НЕКА ПРОШИРЕЊА СТАВОВА О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ

ВЛАДЕТА ВУЧКОВИЋ (Београд)

Карамата [1][1)] је елементарним путем извео став о коначном прираштају за функције које имају прекидне изводе. Овде ћемо извести аналогна проширења осталих диференцијалних и интегралних ставова о средњој вредности.

1. Специјални случај поменутог става је следеће уопштење Rolle-ова става:

Став 1. *Нека је $f(x)$ непрекидна функција у затвореном размаку (a, b) и нека је $f(a)=f(b)=0$. Ако за свако x отвореног размака $(a+0, b-0)$ постоји леви $f'_-(x)$ и десни $f'_+(x)$ извод функције $f(x)$, тада постоји најмање једно ξ и из тог размака и два позитивна броја*

$$p>0, \quad q>0, \quad p+q=1$$

таква да је

$$p f'_+(\xi)+q f'_-(\xi)=0 \tag{1. 1}$$

Помоћу овог става могуће је извести уобичајеним путем следећа проширења Cauchy-ева става о средњој вредности и Taylor-ове формуле.

Став 2. *Нека су функције $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрекидне у затвореном размаку (a, b), при чему је $\varphi(b) \neq \varphi(a)$. Ако за свако x отвореног размака $(a+0, b-0)$ постоје леви и десни изводи $f'_-(x)$, $\varphi'_-(x)$ и $f'_+(x)$, $\varphi'_+(x)$ функција $f(x)$ и $\varphi(x)$, и ако су у томе размаку $\varphi'_-(x)$ и $\varphi'_+(x) \neq 0$ и истог знака, тада постоји најмање једно ξ из тога размака и два броја*

$$p>0, \quad q>0, \quad p+q=1$$

тако да је

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{p f'_+(\xi)+q f'_-(\xi)}{p \varphi'_+(\xi)+q \varphi'_-(\xi)} \tag{1. 2}$$

Доказ овог става добија се кад се на функцију

$$F(x)=[f(b)-f(a)]\,[\varphi(x)-\varphi(a)]-[f(x)-f(a)]\,[\varphi(b)-\varphi(a)]$$

примени став 1. Слично се изводи и

[1)] Бројеви у угластим заградама односе се иа литературу на крају чланка.

Став 3. *Нека је функција $f(x)$ нейрекидна у зайвореном размаку (a, b) и нека у йом размаку има нейрекидне изводе закључно са $(n-1)$-вим. Ако $f(x)$ у свакој йачки x ойвореног размака $(a+0, b-0)$ има леви и десни n-йи извод $f_-^{(n)}(x)$ и $f_+^{(n)}(x)$, йада йосйоје два броја*

$$p > 0, \quad q > 0, \quad p+q=1$$

и једно ξ размака (a, b) йако да је за свако x йог размака

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(x-a)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(a) + R_n$$

где је

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} \{p f_+^{(n)}(\xi) + q f_-^{(n)}(\xi)\}; \quad f^{(0)}(x) = f(x) \tag{1.3}$$

2. Да бисмо извели проширење интегралних ставова о средњој вредности, увешћемо једну класу функција која обухвата непрекидне функције и велики део прекидних функција. Проучавањем неких особина ове класе доћи ћемо до ставова чијом ћемо применом добити тражена проширења не само за функције ове класе већ и за све функције које имају дисконтинуитете прве врсте.

Дефиниција. *Функција $f(x)$ дефинисана у зайвореном размаку (a, b) йрийада класи PS ако у свакој йачки йог размака, сем крајњих, йосйоје $f(x+0)$ и $f(x-0)$, ако йосйоје $f(a+0)$ и $f(b-0)$ и ако је или*

$$f(x-0) \leqslant f(x) \leqslant f(x+0)$$

или $\qquad x \in (a+0, b-0)$

$$f(x-0) > f(x) > f(x+0)$$

йри чему су вредносйи функције у граничним йачкама a и b дайе са

$$f(a) = f(a+0), \quad f(b) = f(b-0).$$

Из ове дефиниције непосредно следи да су функције класе PS ограничене у датом интервалу, да је множина њихових тачака дисконтинуитета пребројива и да су оне R-интеграбилне и RS-интеграбилне у односу на сваку функцију ограничене варијације ако им се тачке дисконтинуитета не поклапају.

Доказаћемо неке ставове о овим функцијама, од којих су прва два аналогони ставова о непрекидности и о највећој и најмањој вредности за непрекидне функције.

