

МЕЂУСОБНИ РАСПОРЕД И КОНСТРУКЦИЈА НУЛА ПОЛИНОМА ТРЕЋЕГ СТЕПЕНА И НУЛА ЊЕГОВОГ ИЗВОДНОГ ПОЛИНОМА

Ш. РАЉЕВИЋ (Сарајево)

Већи број аутора [1]¹⁾ доказао је ову теорему:
Нуле функције

$$F(z) = \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{z - z_j}$$

жиже су криве $p-1$ класе, која сваку од дужи (z_j, z_k) додирује у тачки M_{jk} којом је та дуж подијељена у односу $m_j : m_k$.

Специјално [1]:

Нуле z' и z'' функције

$$F(z) = \sum_{j=1}^3 \frac{m_j}{z - z_j}$$

жиже су конусног пријесека који дужи (z_1, z_2) , (z_2, z_3) , (z_3, z_1) додирује у тачкама $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, којима су те дужи подијељене респективно у односу $m_1 : m_2$, $m_2 : m_3$, $m_3 : m_1$.

Из овога је Walsh [1] извео 1920 геометриску конструкцију нула z' и z'' за случај $p=3$, $m_1=m_2=m_3=1$.

На основи општег става показао је Cesàro [2; стр. 352] да су коријени z' и z'' једначине $f'(z)=0$, где је

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$$

жиже елипсе која стране троугла (z_1, z_2, z_3) додирује у њиховим срединама.

Показаћемо како се у случају полинома

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \quad (1)$$

и његовог изводног полинома

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 \quad (2)$$

¹⁾ Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају чланка.

непосредном геометриском интерпретацијом самог поступка рјешавања једначине трећег степена може доћи не само до Cesàro-ових резултата, већ и до извјесних других закључака из којих произлази врло једноставна геометриска конструкција:

1° двију нула z' и z'' изводног полинома (2), кад је познат међусобни распоред нула z_1, z_2, z_3 полинома (1) и

2° двију нула полинома (1), кад је познат међусобни распоред његове треће нуле и нула z' и z'' изводног полинома (2).

1.2. Уобичајени поступак рјешавања једначине трећег степена састоји се у овом: супституцијом

$$z = z_0 + t = z_0 - u - v, \quad (3)$$

где је

$$z_0 = -\frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3},$$

рјешавање једначина $P(z)=0$ и $P'(z)=0$ своди се на рјешавање једначина

$$t^3 + pt + q = 0 \quad (1')$$

$$3t^2 + p = 0, \quad (2')$$

односно на рјешавање система једначина

$$u^3 + v^3 = q, \quad uv = -\frac{1}{3}p. \quad (4)$$

Одавде се добивају три различита пара вриједности за u и v , које задовољавају систем (4)

$$u_j = u e^{\frac{2(j-1)\pi i}{3}}, \quad v_j = v e^{\frac{-2(j-1)\pi i}{3}}; \quad u_j v_j = uv; \quad j = 1, 2, 3, \quad (5)$$

и према томе, у општем случају, три различите вриједности за t

$$t_j = -u_j - v_j, \quad \sum_{j=1}^3 t_j = 0, \quad (6)$$

којима су одређене три нуле полинома (1)

$$z_j = z_0 + t_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3')$$

$$\sum_{j=1}^3 z_j = 3z_0,$$

Нуле полинома (2) одређене су онда релацијама

$$t' = -t'' = \sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt{uv} \quad (7)$$

$$z' = z_0 + \sqrt{uv}, \quad z'' = z_0 - \sqrt{uv}.$$

2.1. Погледајмо шта значе релације (5), (6), (3') и (7) ако их интерпретирамо геометриски.

Нека су z_1, z_2, z_3 три тачке комплексне равни, у којима се налазе истоимене нуле полинома (1), и које, у општем случају, образују један разностраничан троугао (z_1, z_2, z_3) . Тада је тачка

$$z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

тежиште тога троугла, а оријентисане дужи

$$t_j = z_j - z_0, \quad j = 1, 2, 3$$

дијелови су тежишних линија од тежишта z_0 до одговарајућих врхова троугла.

