Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

МИЛУТИН МИЛАНКОВИЋ

О ПТОЛЕМАЈЕВУ ИЗРАЧУНАВАЊУ БРОЈА π

У своме „Зборнику астрономије"* Клаудије Птолемајос нам саопштава да опсег круга стоји према круговом пречнику у размери

$$3\ 8'\ 30'' : 1$$

То ваља разумети овако. Птолемајос се служио сексагезималним бројним системом не само за премеравање углова и лукова, већ и за изражавање његових тригонометриских функција од којих употребљава само тетиве. При томе дели периферију круга, као и ми, у 360^0 степена, степен у 60 минута, а минут у 60 секунада. При изражавању тригонометриске функције, тетиве, дели пречник круга у 120 делова, које назива „партес" а ове дели у минуте и секунде. Зато добивамо, преводећи горе саопштени број у децимални систем, да је размера опсега круга према његовом пречнику, дакле број π, прем Птолемајову рачуну једнака

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3\,\frac{17}{120}\,.$$

Птолемајос нам у своме делу не саопштава како је дошао до тог свог нумеричког резултата који, прерачунат на наш деци-

* Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie. Uebersetzt von K. Manitius. Zwei Bände. Leipzig, B. G. Teubner, 1912, 1913.

Споменуто место налази се у првом тому дела, његовој шестој књизи, седмом поглављу, на странама 384 и 385. У Heiberg-овом издању, то место се налази на стр. 513.

мални бројни систем даје $\pi = 3{,}14167$ и који је, својом тачношћу, премашио израчунавања свих научника Антике. Желим да овом расправицом покажем како је Птолемајос дошао до саопштеног броја.

При томе ћу се послужити нашим садашњим језиком математике да бих њим изразио и замисли наших претходника.

Уцртамо ли у круг радиуса r правилан полигон од n страница, па пишемо ли

$$\alpha = \frac{360^0}{n},$$

то нам α предочава центрични угао сваке странице, тако да је њена дужина једнака $2r \sin \alpha/2$, а опсег полигона једнак

$$O_n = 2\,n\,r \sin\frac{\alpha}{2} = 2\,n\,r \sin\frac{180^0}{n}.$$

Опсег круга је

$$O = 2\,\pi\,r.$$

Када број n расте у бесконачност, опсег полигона приближава се до потпуности опсегу круга. Зато је

$$\lim_{n \to \infty} (O - O_n) = 0,$$

дакле

$$\pi = \lim_{n \to \infty} n \sin\frac{180^0}{n}.$$

Ова једноставна једначина даје нам могућност нумеричког израчунавања броја π из нумеричке вредности $\sin(180^0/n)$ уз довољно велику вредност броја n.

Применимо ова расуђивања служећи се таблицом тетива што ју је Птолемајос израчунао, а која се налази на странама 36 до 40 првог тома Маницијусова превода Птолемајова Зборника.

Са $\alpha = 1^0$, тј. $n = 360$, налазимо у тој таблици да је дужина тетиве у односу према пречнику круга дата овим бројем

$$\frac{t}{2r}=\frac{1}{120}\left(1+\frac{2}{60}+\frac{50}{3600}\right).$$

Опсег полигона је n пута толики. Зато је

$$O_n=\frac{360}{120}\left(1+\frac{2}{60}+\frac{50}{3600}\right).$$

Како је опсег круга $O=2\pi r$, то одатле следује

$$\pi=\frac{377}{120}=3\frac{17}{120},$$

дакле тачно онај број који је, као што је напред речено, Птолемајос у своме зборнику саопштио. Нико пре њега, а дуго времена и после њега, није дошао до тако тачног резултата.

UEBER DIE AUSRECHNUNG DES CLAUDIUS PTOLEMAUS DER ZAHL π

von

M. MILANKOVITCH

In seinem Werke „Handbuch der Astronomie“, übersetzt von Karl Manitius, Band I, Seite 384 und 385, Leipzig, B. G. Teubner, 1912, gibt Claudius Ptolemäus für den numerischen Wert der Zahl π folgende Zahl an:

$$\pi=3+\frac{8}{60}+\frac{30}{360},$$

d. h. auf unseres Dezimalsystem umgerechnet

$$\pi=3\frac{17}{120}=3{,}141666\ldots,$$

ohne mitzuteilen, wie er diese Zahl berechnet hat, die durch ihre Genauigkeit alle übrigen Berechnungen der antiken Autoren übertrifft.

Der Verfasser dieser Abhandlung zeigt, dass Ptolemäus zu dieser Zahl gelangt ist mittels der in unserer gegenwärtigen mathematischen Sprache leicht zu beweisenden Formel

$$\pi = \lim_{n \to \infty} n \sin\left(\frac{180^0}{n}\right),$$

indem er in dieselbe $n = 360$ eingesetetzt hat und den zugehörigen numerischen Wert von sin $(180^0/n)$ seinen auf den Seiten 36 bis 40 des ersten Bandes seines Werkes mitgeteilten Sehnentafeln entnommen hat.