Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

ВОЈИСЛАВ В. МИШКОВИЋ

ГРАФИЧКИ РАЦИОНАЛИЗАТОР

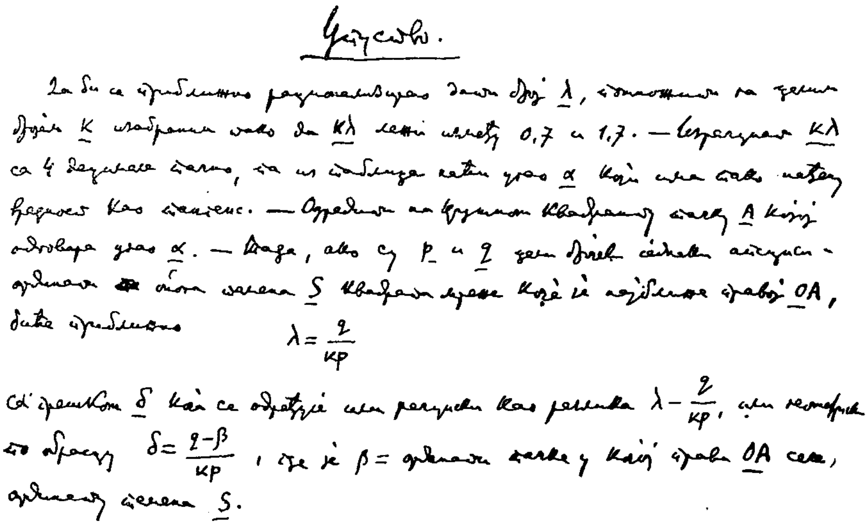
Успомена на *Михаила Петровића*

Објављујемо овај мали прилог, ма да није био намењен да буде објављен, као успомену на професора Петровића. Писан и његовом руком, оживеће нам у сећању, истина, не Петровића специјалисту за диференцијалне једначине, теорију редова и функција или творца математичких спектара, већ — Петровића који се радо разоноћавао, покаткад, елементарном и нумеричком математиком. А оживеће нам за тренутак у сећању, тих неколико Петровићевих редака, и некадањи клуб математичара Београдског универзитета, који је он толико волео, можда баш зато што није имао никакав формални карактер, ни писане статуте, чак ни неки званични назив, али је радио интензивно, предано и успешно, тако да су се њиме поносили и његови чланови и наш Универзитет.

Ова Петровићева нотица датира из доба првих радних састанака нашег предратног клуба математичара. На једном од њих аутор ових редова приказао је идеју о квазиидентичним опозицијама планетоида и њихову улогу у идентификовању недовољно посматраних тих објеката. За примену идеје требало је одредити периоде, за сваки од *познатих* планетоида, после којих се они враћају у опозицију са Земљом у *исти*, или *приближно исти* положај као и у извесној, произвољно изабраној, почетној опозицији. Другим речима, требало је, за сваки од познатих планетоида — а у то време било их је око 1200 познатих — апроксимирати однос средњих сидеричких дневних кретања (или револуцијâ) планетоида и Земље што је могуће простијим разломком, то јест са што мањим апсолутним вредностима и бројиоца и имениоца. Усто је требало још, за сваку апроксимацију, оценити (у данима) и њено отступање од тачне вредности.

Дакле, већ и само одређивање периодâ квазиидентичних опозиција, за све нумерисане планетоиде, претстављало је позамашан нумерички посао.

Два-три дана после тога састанка клуба пресрео ме је у Семинару професор Петровић, мало насмејан, са: „Имам за ону вашу ствар згодан графички поступак“. И пружио ми је овај листић.


Упутство.

Да би се приближно рационализирао дати број λ, [illegible] цели број k изабраним тако да kλ лежи између 0,7 и 1,7. — Израчунај kλ са 4 децимале тачно, па из таблица нађи угао α који има тако нађену вредност као тангенс. — Одреди на кружном квадранту тачку A која одговара углу α. — Тада, ако су p и q цели бројеви [illegible] апсциса-ордината [illegible] темена S квадратне мреже које је најближе правој OA, биће приближно

$$\lambda = \frac{q}{kp}$$

са грешком δ која се одређује или рачунски као разлика $\lambda - \frac{q}{kp}$, или геометријски по обрасцу $\delta = \frac{q-\beta}{kp}$, где је β = ордината тачке у којој права OA сече ординату темена S.