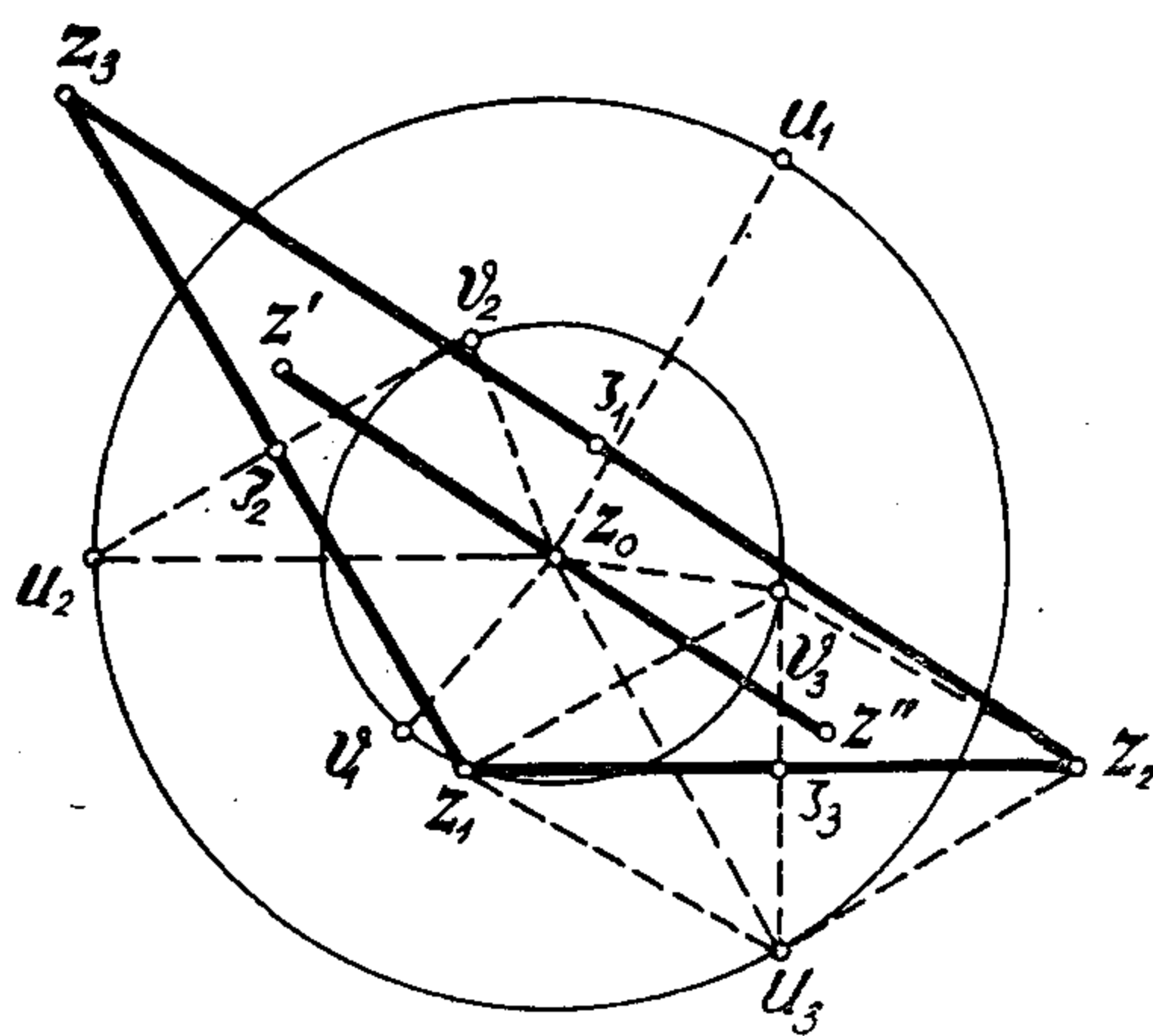
u_1 и v_1 , u_2 и v_2 , u_3 и v_3 су, респективно, компоненте оријентисаних дужи $-t_1$, $-t_2$, $-t_3$, те можемо узети да све оне имају заједничку почетну тачку у тежишту z_0 . Ако крајње тачке тих компонента означимо, респективно, са U_1 и V_1 , U_2 и V_2 , U_3 и V_3 тада из релације (5) произлази да се тачке U_1, U_2, U_3 налазе на једном кругу и образују један, а да се тачке V_1, V_2, V_3 налазе на другом кругу и образују други истостраничан троугао.

