

РЕШАВАЊЕ ПАРЦИЈАЛНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ  
ПРОСТИРАЊА ТОПЛОТЕ  
ПОМОЋУ МРЕЖНОГ АНАЛИЗАТОРА  
ДУШАН МИТРОВИЋ и РАЈКО ТОМОВИЋ (Београд)

**I. Увод**

Универзални мрежни анализатори за наизменичну струју [1]<sup>1)</sup> постали су данас неопходно средство за испитивање и пројектовање сложених електричних система. У исто време, усавршавањем њихове конструктивне стране, они добијају све више обележја и општих аналогних машина и, као такви, употребљавају се за решавање проблема изван области електротехнике. На широке могућности примене мрежних анализатора у разним областима, нарочито теориске хемије и физике, први је указао у пуној мери Gabriel Krop [2, 3, 4, 5, 6], у својим радовима објављеним од 1943 год. надаље, а затим и други аутори [7, 8, 9].

Циљ овога рада је био да се оцени практична корист нашег анализатора у решавању парцијалне диференцијалне једначине простирања топлоте аналогним путем. Питање је интересантно са техничке тачке гледишта, где је много пута врло важно добити, брзо и лако, читав скуп решења једне исте једначине за разне вредности параметра а са ограниченом тачношћу. Нас је интересовало: у којим ће се границама поклапати решења добијена на анализатору и аналитичким путем као и брзина рада код аналогне методе.

**II. Принцип употребе анализатора**

Ми смо се ограничили на пример једнодимензионог простирања топлоте кроз хомогену средину, одређен парцијалном диференцијалном једначином

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{k}{c \cdot \rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где су:  $\theta$  температура,  $t$  време,  $x$  дужина,  $k$  проводност средине,  $c$  специфична топлота,  $\rho$  специфична густина. При томе су узети следећи услови

$$\theta(x, 0) = 0; \quad \theta(0, t) = 0, \quad \theta(l, t) = 1. \quad (2)$$

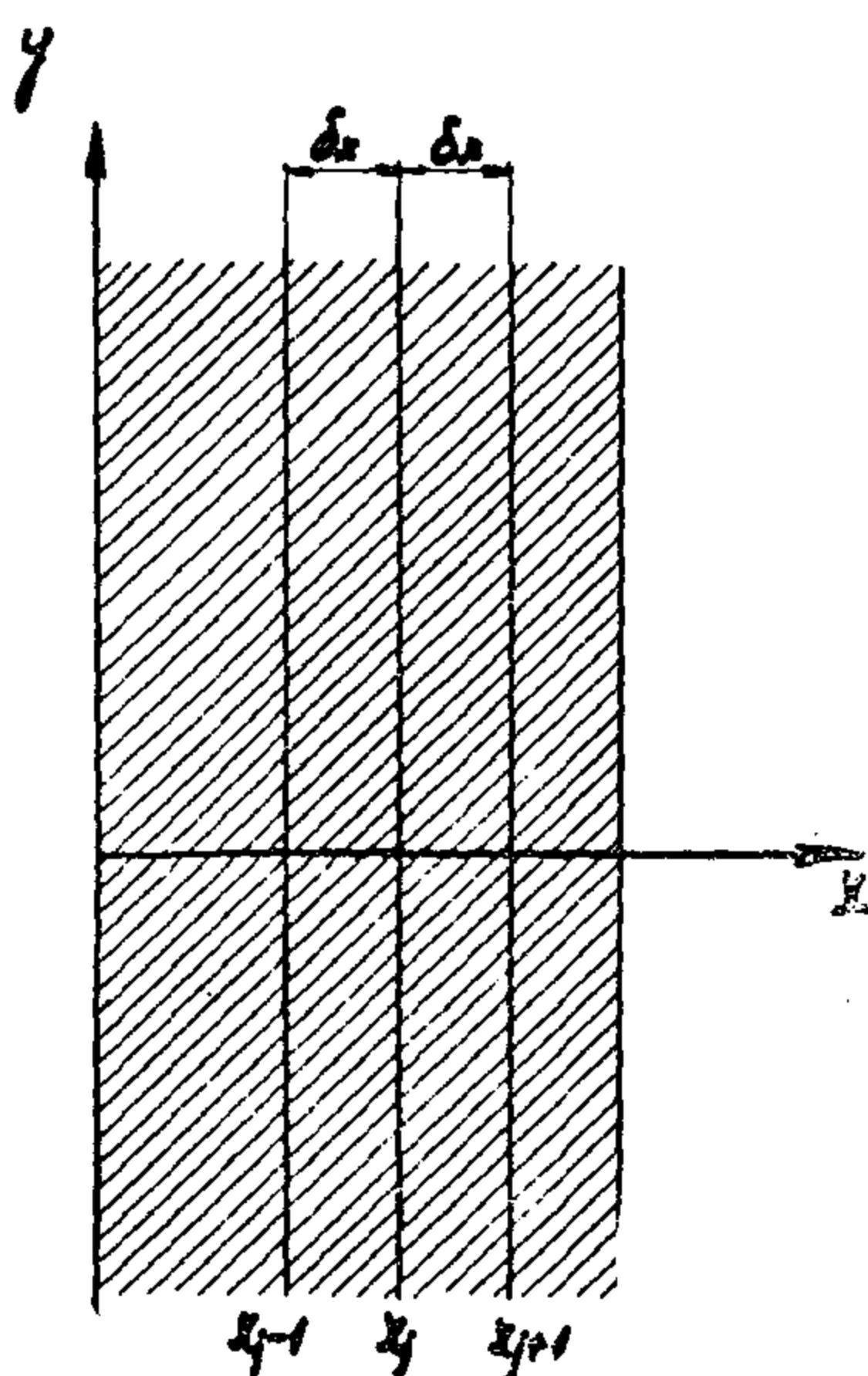
<sup>1)</sup> Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају чланка.

