# ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА ПОЈМА ДАРБУОВА ВЕКТОРА И ЛАНКРЕОВА СТАВА ЗА РИМАНОВ ПРОСТОР

ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ

У овом чланку ћемо показати шта у Римановом простору $V_N$ од $N$ димензија, чија је метрика одређена метричком формом

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1}$$

која у општем случају може бити и индефинитна, одговара појму Дарбуовог вектора из диференцијалне геометрије тродимензионог Еуклидовог простора и како се уопштава тзв. Ланкреов став.

Ово питање је у тесној вези са Френеовим обрасцима које је за Риманов простор позитивно дефинитне метрике генералисао Блашке (Blaschke) [1]. Данас је питање Френеових образаца за сваки Риманов простор произвољне метрике потпуно пречишћено и излаже се и у модерним уџбеницима као што то напр., чини Синџ (Synge) [2]. Стога, пре но што пређемо на решавање проблема који смо поставили и који, уколико је нама познато, досад није решен, изнећемо укратко и генерализацију Френеових образаца, јер се наше излагање непосредно на то надовезује а и што ћемо тако учинити само наше излагање јаснијим.

Уочимо ради тога неку криву $C$ у Римановом простору $V_N$ и узмимо да његова метричка форма (1) може бити индефинитна, да одмах обухватимо најопштији случај. Та крива $C$ нека буде одређена једначинама

$$x^i = x^i(s) \tag{2}$$

где је $s$ лук криве мерен од одређене тачке. Тада је

$$\frac{dx^i}{ds} = t^i_{(1)} \tag{3}$$

јединични вектор (орт) *тангенте* те криве, па ће бити

$$a_{ij}\, t^i_{(1)}\, t^j_{(1)} = t_{(1)\,i}\, t^i_{(1)} = \varepsilon_1 \tag{4}$$

или

$$\varepsilon_1\, t_{(1)i}\, t^i_{(1)} = 1\,, \tag{4'}$$

где је $\varepsilon_1$ тзв. *индикатор* смера тангенте и може бити $+1$ или $-1$. У случају позитивно дефинитне метрике биће $\varepsilon_1$ увек једнако $+1$. Разумљиво је да је јединични вектор дефинисан у Римановом простору индефинитне метрике само за она померања из уочене тачке, кад је $ds \neq 0$, тј. кад се не ради о нула померању.

Апсолутним (Бјанкијевим) диференцирањем једначине (4) по луку $s$ добићемо

$$t_{(1)i}\,\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = 0\,, \tag{5}$$

што показује да је вектор $\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s}$ управан на тангенти криве у уоченој тачки. Јединични вектор $t^i_{(2)}$ вектора $\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s}$ зове се јединични вектор *прве нормале*. Интезитет тог вектора, тј.

$$\left|\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s}\right| = \varkappa_1$$

зове се *прва кривина* уочене криве $C$. Према томе биће

$$\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = \varkappa_1\, t^i_{(2)} \tag{6}$$

и

$$\varepsilon_2\, t_{(2)i}\, t^i_{(2)} = 1\,, \tag{7}$$

где је сад $\varepsilon_2$ индикатор прве нормале. Образац (6) је *први Френеов образац* у општем Римановом простору.

Из једначине (7) апсолутним диференцирањем добијамо

$$t_{(2)i}\,\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = 0\,, \tag{8}$$

одакле се види да је вектор $\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s}$ управан на првој нормали, а на њој је управан и орт тангенте $t^i_{(1)}$, тј.

$$t_{(1)i}\, t^i_{(2)} = 0\,. \tag{9}$$

Према томе, вектор $\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s}$ може се разложити у две компоненте: једну у правцу тангенте и другу у правцу управном на $t^i_{(1)}$ и $t^i_{(2)}$

чији ћемо орт обележити са $t^i_{(3)}$, тако да буде

$$\varepsilon_3 \, t_{(3)\,i} \, t^i_{(3)} = 1 \, . \tag{10}$$

Ако интензитет компоненте вектора $\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s}$ у правцу $t^i_{(3)}$ обележимо са $\varkappa_2$, може се написати

$$\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = \varkappa_2 \, t^i_{(3)} + \alpha \, t^i_{(1)} \, , \tag{11}$$