Из релација (5) произлази такођер ($\sqrt{u_j v_j} = \text{const.}$) да три угла

$$\angle U_j z_0 V_j, \quad j = 1, 2, 3$$

имају заједничку симетралу.

Из релација (7) произлази да се нуле z' и z'' изводног полинома (2) налазе на заједничкој симетрали углова $\angle U_j z_0 V_j$ ($j = 1, 2, 3$) и да су удаљене од тежишта z_0 , једна са једне а друга са друге стране, за геометриску средину модула $|u|$ и $|v|$.



Сл. 1.

2.2. Да бисмо поближе одредили компоненте u_j и v_j ($j=1, 2, 3$) претпоставимо да су стране троугла (z_1, z_2, z_3) оријентисане у директном смислу и да су у истом смислу поредане тако да насупрот врху z_j лежи стране b_j . У том случају су стране троугла (z_1, z_2, z_3) одређене релацијама

$$\begin{aligned} b_1 &= z_3 - z_2 = t_3 - t_2 = (u_1 - v_1) i \sqrt{3} \\ b_2 &= z_1 - z_3 = t_1 - t_3 = (u_2 - v_2) i \sqrt{3} \\ b_3 &= z_2 - z_1 = t_2 - t_1 = (u_3 - v_3) i \sqrt{3} \end{aligned} \quad (8)$$

из којих добијамо

$$u_j - v_j = -\frac{i}{\sqrt{3}} b_j \quad j=1, 2, 3. \quad (8')$$

Како је међутим

$$u_j + v_j = -t_j,$$

то је

$$\begin{aligned} u_j &= -\frac{1}{2} t_j - \frac{i}{2\sqrt{3}} b_j, \\ v_j &= -\frac{1}{2} t_j + \frac{i}{2\sqrt{3}} b_j, \end{aligned} \quad j=1, 2, 3, \quad (9)$$

што значи да се свака од компонената u_j и v_j , са своје стране, изражава као збир двију компонената. При томе сваки пар (u_j, v_j) $j=1, 2, 3$, има по једну компоненту $(-t_j/2)$ заједничку и идентичну са дијелом тежишне линије од тежишта z_0 до средине ζ_j одговарајуће стране b_j . Друге двије компоненте пара су једна другој супротне и нормалне на страну b_j . Дужине тих супротних компонената могу се изразити релацијом

$$|d_j| = \frac{1}{2} |b_j| \operatorname{tg} 30^\circ, \quad j=1, 2, 3. \quad (10)$$

Овим су положај и величина компонената u_j и v_j ($j=1, 2, 3$) потпуно одређени.

2.3. Претходни резултати могу се исказати са слиједећа два планиметриска става, која су тим резултатима доказана:

Став 1. Ако стране макар којег дајог троугла узмемо као дуже дијагонале ромбова и над сваком од њих конструишемо ромб са углом на врху $\alpha = 60^\circ$, тада „вањски“ врхови тих ромбова образују један, а „унутрашњи“ врхови други истосраничан троугао. Тежиште једног и другог истосраничног троугла поклапа се са тежиштем дајог троугла.