Физички, ови услови одговарају случају зида од хомогеног материјала дебљине  $l$  (сл. 1), који је на температури  $0^\circ$  за  $t < 0$ . За  $t \geq 0$ , десна површина зида доводи се на температуру  $\theta = \text{const}$ . Овај пример узет је из следећих разлога. Прво, јер се резултати мерења могу контролисати помоћу аналитичког решења једначине за поменуте услове

$$\theta(x, t) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} e^{-\frac{k}{c\rho} (2n-1)^2 a^2 t/4 l^2} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \quad (3)$$

Друго, што је карактеристичан за овај начин решавања јер вишедимензионални проблем и разни почетни и гранични услови

не уносе квалитативно нове моменте код добијања решења аналогним путем [10]. Према томе, искуство са овога примера може да послужи као оријентација у даљем раду са нашим мрежним анализатором.



Сл. 1

Решавање парцијалних диференцијалних једначина на аналогним машинама врши се свођењем на систем обичних диференцијалних једначина. [10]. То се постиже тако што се извод по једној независно променљивој замењује коначним разликама. Ако то учинимо за извод по  $x$ , добићемо следећи систем

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\theta_{j-1} - 2\theta_j + \theta_{j+1}}{(\delta x)^2}; \quad (4)$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Утицај броја  $n$  на тачност аналогних решења, нарочито код једначина као под (1), описан је у литератури из ове области [10]. У нашем примеру узето је  $n=10$ , што је потпуно довољно с обзиром да се аналогним путем врло тешко постижу резултати испод  $1\%$  отступања од тачних вредности.

Еквивалентна шема са електричним елементима анализатора за једначину (4) изгледа као што је то приказано на сл. 2.

То је, уствари, упрошћена шема једног кабла са концентрисаним параметрима где су  $G$  одводност и  $L$  индуктивитет занемарени.