где је $\alpha$ скалар који треба одредити. Множењем ове једначине са $t_{(1)\,i}$ добићемо на основу претпоставке о управности $t^i_{(1)}$ и $t^i_{(3)}$,

$$t_{(1)\,i} \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = \alpha \, \varepsilon_1 \, ,$$

а из (9) апсолутним диференцирањем с обзиром на (6) добијамо

$$t_{(1)\,i} \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = - \, t^i_{(2)} \frac{\delta t_{(1)\,i}}{\delta s} = - \, t_{(2)\,i} \frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} =$$

$$= - \varkappa_1 \, t_{(2)\,i} \, t^i_{(2)} = - \, \varepsilon_2 \varkappa_1 = \alpha \, \varepsilon_1 \, ,$$

одакле је

$$\alpha = - \, \varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \, \varkappa_1 \, .$$

Кад се у (11) унесе ова вредност за $\alpha$, добиће се *други Френеов образац*

$$\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = \varkappa_2 \, t^i_{(3)} - \varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \, \varkappa_1 \, t^i_{(1)} \, . \tag{12}$$

Овде је $t^i_{(3)}$ јединични вектор *друге нормале* криве $C$, а $\varkappa_2$ је њена *друга кривина* (која се у простору од три димензије зове и *торзија*),

Ако овај поступак наставимо, па једначину (10) апсолутно диференцирамо по $s$, добићемо

$$t_{(3)\,i} \frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s} = 0 \, , \tag{13}$$

што показује да је вектор $\frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s}$ управан на вектору $t_{(3)\,i}$. Знамо да је поред тога вектор $t^i_{(3)}$ нормалан на векторима $t^i_{(1)}$ и $t^i_{(2)}$, те се вектор $\dfrac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s}$ може разложити у две компоненте: једну у правцу вектора $t^i_{(2)}$ и другу у правцу нормалном на тродимензиони простор одређен векторима $t^i_{(1)}$, $t^i_{(2)}$ и $t^i_{(3)}$, тј. може написати

$$\frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s} = \varkappa_3 t^i_{(4)} + \beta t^i_{(2)}, \tag{14}$$

где је $t^i_{(4)}$ орт нормале на векторима $t^i_{(1)}$, $t^i_{(2)}$ и $t^i_{(3)}$, па задовољава услов

$$\varepsilon_3 t_{(3)i} t^i_{(3)} = 1 \tag{15}$$

и зове се јединични вектор *треће нормале.* Скалар $\varkappa_3$ је *трећа кривина* криве $C$, а $\beta$ скалар који треба одредити. После множења једначине (14) са $t_{(2)i}$, а кад се узме у обзир да је по претпоставци

$$t_{(2)i} t^i_{(4)} = 0, \tag{16}$$

добиће се

$$t_{(2)i} \frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s} = \varepsilon_2 \beta.$$

Да бисмо овде одредили $\beta$, диференцираћемо апсолутно једначину

$$t_{(2)i} t^i_{(3)} = 0, \tag{16'}$$

па ћемо, кад се узме у обзир (12) и да су сви вектори $t^i_{(1)}$, $t^i_{(2)}$, $t^i_{(3)}$ и $t^i_{(4)}$ ортонормирани, добити

$$t_{(2)i} \frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s} = - t^i_{(3)} \frac{\delta t_{(2)i}}{\delta s} = - t_{(3)i} \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} = - \varepsilon_3 \varkappa_2 = \varepsilon_2 \beta,$$

одакле следи

$$\beta = - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varkappa_2 .$$

Уношењем ове вредности за $\beta$ у једначини (14) добија се *трећи Френеов образац*

$$\frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s} = \varkappa_3 t^i_{(4)} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varkappa_2 t^i_{(2)} . \tag{17}$$

Ако се овај сад по својој структури јасан поступак конструисања ортонормираних вектора $t^i_{(h)}$ продужи, може се у општем случају за *h-ти Френеов образац* написати

$$\frac{\delta t^i_{(h)}}{\delta s} = \varkappa_h t^i_{(h+1)} - \varepsilon_{h-1} \varepsilon_h \varkappa_{h-1} t^i_{(h-1)} , \tag{18}$$

при чему је

$$t_{(k)i}\, t^{i}_{(l)} = \varepsilon_k\, \delta_{kl} = \begin{cases} \varepsilon_k & \text{за } k = l \\ 0 & \text{за } k \neq l, \end{cases} \tag{19}$$

за $h = 1, 2, \ldots, N-1$. При томе је по договору

$$\varkappa_0 = \varkappa_N = 0. \tag{20}$$

Овде је $\varkappa_h$ *h-ūа кривина* криве $C$, а $t^{i}_{(h)}$ орт $(h-1)$-е *нормале* те криве.