Став 4. *Ако функција $f(x)$ йрийада класи PS и ако је $f(a) < 0$ а $f(b) > 0$, онда у инйервалу (a, b) йосйоји најмање једна йачка ξ йако да је*

или $f(\xi-0) \leqslant 0 \leqslant f(\xi+0)$, *или* $f(\xi-0) > 0 > f(\xi+0)$.

Доказ. Како је $f(a)=f(a+0)$ и $f(b)=f(b-0)$, то је

$$f(a+0)<0<f(b-0).$$

Отуда следи да у размаку (a,b) постоје тачке x_i и x_k, $i,k=1,2,\ldots$ за које је

$$f(x_i)<0 \quad \text{и} \quad f(x_k)>0, \quad x_i<x_k.$$

Од тачака x_i узећу једну и означићу је са a_1, а од тачака x_k такође једну коју ћу означити са b_1. Тада је

$$f(a_1)<0<f(b_1), \quad a_1<b_1.$$

Ако је $f(a_1+0)>0$ или $f(b_1-0)<0$ став је доказан. Нека је зато

$$f(a_1+0)<0<f(b_1-0) \tag{2.1}$$

Образоваћемо $\qquad c_1=(a_1+b_1)/2$.

Или је α) $f(c_1)>0$; или је β) $f(c_1)<0$; или је γ) $f(c_1)=0$. У случају γ) став је доказан. У случају α) остаје алтернатива $f(c_1-0)>0$. У случају β) остаје алтернатива $f(c_1+0)<0$.

Ако наступа случај α), тада ћемо на размак (a_1, c_1) применити сличан поступак дељења.

У случају β) поступак дељења применићемо на размак (c_1, b_1).

Тако долазимо до низа бројева A_n, B_n, $n=1,2,\ldots$ који задовољавају неједначине

$$f(A_n+0)<0<f(B_n-0) \tag{2.2}$$

Уз то постоји једна тачка ξ којој низ A_n тежи са леве стране, а низ B_n са десне стране.

Но из дефиниције функције $f(x)$ по (2.2) је

$$\text{или} \quad f(A_n)<0<f(B_n), \quad \text{или} \quad f(A_n)>0>f(B_n), \tag{2.3}$$

па граничним прелазом, због егзистенције леве и десне граничне вредности функције $f(x)$, из неједначина (2.3) следи

$$\text{или} \quad f(\xi-0)\leqslant 0\leqslant f(\xi+0), \quad \text{или} \quad f(\xi-0)\geqslant 0\geqslant f(\xi+0),$$

јер $f(A_n)\to f(\xi-0)$, а $f(B_n)\to f(\xi+0)$, што је и требало доказати.

Став 5. *Ако функција $f(x)$ припада класи PS, онда или $f(x-0)$ или $f(x+0)$ достиже у размаку (a,b) највећу и најмању вредност функције у том размаку.*

Доказ. Да $f(x)$ не може достићи у (a, b) своју најмању и највећу вредност а да их при томе не достигну или $f(x-0)$ или $f(x+0)$, следи из дефиниције класе PS. Наиме, или је

$$\underset{a \leqslant x \leqslant b}{\operatorname{Min}} f(x-0) \leqslant \underset{a \leqslant x \leqslant b}{\operatorname{Min}} f(x) \leqslant \underset{a \leqslant x \leqslant b}{\operatorname{Max}} f(x) \leqslant \underset{a \leqslant x \leqslant b}{\operatorname{Max}} f(x+0)$$

или

$$\underset{a \leqslant x \leqslant b}{\operatorname{Min}} f(x+0) \leqslant \underset{a \leqslant x \leqslant b}{\operatorname{Min}} f(x) \leqslant \underset{a \leqslant x \leqslant b}{\operatorname{Max}} f(x) \leqslant \underset{a \leqslant x \leqslant b}{\operatorname{Max}} f(x-0)$$

Преполовићемо размак (a, b) у два: (a, c), (c, b). Најмање у једном од ових функција $f(x)$ узима једну вредност $f(x_1)$ која није мања од ма које вредности функције $f(x)$ у целом размаку (a, b). Иначе би се у (a, b) нашле неке апцисе x_2 и x_3 да је

$$\text{за свако } x \text{ из } (a, c) \quad f(x) \leqslant f(x_2),$$

$$\text{за свако } x \text{ из } (c, b) \quad f(x) \leqslant f(x_3),$$

те једна од вредности $f(x_2)$ и $f(x_3)$ не би била мања ни од једне вредности функције $f(x)$ у размаку (a, b).

Итерацијом овог поступка следи да постоји размак (a_n, b_n) који лежи у размаку (a, b) тако да за неке x' из размака (a_n, b_n) $f(x')$ није мање од ма које вредности функције $f(x)$ у размаку (a, b).