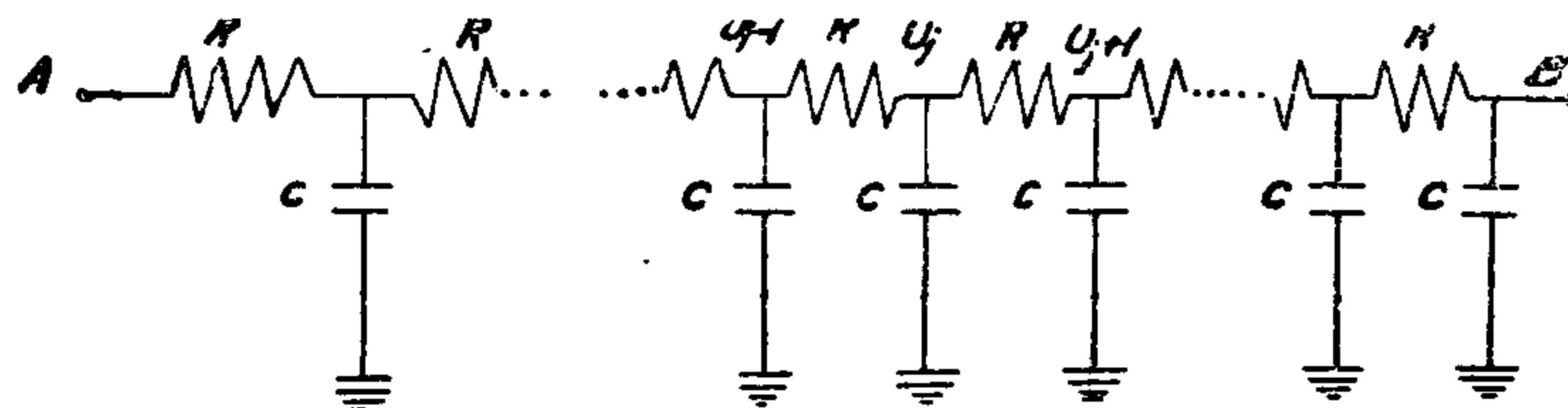
Једначина простирања електричних појава дуж кабла је

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{R_0 C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (5)$$

или за случај концентрисаних параметара

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{R_0 C_0}, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

где је  $U$  напон,  $R_0$  отпор по јединици дужине,  $C_0$  капацитет по јединици дужине.



Сл. 2. — Еквивалентна шема једначине (4) на анализатору

Поређењем једначина (4) и (6) види се да промене напона у неком чвору (сл. 2) могу да прикажу варијације температуре на одговарајућем месту зида (сл. 1), и то у размери

$$\frac{1}{R_0 C_0} = \frac{k}{c \rho (\delta x)^2}. \quad (7)$$

### III. Намештање система и мерење

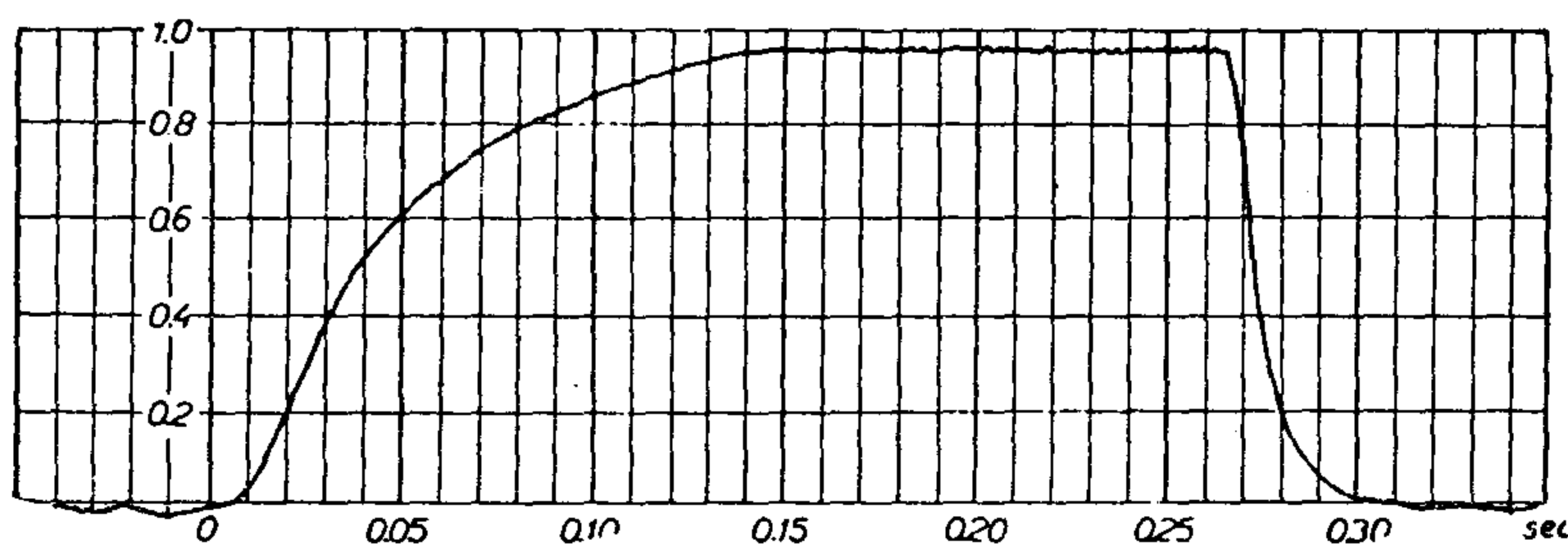
Овде се поставља важно практично питање да се екстремне вредности величина  $R_0$ ,  $C_0$ ,  $U$  крећу у опсезима анализатора и мерних уређаја.