Сл. 1. Аутограф Петровићева Графичког рационализатора

Уз листић је била приложена и сличица квадранта са квадратном мрежом (в. сл. 2). Прочитао сам текст и видео одмах у чему је поступак. Једино ми, у том тренутку, нису биле јасне границе 0,7 и 1,7. И запитах професора Петровића: „Откуд баш 0,7 и 1,7“? Он се насмеја мало, па ће рећи: „Тако му најбоље дође, видићете“!

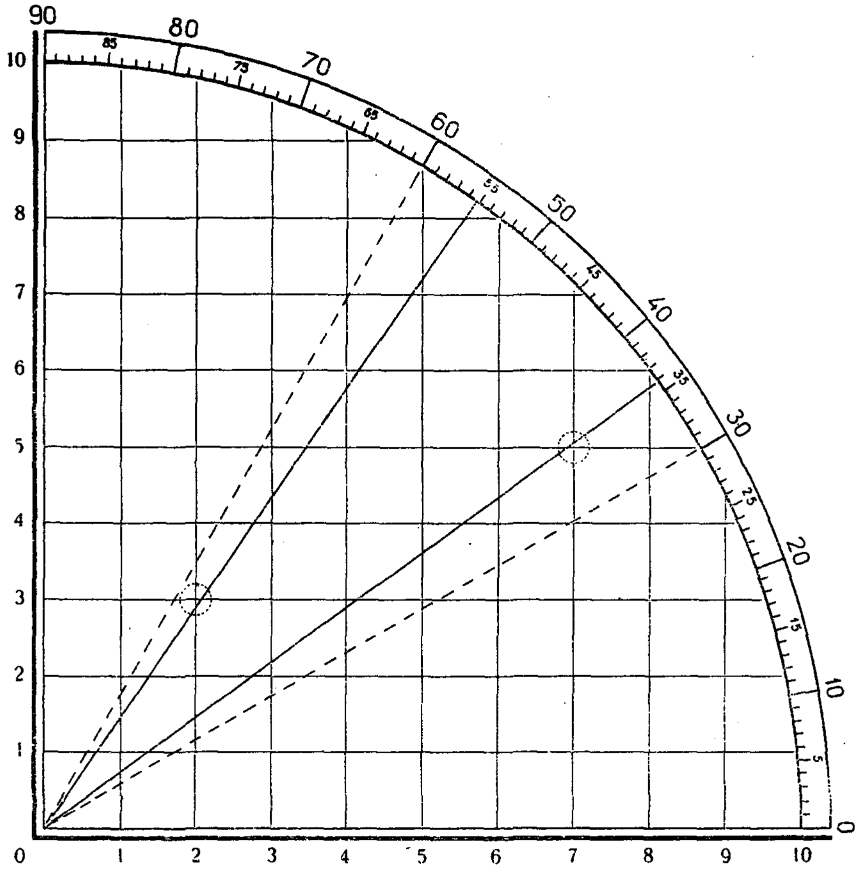
*

Ево укратко у чему се поступак састоји.

Претпоставимо да је дат разломак $\lambda = M/N$, $(M < N)$, где су M и N цели, вишецифрени бројеви. Треба тај разломак апроксимирати другим, рецимо q/p, где су p и q цели, но што мањи бројеви и — оценити приближно његово отступање од дате вредности.

Место да дати разломак развијамо у верижни разломак, поступно одређујемо приближне вредности и, за сваку од ових, израчунавамо отступање од датог разломка, може се ово, по Петровићеву поступку, краће, овако постићи.

Дати разломак $\lambda = M/N$ можемо схватити као коефицијент правца праве $y = \lambda x$ што пролази кроз почетак координатног система Oxy. Са овим координатним системом можемо, међутим,



Сл. 2. Графички рационализатор

извршити ротацију око координатног почетка. Извршимо је тако да у новом координатном систему коефицијент правца буде $k\lambda$, и то тако да овај падне између 0,7 и 1,7. Другим речима, фактор k бираћемо тако да угао између праве и нове апсцисе не буде мањи од 35^0, ни већи од 60^0. А ово ћемо увек моћи постићи, тј. моћи наћи такво k.

Замислимо сад да квадрант новог координатног система покријемо квадратичном мрежом, оивиченом поделом кружне периферије на степене (в. сл. 2), како бисмо могли непосредно са ње читати нагибе правих према апсцисној оси. Та слика претставља Петровићев графички рационализатор, чија је употреба изложена у аутографисаном упутству (в. сл. 1).