Ако је x_0 једна тачка из размака (a, b) то у

(a_1, b_1) постоји једна тачка x_1 тако да је $f(x_1) \geqslant f(x_0)$,

(a_2, b_2) постоји једна тачка x_2 тако да је $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, (2.4)

. . . .

(a_n, b_n) постоји једна тачка x_n тако да је $f(x_n) \geqslant f(x_{n-1})$.

Знамо да постоји $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \xi$.

Бројеви $x_\nu, \nu = 1, 2, \ldots$ чине или узлазни или силазни низ, или су такви да их и са леве и са десне стране од ξ има бесконачно много. У последњем случају, они који су с леве стране чине низ који такође конвергира ка ξ, а исто и они с десне стране од ξ.

У случају да бројеви x_ν чине узлазни низ,

$$\lim f(x_n) = f(\xi - 0)$$

а у случају да бројеви x_n чине силазни низ,

$$\lim f(x_n) = f(\xi + 0),$$

а у случају да су бројеви x_ν распоређени и са леве и са десне стране од ξ (при чему их са обе стране има бесконачно много), из низа x_ν изабраћу само оне $\overline{x}_{m_k}$ који леже лево од ξ па ће за њих бити

$$\lim f(\overline{x}_{n_k}) = f(\xi - 0).$$

За оне тачке $\underline{x}_{m_k}$ које леже десно од ξ биће

$$\lim f(\underline{x}_{m_k}) = f(\xi + 0).$$

У сваком од прва два случаја низ

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3), \ldots \tag{2.5}$$

је узлазни, а у трећем случају низови

$$f(\overline{x}_{n_1}),\ f(\overline{x}_{n_2}),\ f(\overline{x}_{n_3}), \ldots \quad \text{и} \quad f(\underline{x}_{m_1}),\ f(\underline{x}_{m_2}),\ f(\underline{x}_{m_3}), \ldots$$

који се добијају из (2.5) избацивањем ордината за x_ν-ове који су десно од ξ, односно који су лево од ξ, такође су узлазни низови. Отуд је по (2.5) ако x_ν чине узлазни или силазни низ

$$\lim f(x_n) = f(\xi - 0) \geqslant f(x_0) \quad \text{или} \quad \lim f(x_n) = f(\xi + 0) \geqslant f(x_0).$$

а у случају када су тачке x_ν и слева и с десна од ξ, узећемо засебно оне с лева и засебно оне с десна, па ће бити

$$\lim f(\overline{x}_{n_k}) = f(\xi - 0) \geqslant f(x_0) \quad \text{и} \quad \lim f(\underline{x}_{mk}) = f(\xi + 0) \geqslant f(x_0),$$

што је и требало доказати.

Применом овог поступка на функцију $-f(x)$ доказује се да $f(\xi - 0)$ или $f(\xi + 0)$ узимају најмању вредност функције у (a, b).

Последица. *Ако функција $f(x)$ припада класи PS и ако је A неки број који задовољава услов*

$$\operatorname{Min} f(x) \leqslant A \leqslant \operatorname{Max} f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b, \tag{2.6}$$

онда у интервалу (a, b) постоји бар једна тачка ξ тако да је

$$\textit{или} \quad f(\xi - 0) \leqslant A \leqslant f(\xi + 0) \quad \textit{или} \quad f(\xi - 0) > A > f(\xi + 0).$$

Приметимо да број A који задовољава неједначине (2.6) може да се увек напише у облику

$$A = p f(\xi + 0) + q f(\xi - 0), \quad p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0 \quad p + q = 1 \tag{2.7}$$

Став 6. *Ако функције $f(x)$ и $g(x)$ припадају класи PS, а функција $g(x)$ је или стално позитивна или стално негативна у* *целом размаку* (a, b), *онда у размаку* (a, b) *постоји једно* ξ *да је за сваки број* A *који задовољава неједначине*

$$\operatorname{Min}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant A\leqslant \operatorname{Max}\frac{f(x)}{g(x)},\quad a\leqslant x\leqslant b, \tag{2.8}$$

увек

$$A=\frac{p\,f(\xi+0)+q\,f(\xi-0)}{p\,g(\xi+0)+q\,g(\xi-0)},\quad p\geqslant 0,\quad q\geqslant 0,\quad p+q=1. \tag{2.9}$$