Полазне вредности су одређене природом посматране термичке појаве и износе  $l=0,0316$  м.,  $k/c\rho=0,01$  и  $\delta x=0,00316$  м. ( $n=10$ ). Из једначине (7) излази  $R_0 C_0=0,001$  а, према опсезима анализатора, усвојено је  $R_0=1000 \Omega$ ,  $C_0=1 \mu F$ .

Услови из једначине (2) остварују се електрично врло лако тиме што су кондензатори на сл. 2 пре почетка рада ненапуњени, а за  $t=0$  крај B веже се за константан извор напона  $U(l, t)=1$ . Одмах се истиче велика предност аналогног решавања за техничке сврхе, јер се разни почетни и гранични услови за дату једначину остварују на истој шеми одговарајућим подешавањем напонских прилика.

Решења једначине (4) на мрежном анализатору добијају се као слике напона  $U(x_j, t)$  на катодном или магнетном осцилографу, односно на сличним уређајима за бележење временски променљивих функција.

Како је временска учестаност појава дозвољавала, ми смо користили за дефинитивно бележење резултата магнетни осцилограф, где светлосни зрак директно исписује на фотографској траци криву напона тачке у коју је инструмент укључен. Једна таква фотографија дата је на слици 3.



Сл. 3. — Решење добивено аналогним путем  $x_j = x_1 = 1 \cdot \delta x$

Звучна виљушка, са константним бројем трептаја, аутоматски бележи време сваких 0,01 sec., у облику вертикалних црта. Тачност бележења времена на овај начин је таква да практично потпуно отпада као извор грешке.

Метода је ограничена у погледу тачности, углавном, прецизношћу магнетног осцилографа, елемената анализатора, ширином траке за снимање и електричним сметњама са стране. Корисна ширина траке на којој се снимало износила је 100 мм.

Нас је у великој мери интересовало поклапање вредности ордината које смо мерили у милиметрима на сликама, за десет разних тачака  $x_j$  и за разне  $t$ , са вредностима добијеним из једначине (3). Отступања нису била већа од 2% у најгорем случају.

Исход мерења показује да се наш анализатор може на задовољавајући начин употребити код решавања техничких проблема у вези са простирањем топлоте у нестационарном стању.

#### IV. Апроксимација решења полиномом

Известан недостатак аналогне методе је свакако у томе што не даје решења за све вредности од  $x$ . При томе се, наравно, мисли да се ништа не мења у еквивалентној шеми. У том циљу, ми смо покушали да из експерименталних података  $U(x_j, t)$  нађемо израз који ће, са извесном грешком, дати решење у целом домену интеграције.

Као основа послужила је Њутнова интерполациона формула за еквилистантне вредности аргумента. Она је прво примењена за апроксимацију по  $t$

$$\begin{aligned}\theta(0,1, t) &= -0,153 + 24,19 t - 195,6 t^2 + 574 t^3, \\ \theta(0,5, t) &= 0,064 + 22,6 t - 207,7 t^2 + 676 t^3, \\ \theta(0,9, t) &= 0,763 + 6,34 t - 62,5 t^2 + 208 t^3.\end{aligned}\quad (8)$$

Како су у посматраном интервалу коефицијенти уз  $t$  непрекидне функције од  $x$ , то је на њих поново примењена интерпо-

$$\begin{aligned}&+ (-168 - 362 x + 494 x^2) t^2 \\ &+ (459,5 + 1323 x - 1780 x^2) t^3.\end{aligned}$$

Полиноми трећег реда по  $t$  и другог по  $x$  узети су због услова да грешке услед апроксимације засебно по  $x$  и  $t$ , не пређу 1% у односу на вредности мерене на анализатору.