На крају ћемо написати и закључни Френеов образац за Риманов простор $V_N$ од $N$ димензија. Њега је лако добити, кад се у (18) стави $h = N$ и узме у обзир (20). Он гласи

$$\frac{\delta\, t^{i}_{(N)}}{\delta s} = -\varepsilon_{N-1}\, \varepsilon_N\, \varkappa_{N-1}\, t^{i}_{(N-1)}. \tag{21}$$

У овом извођењу претпостављено је да су свих $N-1$ кривина различите од нуле и онда се може конструисати потпуно одређени $N$-едар ортонормираних вектора $t^{i}_{(k)}$ — *ūриродни N-едар* криве $C$ у Римановом простору $V_N$. Ако је, међутим, ма која од кривина, напр. $\varkappa_M$ $(M < N)$, једнака нули, описани поступак конструисања ортонормираних вектора се прекида и $N-M$ осталих јединичних вектора остају неодређени.

Да пређемо на сам наш проблем, уочимо детерминанту $|t^{i}_{(k)}|$. С обзиром на једначине (19) ова детерминанта је ортогонална, тј.

$$|t^{i}_{(k)}| = \pm 1, \tag{22}$$

јер је систем ортонормираних вектора $t^{i}_{(k)}$ локални Декартов правоугли $N$-едар. Једначине (19) изражавају услов да су вектори колона ($k$ и $l$ су индекси колона) у тој детерминанти ортонормирани. Међутим, у таквој детерминанти се $t_{(k)i}$ може сматрати као кофактор елемента $t^{i}_{(k)}$ у детерминанти $|t^{i}_{(k)}|$ подељен вредношћу саме те детерминанте (што уосталом или не мења тај кофактор или мења само знак, према томе је ли њена вредност $+1$ или $-1$). Стога се увек може једначини (19) написати аналогна једначина за врсте у облику

$$\sum_k t_{(k)i}\, t^{j}_{(k)} = \varepsilon_i\, \delta^{j}_{i} = \begin{cases} \varepsilon_i & \text{за } i = j \\ 0 & \text{за } i \neq j. \end{cases} \tag{23}$$

Извод неког од ових ортонормираних вектора, напр. јединичног вектора $t_{(h)i}$, у правцу другог неког од тих вектора, рецимо $t^i_{(l)}$, биће по дефиницији израз

$$t_{(h)i,j}\, t^j_{(l)}\,.$$

Пројекција овако добијеног вектора са слободним индексом $i$ на неки трећи јединични вектор нашег система, напр. $t^i_{(k)}$, даће скаларну инваријанту

$$\gamma_{(hkl)} = t_{(h)i,j}\, t^i_{(k)}\, t^j_{(l)}. \tag{24}$$

Ове скаларне инваријанте $\gamma_{(hkl)}$, одређене у вези са системом ортонормираних вектора $t^i_{(k)}$, зову се *Ричијеви коефицијенти ротације*. Индекси $h$, $k$, $l$ овде не означују тензорску природу, већ само означују редни број вектора који се појављују у изразу са десне стране у (24) и стога су стављени у заграду. При томе је, по договору, први индекс — индекс вектора чији се извод тражи, други је индекс вектора на који се пројицира, а трећи је индекс вектора у чијем се правцу одређује извод.

Ричијеви коефицијенти образују систем скаларних инваријаната који је антисиметричан у односу на прва два индекса, што је познато, тј. увек је

$$\gamma_{(hkl)} = -\gamma_{(khl)} \tag{25}$$

и

$$\gamma_{(hhl)} = 0. \tag{26}$$

Релација (24) која дефинише Ричијеве коефицијенте ротације може се, како је познато, написати и у облику

$$\gamma_{(hkl)} = t^i_{(h),j}\, t_{(k)i}\, t^j_{(l)}, \tag{27}$$

одакле се за $l=1$ добија

$$\gamma_{(hk1)} = t^i_{(k),j}\, t_{(k)i}\, t^j_{(1)}. \tag{28}$$

Како за апсолутно диференцирање увек вреди

$$\frac{\delta t^i_{(h)}}{\delta s} = t^i_{(h),j}\, \frac{dx^j}{ds} = t^i_{(h),j}\, t^j_{(1)}, \tag{29}$$