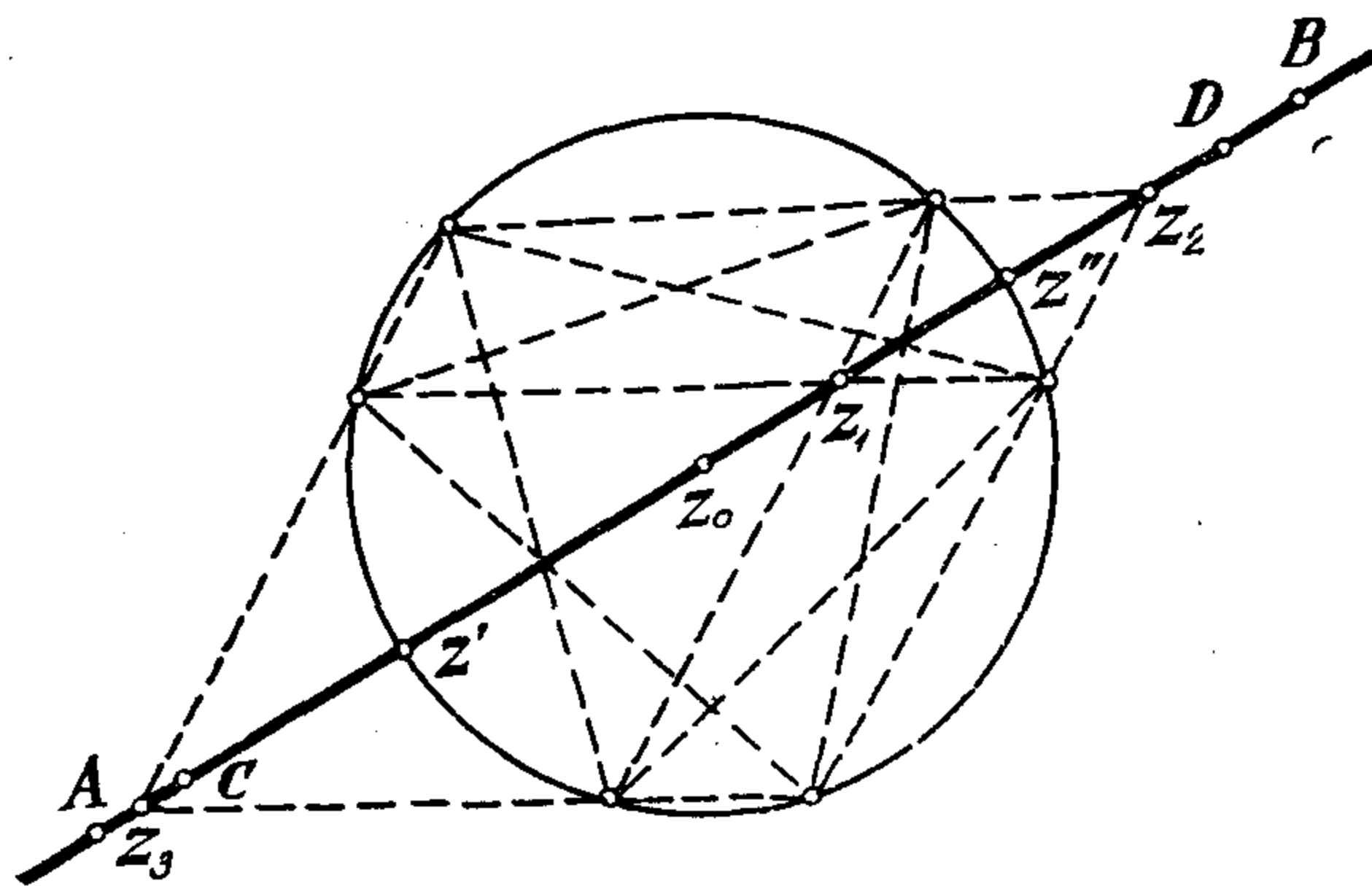
Став 2. Парови $\bar{u}$ и $\bar{v}$ правах $\bar{u}$ и $\bar{v}$ сјајају тежишта давог троугла са „вањским“ и „унутрашњим“ врхом сваког од ромбова одређују по један угао, шакав да се симетрале сва $\bar{u}$ и $\bar{v}$ шако одређена угла поклапају и своде на једну једину праву. Правац те $\bar{u}$ и $\bar{v}$ је карактеристичан за облик давог троугла.

Ставови 1 и 2 омогућују врло једноставну геометриску конструкцију дужи u_j и v_j као и конструкцију праве на којој се налазе нуле z' и z'' полинома (2), чији тачан положај, послје овог, није тешко одредити конструктивним путем.

Очигледно је да је за извођење конструкције довољно конструисати само један пар дужи (u_j, v_j) .