Објаснићемо је овде на једном нумеричком примеру. Узмимо да треба упростити разломак λ, у којем је $M=2583$, $N=35796$.

По Петровићеву поступку, за фактор k могли бисмо узети било који цео број од 10 до 24. Узећемо, наравно, најмањи, јер је овај и са гледишта рачуна најпогоднији. У том случају је

$$k\lambda=\operatorname{tg}\alpha=0{,}7216, \text{ дакле } \alpha=35^0\,49'\approx 35^0{,}8.$$

Повуцимо из почетка графичког рационализатора праву, под овим углом са апсцисном осом, до саме издељене периферије. Потражимо затим координате темена квадратића мреже кроз који пролази ова права, односно, темена најмање удаљена од те праве. Видимо да је то окружено теме чије су координате $p=7$ и $q=5$. Према томе, тражена приближна вредност датог разломка је

$$\lambda=\frac{M}{N}\approx\frac{q}{kp}=\frac{5}{70}\approx 0{,}0714,$$

са отступањем

$$\frac{M}{N}-\frac{q}{kp}=0{,}0722-0{,}0714\approx 0{,}001.$$

Да је за k узето 20, било би

$$k\lambda=\operatorname{tg}\alpha=1{,}4432, \text{ дакле } \alpha=55^0\,17'\approx 55^0{,}3.$$

Права повучена из почетка рационализатора под овим углом дала би $p=2$, $q=3$. Према томе, за приближну вредност датог разломка добили бисмо

$$\lambda=\frac{M}{N}\approx\frac{q}{kp}=\frac{3}{40}=0{,}075.$$

За отступање налазимо

$$\text{рачунски:}\quad \frac{M}{N}-\frac{q}{kp}=0{,}0722-0{,}0750\approx 0{,}003;$$

$$\text{графички:}\quad \frac{M}{N}-\frac{q}{kp}\approx\frac{\varepsilon}{kp}\approx\frac{0{,}1}{40}=\frac{1}{400}\approx 0{,}00\overline{3}.$$

Петровићев графички рационализатор има две практичне предности. Прво, омогућује да се непосредно види и да ли се дати разломак апроксимира оздо (подбаченом) или озго (пребаченом приближном вредношћу). И, друго, омогућује да се релативно брзо и лако, са графика, не само нађе тражена приближна вредност датог разломка, већ да се и оцени његово приближно отступање од тачне вредности.

Што се тиче степена тачности који се графичким рационализатором може постићи, овај, наравно, зависи од његове величине и прецизности са којом је израђен.

Најзад, још једна напомена. Са графика се види и смисао граница 0,7 и 1,7. То су, уствари, само заокругљене приближне вредности коефицијената праваца, којима је Петровић хтео да ограничи и, на свој начин, ограничио онај сектор на којем ће се координате p и q моћи са подједнаком и највећом тачношћу са графика одређивати.

RATIONALISATEUR GRAPHIQUE

Souvenir de M. Petrovitch

par

V. V. MICHKOVITCH

L'auteur fait connaître un procédé graphique, jusqu'ici inédit, de M. Petrovitch, destiné à simplifier la rationalisation d'un nombre donné $\lambda < 1$. Le procédé consiste à multiplier le nombre donné par un nombre entier k tel que $0{,}7 < k\lambda < 1{,}7$. A l'aide de $k\lambda = \operatorname{tang}\alpha$ ainsi calculé, avec quatre décimales, on détermine l'angle α. Puis on trace, sur le graphique (Fig. 2), la droite passant par l'origine et faisant avec l'axe des abscisses l'angle α.

En remontant la droite ainsi tracée, on cherche le sommet du carré le plus proche de la droite. Si on désigne par p et q les coordonnées de ce sommet (encerclé sur la Fig. 2), on aura, pour une valeur approchée du nombre donné,

$$\lambda = \frac{q}{kp}.$$

L'erreur δ ainsi commise peut être évaluée soit par le calcul, en prenant la difference $\lambda - \frac{q}{kp}$, soit à l'aide du graphique en prenant $\delta = \frac{q-\beta}{kp}$, β étant l'ordonnée du point d'intersection de la droite et de l'ordonnée du sommet du carré choisi.