биће

$$\gamma_{(hk1)} = \frac{\delta t^i_{(h)}}{\delta s}\, t_{(k)i}\,. \tag{30}$$

За антисиметрични систем Ричијевих коефицијената ротације $\gamma_{(hk1)}$, који је другог реда, увешћемо ознаку $\omega_{hk}$, тј. ставићемо

$$\gamma_{(hk1)} = \omega_{hk}, \tag{31}$$

па ће бити

$$\omega_{hk} = -\omega_{kh}. \tag{32}$$

Овај антисиметрични систем $\omega_{hk}$ зваћемо засад *Дарбуов оператор*.

Поред антисиметричности систем $\omega_{hk}$ има још једну нарочиту особину. Наиме, из једначине (30) се на основу једначина (18) добија

$$\omega_{hk} = [\varkappa_h t^i_{(h+1)} - \varepsilon_{h-1} \varepsilon_h \varkappa_{h-1} t^i_{(h-1)}] t_{(k)i},$$

а одатле на основу (19) проистиче да ће бити

$$\omega_{h\,h+1} = \varepsilon_{h+1} \varkappa_h, \qquad \omega_{h\,h-1} = -\varepsilon_h \varkappa_{h-1}. \tag{33}$$

Према томе, само оне координате Дарбуовог оператора $\omega_{hk}$ различите су од нуле чији се индекси разликују међусобно за јединицу, а све остале су једнаке нули. Матрица овог Дарбуовог оператора изгледаће стога

$$\{\omega_{hk}\} = \begin{Bmatrix} 0 & \varepsilon_2\varkappa_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2\varkappa_1 & 0 & \varepsilon_3\varkappa_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_3\varkappa_2 & 0 & \varepsilon_4\varkappa_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_N\varkappa_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon_N\varkappa_{N-1} & 0 \end{Bmatrix}. \tag{34}$$

Укупан број координата које могу бити различите и од нуле и међу собом износи код Дарбуовог оператора у општем случају $N-1$.

Занимљиво је приметити да кад је $N$ непаран број ($N=2p+1$, где је $p$ позитиван цео број) вредност детерминанте $|\omega_{hk}|$ увек је једнака нули. За $N$ паран број ($N=2p$) њена вредност није негативна и једнака је производу квадрата кривина са непарним индексима, тј. у том случају ће бити

$$|\omega_{hk}| = \varkappa_1^2 \varkappa_3^2 \cdots \varkappa_{2p-1}^2, \tag{35}$$

што је лако проверити.

Назвали смо за први мах систем $\omega_{hk}$ оператором, јер су му елементи $\varkappa_i$ $(i=1, 2, \ldots, N-1)$, а то су кривине криве $C$ у посматраном Римановом простору. У нашем излагању се претпоставља да су ове кривине различите од нуле, јер се остали случајеви лако изводе одатле. Кривине $\varkappa_i$ су промењиве од тачке до тачке, оне су функције положаја, али су независне од избора координатног система референције. Међутим, очигледно је да се овај систем вредности може схватити и као систем координата антисиметричног тензора, који је у свакој тачки криве $C$ одређен из услова да су му координате у односу на локални природни $N$-едар референције бројно и по димензији једнаке кривинама уочене криве у тој тачки. У том смислу се $\omega_{hk}$ може сматрати као антисиметрични двоструки коваријантни тензор, који ћемо назвати *Дарбуов тензор* придружен датој кривој $C$ у Римановом простору $V_N$ од $N$ димензија.

У тродимензионом Еуклидовом простору (чија је метрика наравно позитивно дефинитна) наш се Дарбуов тензор своди на тензор трећег реда

$$\{\omega_{hk}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \varkappa_1 & 0 \\ -\varkappa_1 & 0 & \varkappa_2 \\ 0 & -\varkappa_2 & 0 \end{array} \right\}, \tag{36}$$

коме се на познати начин у том простору може координирати помоћу $e$-система релативни вектор

$$\mathfrak{d} = \{ d^i \}$$

једначином

$$d^i = \frac{1}{2} e^{ijk} \omega_{jk}. \tag{37}$$

Кад се узме у обзир особина (33) координата Дарбуовог тензора, увиђа се одмах да ће бити

$$\mathfrak{d} = \{\varkappa_2, 0, \varkappa_1\}, \tag{38}$$

што се може написати и у облику

$$d^i = \varkappa_2 \, t^i_{(1)} + \varkappa_1 \, t^i_{(3)}, \tag{39}$$

а то је познати Дарбуов вектор који увек лежи у ректификационој равни уочене тродимензионе криве.

