Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

СТЕРЕОМЕТРИСКЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ*

Кад се једна количина V, из буди каквих разлога, не може тачно израчунати, од интереса је наћи такве две количине M и N да се може поуздано тврдити да вредност X није већа од M, ни мања од N. То се рачунски изражава *двоструком неједначином*

$$N \leqq X \leqq M, \tag{1}$$

а геометриски на тај начин што се на бројној линији, која се пружа од $-\infty$ до $+\infty$, означи да тачка X лежи између двеју тачака M и N, или се са којом од њих поклапа.

До двоструких неједначина (1) долази се на разноврсне начине, према задатку са којим се има посла. Један од општијих начина, који се може искористити при стереометриским израчунавањима, основан је на употреби ових правила:

Прво правило: кад су a и b два броја од којих ни један није негативан, увек је

$$0 \leqq ab \leqq \frac{(a+b)^2}{4},$$

што непосредно следује из идентичности

$$ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2].$$

Друго правило: кад од n бројева $a, b, c, \ldots$ ниједан није негативан, увек је

$$\frac{(a+b+c+\ldots)^2}{n} \leqq a^2+b^2+c^2+\ldots \leqq (a+b+c+\ldots)^2,$$

* Овај чланак пок. М. Петровића требало је да буде штампан као прилог у уџбенику ГЕОМЕТРИЈА за VI разр. гимн. од А. Билимовића и Т. Анђелића. Петровић је предао писцима чланак фебруара 1941 год., а сачувао га је Т. Анђелић.

што непосредно следује из двеју идентичности, лаке за проверавање

$$n(a^2+b^2+c^2+\ldots)=(a+b+c+\ldots)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2+\ldots$$

$$a^2+b^2+c^2+\ldots=(a+b+c+\ldots)^2-2(ab+ac+bc+\ldots).$$

У стереометриским задацима се често наилази на изразе у којима се налазе производи двеју количина, или збирови квадрата двеју или више количина. Кад се на такве изразе примене горе наведена правила, долази се до *стереометриских неједначина* које могу имати своје занимљивости и интереса. То ће се видети из примера што следују.

I пример: задатак да се израчуна запремина V зарубљене купе, кад јој се зна висина h и полупречник ρ њеног средњег круга, не може се ни на који начин тачно решити. Али, као што се зна, ако се са r и r' означе полупречници кружних основица купе, а са h њена висина, биће

$$V=\frac{\pi h}{3}(r^2+r'^2+rr'). \tag{2}$$

Па пошто је, према горњим правилима,

$$\frac{(r+r')^2}{2}\leqq r^2+r'^2\leqq(r+r')^2, \qquad 0\leqq rr'\leqq\frac{(r+r')^2}{4},$$

а

$$\rho=\frac{r+r'}{2}, \qquad (r+r')^2=4\rho^2,$$

то се према обрасцу (2) добива да је

$$V\leqq\frac{\pi h}{4}(4\rho^2+\rho^2) \quad \text{и} \quad V\geqq\frac{\pi h}{3}(2\rho+0),$$

према чему се за запремину V добива двострука неједначина

$$\frac{2\pi}{3}h\rho^2\leqq V\leqq\frac{5\pi}{3}h\rho^2 .$$

Из тога се на пр. изводи закључак да не постоје две зарубљене купе које имају исти средњи круг и исту висину, а од којих би једна била, по запремини, више од $2^1/_2$ пута већа од друге.

II пример: задатак да се израчуна запремина V лоптиног слоја, кад се зна висина h слоја и полупречник ρ *његовог средњег круга,* такође се не може решити. Али, као што се зна, ако се са r и r' означе полупречници кругова што ограничавају слој, биће

$$V=\frac{\pi h^3}{6}+\frac{\pi h}{2}(r^2+r'^2). \tag{3}$$

Пошто је $r+r'=2\rho$, а према горњем правилу је

$$2\rho^2 \leqq r^2+r'^2 \leqq 4\rho^2,$$

то се према обрасцу (3) добива да је,

$$\frac{\pi h^3}{6}+\pi h \rho^2 \leqq V \leqq \frac{\pi h^3}{6}+2\pi h \rho^2.$$

Покушај да то искажеш у облику геометриског правила.

III пример: задатак да се израчуна збир

$$S=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

квадрата углова ма каквог сферног троугла такође је нерешљив. Али, као што се зна, збир $(\alpha+\beta+\gamma)$ увек је већи од 180^0, а мањи од 540^0, или (кад се услови изразе у деловима равнога угла), тај је збир увек већи од π, а мањи од 3π.

Према горњем правилу за $n=3$ је

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3} \leqq S \leqq (\alpha+\beta+\gamma)^2.$$

Пошто је

$$\alpha+\beta+\gamma < 3\pi, \qquad \alpha+\beta+\gamma > \pi,$$

то је

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 < 9\pi^2, \qquad \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3} > \frac{\pi^2}{3}$$

из чега се изводи двострука неједначина

$$\frac{\pi^2}{3} < S < 9\pi^2.$$

Из тога се на пр. лако изводи закључак да не постоје два сферна троугла таква да је збир квадрата углова једнога од њих више од 27 пута већи од збира квадрата другога троугла.

У стереометрији има доста таквих тачно нерешљивих задатака, али за које се могу на показани начин поставити двоструке неједначине, што бар приближно одређују непознате вредности. Покушај да сам нађеш који од ових задатака.

SUR LES INÉGALITÉS STÉRÉOMETRIQUES

par

M. PETROVITCH

Par des procédés tout-à-fait élémentaires, l'auteur parvient à donner des limites entre lesquelles se trouvent certaines grandeurs stéréometriques telles que: volume d'un cône tronqué dont on connaît la hauteur et le rayon du cercle moyen; volume d'un anneau sphérique dont on connaît la hauteur et le rayon de son cercle moyen; somme des carrés des angles d'un triangle sphérique quelconque.