним рубовима, ако затим на рубу сваког листа, сем можда коначно много листова, има трансцендентних завојних тачака и ако је мноштво тих завојних тачака коначно, или ако је бесконачно али у цикличном распореду редуктибилно, тада је Риманова површ параболног типа. [*Радојчић*, **5**, 1938].

Циклични распоред трансцендентних завојних тачака може се пак једноставно дефинисати овако: Нека је A која била унутарња тачка дате Риманове површи. Опишимо на површи континуирану просту линију $l_\nu\,(\nu=1,2,\ldots)$ од A до сваке трансцендентне завојне тачке W_ν тако да сем A те линије немају заједничких тачака. Тада, очигледно, можемо на површи описати око тачке A у њеној једнолисној околини, затворену континуирану линију c, која сваку линију l_ν пресеца у само једној тачки L_ν. Под *цикличним распоредом завојних тачака* W_ν подразумевамо циклични распоред тачака L_ν на линији c [*Радојчић*, **5**, 1938; онда се даје еквивалентна дефиниција цикличног распореда одговарајућих „трансцендентних праменова“ у z-равни].

---

* *Радојчић*, **1**, 1929; **3**, 1931. У тим чланцима дефиниција је дата мање прецизно. У вези с тим, доказ да је површ функције инверсне мероморфној неограничена је недовољно прецизан. Онде сам се служио Иверсеновим ставом, но само применом Гросова става може се доћи до циља, као што је показао *Шимизу* [**1**, 1931]. У том смислу треба исправити и моју напомену у чланку **6**, стр. 12.

Кад је мноштво трансцендентних завојних тачака коначно, претходни став је садржан у Неванлинину ставу поменутом на почетку бр. 12.

НАВОДИ

L. Ahlfors: **1.** Comment. Math. Helv. 3, 1931. — **2.** Bull. Soc. Math. France, 60, 1932. — **3.** Soc. Sc. Fenn., Comm. Phys.-Math. 6, 1936.

C. Carathéodory: **1.** Math. Ann. 72, 1912, p. 107. — **2.** Schwarz — Festschrift, Berlin 1914, p. 19.

R. Courant: **1.** Gött. Nachr., 1910, p. 154. — **2.** Math. Ann. 71, 1912, p. 145. — **3.** Math. Ann. 72, 1912, p. 517. — **4.** J. f. Math. 144, 1914, p. 190.

W. Gross: **1.** Mh. Math. u. Phys. 29, 1918.

D. Hilbert: **1.** Math.-Ver. 8, 1900, p. 184. — **2.** Math. Ann. 59, 1904, p. 161. — **3.** Gött. Nachr., 1909, p. 314

F. Iversen: **1.** Recherches sur les Fonctions Inverses des Fonctions Méromorphes (теза), Helsingsfors, 1914.

F Klein: **1.** Math. Ann. 14, 1878. — **2.** Math. Ann. 21, 1882. — **3.** Vorlesungen über die elliptischen Modulfunktionen I, II, Leipzig, 1890—92

Z. Kobayashi: **1.** Sc. Reports, Tokyo Bunr. Daig. 1935.

P. Koebe: **1.** Gött. Nachr., 1912, p. 844. — **2.** J. f. Math. 145, 1915, p. 177. — **3.** Atti del IV congr. math., Roma 1908, Vol. 2, 1909, p. 25. — **4.** Gött. Nachr., 1908, p. 337; 1909, p. 324.

R. Nevanlinna: **1.** Acta Math. 58, 1932. — **2.** Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1936.

E. Picard: **1.** C. R. Acad. Sc., Paris, 88, 1879, p. 1024. — **2.** C. R. Acad. Sc., Paris, 89, 1879, p. 745.

H. Poincaré: **1.** Acta Math. 1, 1882.

M. Radojčić: **1.** Глас Срп. Кр. Ак. 134, 1929. — **2.** C. R. Acad. Sc., Paris, 190, 1930. — **3.** Глас Срп. Кр. Ак. 146, 1931. — **4.** Publ. Math. de l'Univ. Belgrade, 6, 1937. — **5.** Глас Срп. Кр. Ак. 175, 1937. — **6.** Publ. Inst. Math., Belgrade, 2, 1948. — **7.** Publ. Inst. Math., Belgrade, 3, 1950.

B. Riemann: **1.** Dissertation, 1851, Werke, 2. Aufl., p. 3.

T. Shimizu: **1.** Jap. Jorn. Math. 8, 1931.

A. Speiser: **1.** Comm. Math. Helv. 2, 1930

SUR LE PROBLÈME DES TYPES DES SURFACES DER RIEMANN

par

M. Radojčić

L'auteur donne un aperçu élémentaire des critères concernant les types des surfaces de Riemann, sans prétendre à une liste complète.

Sous-titres: Surface de Riemann et domaine de Riemann. — Théorème fondamental sur la représentation conforme. — Représentation conforme des domaines simplement connexes des surfaces de Riemann. — Le problème des types. — Le théorème de Picard sur les valeurs exceptionnelles, comme critère des types. — Deux théorèmes d'Iversen. — Un théorème de Gross. — Quelques propositions de la théorie des fonctions linéairement automorphes. — Le critère de R. Nevanlinna pour les surfaces complètement ramifiées au-dessus d'un nombre fini de points. — La généralisation d'Ahlfors du théorème de Nevanlinna. — Quelques critères pour le type parabolique. Certains critères pour le type parabolique, en forme de somme. — Le critère de Kobayashi pour le type parabolique. — Encore un critère pour les surfaces ayant une infinité de points de ramification transcendants.