Према томе, Дарбуов тензор $\omega_{hk}$ одговара у Римановом простору $V_N$ појму Дарбуовог вектора из диференцијалне геометрије тродимензионог Еуклидовог простора. Дарбуов тензор је генерализација појма Дарбуовог вектора. Међутим, из ових излагања је јасно да и у тродимензионом простору иза тзв. Дарбуовог вектора стоји антисиметрични тензор другог реда као и у општем случају ма ког броја димензија, само што се у општем случају овом не може координирати никакав вектор.

Шта геометриски значе координате Дарбуовог тензора то смо видели, а сада ћемо показати и њихово кинематичко тумачење, јер Ричијеви коефицијенти ротације имају своје кинематичко значење, одакле им име потиче. У том циљу уочимо на кривој $C$ поред локалног система ортонормираних вектора $t^i_{(k)}$ и неки јединични вектор $\xi^i$ ($\xi^i \xi_i = 1$) који се дуж криве $C$ паралелно помера, тј. који дуж криве $C$ задовољава услов

$$\xi^i_{,j}\, t^j_{(1)} = 0 . \tag{40}$$

Косинус угла $\theta_{(K)}$ између јединичног вектора $\xi^i$ и ма ког од јединичних вектора система, напр. јединичног вектора $t^i_{(K)}$, биће одређен обрасцем

$$\cos\theta_{(K)} = \xi^i\, t_{(K)i} . \tag{41}$$

Ако се одреди извод ове једначине у правцу криве, тј. у правцу јединичног вектора тангенте $t^i_{(1)}$ те криве, добиће се с обзиром на услов (40)

$$\frac{d(\cos\theta_{(K)})}{ds} = -\sin\theta_{(K)} \frac{d\theta_{(K)}}{ds} = (\xi^i\, t_{(K)i})_{,j}\, t^j_{(1)} =$$

$$= \xi^i_{,j}\, t^j_{(1)}\, t_{(K)i} + \xi^i\, t_{(K)i,j}\, t^j_{(1)} = \xi^i\, t_{(K)i,j}\, t^j_{(1)} .$$

Овај образац одређује промену на јединицу лука (одн. брзину промене, кад се узме $s = t$, где је $t$ време) косинуса угла између два правца од којих се један помера паралелно дуж криве а други природно као орт једне од њених нормала. Ако још као почетни положај уочимо онај у коме се орт $\xi^i$ поклапа са неким другим од ортова нормала нашег система, напр. са $t^i_{(H)}$, биће у том случају угао $\theta_{(KH)} = \pi/2$ и претходни израз своди се на

$$-\frac{d\theta_{(KH)}}{ds} = t_{(K)i,j}\, t^i_{(H)}\, t^j_{(1)} ,$$

тј. према (28) и (31) на

$$\frac{d\theta_{(KH)}}{ds} = -\omega_{KH} = \omega_{HK} . \tag{42}$$

Према томе, координате Дарбуовог тензора претстављају промену угла у односу на лук криве (одн. брзину те промене) између правца $t^i_{(K)}$ и правца $t^i_{(H)}$ кад се овај други паралелно помера дуж криве. Другим речима, координате $\omega_{HK}$ Дарбуовог тензора претстављају брзину ротације вектора $t^i_{(K)}$ око криве при померању дуж криве у односу на паралелно померени вектор $t^i_{(H)}$.