Доказ овог става оснива се на следећој леми: Ако су p_1 и q_1 два броја $\geqslant 0$ са особином $p_1+q_1=1$, а ако су a и a_1 ма какви бројеви, а b и b_1 или оба позитивна или оба негативна броја, онда постоје увек два броја $p\geqslant 0$ и $q\geqslant 0$ са особином $p+q=1$ која задовољавају идентитет

$$p_1\frac{a}{b}+q_1\frac{a_1}{b_1}=\frac{p\,a+q\,a_1}{p\,b+q\,b_1}.$$

Лако се налази да су то бројеви

$$\frac{p_1\,b_1}{p_1\,b_1+q_1\,b}\quad \text{и}\quad \frac{q_1\,b}{p_1\,b_1+q_1\,b}.$$

Доказ става 6. На основу последице ставова 4 и 5 је

$$A=p_1\frac{f(\xi+0)}{g(\xi+0)}+q_1\frac{f(\xi-0)}{g(\xi-0)},$$

$$a\leqslant\xi\leqslant b,\quad p_1\geqslant 0,\quad q_1\geqslant 0,\quad p_1+q_1=1,$$

а по леми одавде следи

$$A=\frac{p\,f(\xi+0)+q\,f(\xi-0)}{p\,g(\xi+0)+q\,f(\xi-0)},\quad p\geqslant 0,\quad q\geqslant 0,\quad p+q=1.$$

3. Следећи ставови су уопштења ставова о средњој вредности за интеграле, формулисана за Stieltjes-ове интеграле. Из њих је лако добити одговарајуће ставове за Riemann-ове интеграле.

Став 7. *Ако је функција* $g(x)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b) *а* $f(x)$ *припада класи* PS, *при чему им се тачке дисконтинуитета не поклапају, онда постоје два броја* $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, $p+q=1$, *и једно* ξ *из размака* (a, b) *тако да је*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\{p\,f(\xi+0)+q\,f(\xi-0)\}\,\{g(b)-g(a)\}. \tag{3.1}$$

Доказ се добија ако се на неједначину [**2**; стр. 72]

$$\operatorname*{Min}_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)\{g(b)-g(a)\} \leqslant \int_a^b f(x)\,dg(x) \leqslant \operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)\{g(b)-g(a)\}$$

примени последица ставова 4 и 5.

Став 8. *Нека су функције класе* PS $g(x)$ *и* $h(x)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b) *и нека је*

$$h(x) - h(a) > 0.$$

Ако је функција $f(x)$ *позитивна и интеграбилна у односу на обе функције* $g(x)$ *и* $h(x)$ *и ако она у том размаку не расте, тада постоје два броја* $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p+q=1$, *и једно* ξ *из размака* (a, b) *тако да је*

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dg(x)}{\int_a^b f(x)\,dh(x)} = \frac{p\,g(\xi+0)+q\,g(\xi-0)-g(a)}{p\,h(\xi+0)+q\,h(\xi-0)-h(a)} \tag{3.2}$$

Доказ се добија ако се на неједначине [**2**; стр. 79]

$$\operatorname*{Min}_{a \leqslant x \leqslant b} \frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dg(x)}{\int_a^b f(x)\,dh(x)} \leqslant \operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant b} \frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)}$$

примени став 6.

Напоменнмо на крају да ставови **7** и 8 вреде не само за функције класе PS него и за све функције које имају тачке дисконтинуитета прве врсте. Наиме вредност интеграла се неће променити ако у тачкама дисконтинуитета функцији дамо ма коју вредност, па значи и ону која ће задовољити дефиницију класе PS.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Карамата — О теореми о средњој вредности. *Зборник Математичког института САН* **1**, стр. 119–124, 1951.

[2] J. Карамата — Теорија и пракса Stieltjes-ова интеграла, Београд 1949.

QUELQUES EXTENSIONS DES THÉORÈMES DE MOYENNE

Par V. Vučković

En supposant que les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ admettent leurs dérivées droites et gauches $f'_+(x)$, $\varphi'_+(x)$, $f'_-(x)$, $\varphi'_-(x)$ que $\varphi'_-(x)$ et $\varphi'_+(x)$ ont le même signe et sont $\neq 0$, on démontre qu'il existent deux nombres $p > 0$, $q > 0$, $p+q=1$ et un ξ dans l'intervalle considéré (a, b) tels que la formule (1.2), qui généralise la formule bienconnue de Cauchy, ait lieu.

En s'appuyant sur ce résultat on établit la formule (1.3) pour le reste du dévelopement de Taylor, lorsque la fonction $f(x)$ admet une n-ième dérivée gauche et droite.

Pour les fonctions ne possédant que les points de discontinuités de première espéce on établit, sous des conditions usuelles, des théorèmes de moyenne exprimés qar les formules (3.1) et (3.2).