Ради контроле тачности, испитано је поново подударење вредности из једначина (9) и (3) за низ парова  $x$  и  $t$  из домена интеграције. Ова отступања нису била већа од 3% (изузев за мале вредности  $t$ , где је  $\theta$  врло мало па свако отступање даје велики проценат).

#### V. Закључак

Брзина рада на анализатору чини свакако ову методу решавања парцијалних диференцијалних једначина врло погодном за анализу практичних задатака. Стварно трајање једног решавања, као што се види на слици 3, свега је 0,3 sec. или за свих десет кривих 3 sec. Томе треба додати и време за манипулацију и намештање еквивалентне шеме које је реда десетак минута.

Предности аналогног решавања истичу се нарочито код мењања почетних и граничних услова, јер време за постављање шеме долази само једном у обзир за дату једначину.

Заправо, ови случајеви и претстављају тежиште употребе анализатора, а овај пример је више обрађен са гледишта упоређења аналогне методе и аналитичке. Вишедимензионални проблеми такође не захтевају никакве нове експерименталне уређаје сем већег броја  $RC$  елемената. Другим речима, њихово третирање је ограничено бројем  $R$  и  $C$  кутија анализатора.

<sup>1)</sup> У једначину су унете релативне вредности  $x$  у односу на 1.

У случају кад се тражи кретање појаве у целом домену интеграције, може се на основу једног скупа снимака  $U(x_j, t)$  добити и континуално апроксимативно решење ради евентуалне потпуније анализе проблема.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Д. Митровић и Р. Томовић — Мрежни анализатор Института за електропривреду, Електропривреда, бр. 4, стр. 163, 1950.
- [2] Крон Г. — Equivalent circuits for oscillating systems and the Riemann Christoffel curvature tensor. *Elec. Eng.*, vol. 62, p. 27, January 1943.
- [3] Крон Г. — Equivalent circuits to represent the electromagnetic field equations. *Phys. Rev.*, vol. 69, p. 126, 1943.
- [4] Крон Г. — Equivalent circuit of the field equations of Maxwell. *Proc. I. R. E.*, vol. 32, p. 289, May 1944.
- [5] Крон Г. — Electric circuit models of the Schrödinger equation. *Phys. Rev.*, vol. 67, p. 39, 1945.
- [6] Крон Г. — Electric circuit models for the vibration spectrum of polyatomic molecules. *Journ. of Chem. Phys.*, vol. 14, p. 19, January 1946.
- [7] K. Spangenberg, G. Wallers and F. Schott — Electrical network analysers for the solution of electromagnetic field problems *Proc. I. R. E.*, vol. 37, p. 724, July 1949.
- [8] James H. Green and Victor B. Corey — The analog solution of simultaneous partial differential equations by means of passive and active electrical networks. *Phys. Rev.*, vol. 78, p. 328, May 1950.
- [9] L. M. Haupt — Solution of simultaneous equations through use of the A. C. network calculator. *RSI*, vol. 21, p. 683, August 1950.
- [10] D. R. Hartree, — Calculating instruments and Machines, Urbana Press 1949.

#### SOLUTION OF THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE HEAT-FLOW ON THE A. C. NETWORK ANALYSER

D. Mitrović and R. Tomović

In order to examine the possibilities of the a. c. network analyser applied to the solutions of some types of the partial differential equations, the case of the heat flow in one dimension through homogenous medium with the given boundary condition, was worked out.

The results obtained on the a. c. network analyser are compared with the analytic solutions of the same equation.

The agreement between the analog and calculated solutions has been found satisfactory for most practical purposes and the analog method can be expanded without restrictions to the more complex cases.

At the end, it is shown that a continuous solution of the given equation can be approximated from the set of the analyser records when using the interpolation polynomials in two variables.