Да бисмо показали у чему је генерализација Ланкреовог става, помножићемо једначину (30) ортом $t^i_{(k)}$ и извршити сабирање по $k$, па ћемо с обзиром на (23) и (31) моћи да напишемо

$$\varepsilon_i \frac{\delta t^i_{(h)}}{\delta s} = \sum_k \omega_{hk}\, t^i_{(k)}, \tag{43}$$

одакле у општем случају следи

$$\left| \frac{\delta t^i_{(h)}}{\delta s} \right|^2 = \sum_k (\omega_{hk})^2 \cdot \varkappa_{h-1}^2 + \varkappa_h^2, \tag{44}$$

што је одмах јасно. Напр., за $h=2$ (прва нормала) имамо

$$\left| \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} \right|^2 = (\omega_{21})^2 + (\omega_{23})^2 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 .$$

Сад је лако увидети у чему може бити генерализација тзв. *Ланкреовог става*. Наиме, у Еуклидовом тродимензионом простору, кад се са $\varkappa$ обележи *тотална кривина* криве линије важи Ланкреов став у облику

$$\varkappa^2 = \varkappa_1^2 + {}_2^2 . \tag{45}$$

Очигледно је онда да се са једног становишта, кад се узме у обзир да се једначина (45) у тродимензионом простору може изразити и у облику

$$\varkappa^2 = \left| \frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s} \right|^2 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2, \tag{46}$$

једначина (44) може сматрати као генерализација Ланкреовог става за Риманов простор. Са тог гледишта је обичан Ланкреов став уствари скоро тривијалан специјални случај општег става (44).

Међутим, јасно је да се сад на Ланкреов став може гледати и са другог становишта и да се он може сад и друкчије тумачити. Ако се, наиме, узме да $\varkappa^2$ обележава збир квадрата свих могућих кривина дате криве (што је случај у тродимензионом простору), тада би односни израз у Римановом простору $V_N$ гласио

$$\varkappa^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \varkappa_i^2 . \tag{47}$$

Тај израз за $\varkappa^2$ може се у тродимензионом простору написати и помоћу извода јединичних вектора у облику

$$\varkappa^2 = \frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s}\right|^2 + \left|\frac{\delta t^i_{(2)}}{\delta s}\right|^2 + \left|\frac{\delta t^i_{(3)}}{\delta s}\right|^2\right\}, \tag{48}$$

коме у Римановом простору $V_N$ одговара очигледно израз

$$\varkappa^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{\delta t^i_{(k)}}{\delta s}\right|^2 . \tag{49}$$

Најзад, као генерализација израза (48) може се сматрати и

$$\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{\delta t^i_{(k)}}{\delta s}\right|^2 \tag{50}$$

који се своди на (48) за $N=3$, али у општем случају није једнак $\varkappa^2$.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Blaschke — Frenets Formeln für den Raum von Riemann. *Math. Zeitschrift* **6**, S. 94—99, 1920.

[2] J. L. Synge — Tensor Calculus. *Univ. of Toronto Press*, Toronto 1949.

## VERALLGEMEINERUNG DES BEGRIFFS DES DARBOUX'SCHEN VEKTORS FÜR DEN RAUM VON RIEMANN

Tatomir Angelitch

In diesem Aufsatz wird gezeigt was in Riemanns Raum $V_N$ von $N$ Dimensionen, dessen Metrik durch die im allgemeinen Falle indefinite quadratische Form

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1}$$

festgelegt ist, dem Begriff des Darboux'schen Vektors der Differentialgeometrie des Euklidischen dreidimensionalen Raumes entspricht und wie für den Riemannschen Raum der sogenannte Lancret'sche Satz verallgemeinert werden kann.

Der Verfasser knüpft seine Ausführungen an eine Arbeit von W. Blaschke (Frenets Formeln für den Raum von Riemann. *Math.*

*Zeitschrift* **6**, S. 94–99, 1920) und zeigt, dass dem Begriff des Darboux'schen Vektors ein antisymmetrischer Tensor $\omega_{hk}$ $N$-ter Ordnung entspricht von der Form

$$\{\omega_{hk}\} = \begin{Bmatrix} 0 & \varepsilon_2 \varkappa_1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 \varkappa_1 & 0 & \varepsilon_3 \varkappa_2 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \varkappa_2 & 0 & \varepsilon_4 \varkappa_3 \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & \varepsilon_N \varkappa_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & -\varepsilon_N \varkappa_{N-1} & 0 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

wo $\varkappa_h$ die $N-1$ Krümmungen und $\varepsilon_h$ die Zeiger der Richtung der einzelnen Einheitsvektoren des lokalen natürlichen $N$-Beins der gegebenen Kurve sind.

Zum Schluss weist der Verfasser auf verschiedene Möglichkeiten der Verallgemeinerung des Lancret'schen Satzes.