2.4. Напоменимо да ставови 1 и 2 вреде и онда, кад се врхови давог „троугла“ налазе на једној правој или, друкчије речено: конструкција нула z' и z'' полинома (2) остаје иста и онда кад се нуле полинома (1) налазе на једној правој. У том случају су компоненте u_j и v_j сваког пара (u_j, v_j) симетрично распоређене у односу на праву (z_1, z_2, z_3) , те су све тачке $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3$ распоређене на једном истом кругу.

Тачке z' и z'' налазе се на пресеку тога круга и праве (z_1, z_2, z_3) . Није тешко провјерити да се по једна од нула z_1, z_2, z_3 налази или у сваком од интервала $(AC), (z_0, z''), (z'', D)$, или у сваком од интервала



Сл. 2

$(C, z'), (z', z_0), (DB),$

гдје су ознаке интервала узете према слици 2 и гдје је

$$(\overline{z_0, C}) = (\overline{z_0, D}) = (\overline{z_0, z'}) \sqrt{3} = r \sqrt{3},$$

$$(\overline{z_0, A}) = (\overline{z_0, B}) = 2r.$$

3. Међусобним множењем релација (9) добивамо

$$u_j v_j = \left(\frac{1}{2} t_j\right)^2 + \frac{1}{12} b_j^2,$$

а одатле

$$-\frac{1}{12} b_j^2 = \left(\frac{1}{2} t_j + \sqrt{u_j v_j}\right) \left(\frac{1}{2} t_j - \sqrt{u_j v_j}\right),$$

односно

$$-\frac{1}{12}b_j^2 = (z' - \zeta_j)(z'' - \zeta_j)$$

или

$$\pm \frac{i}{2\sqrt{3}}b_j = \sqrt{(z' - \zeta_j)(z'' - \zeta_j)}, \quad j=1, 2, 3, \quad (11)$$

одакле слиједе:

Став 3. Симетрала сваке стране троугла (z_1, z_2, z_3) поклапа се са симетралом угла чији се врх налази на средини те стране, а чији кракови пролазе кроз тачке z' и z'' , у којима се налазе истоимене нуле полинома (2).

Став 4. Половина дужине краће дијагонале ромба, конструисаног над страном b_j , $j=1, 2, 3$, једнака је геометриској средини дужина оних двију дужи које спајају средину ζ_j те стране са тачкама z' и z'' .

Ставови 3 и 4 омогућују врло једноставну геометриску конструкцију тачака U_j и V_j , а тиме и конструкцију стране b_j , кад је познат међусобни распоред тачака z', z'' и одговарајуће тачке ζ_j или, другачије речено: на основу ставова 3 и 4 могуће је увијек једноставном геометриском конструкцијом одредити положај двију од нула z_1, z_2, z_3 полинома (1), ако је познат положај једне од њих и положај нула z' и z'' полинома (2).

4. Будући да се може писати

$$z' - \zeta_j = \frac{1}{2}t_j + \sqrt{u_j v_j} = -\frac{1}{2}(u_j + v_j - 2\sqrt{u_j v_j}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{u_j} - \sqrt{v_j})^2,$$

$$z'' - \zeta_j = \frac{1}{2}t_j - \sqrt{u_j v_j} = -\frac{1}{2}(u_j + v_j + 2\sqrt{u_j v_j}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{u_j} + \sqrt{v_j})^2,$$

то је

$$|z' - \zeta_j| + |z'' - \zeta_j| = |u_j| + |v_j| = \text{const.} \quad (12)$$

$$j=1, 2, 3.$$

Релација (12) заједно са ставом 3 доводи до Cezàro-овог резултата исказаног у 1.1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Marden — The Geometry of the zeros of polynomial in a complex variable, New York 1949.

[2] Cezàro — Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis, Leipzig 1904.

RÉPARTITION ET CONSTRUCTION DES ZÉROS D'UN POLYNOME DU TROISIÈME ORDRE ET DE SA DÉRIVÉE

Par Š. Raljević

L'auteur déduit de l'interprétation géométrique du procédé de résolution de l'équation en question la répartition et la construction de ses zéros.