

ДОКАЗ ЯКОБИЈЕВОГ ТЕОРЕМА О СФЕРНОЈ СЛИЦИ ГЛАВНИХ НОРМАЛА ЗАТВОРЕНЕ КРИВУЉЕ

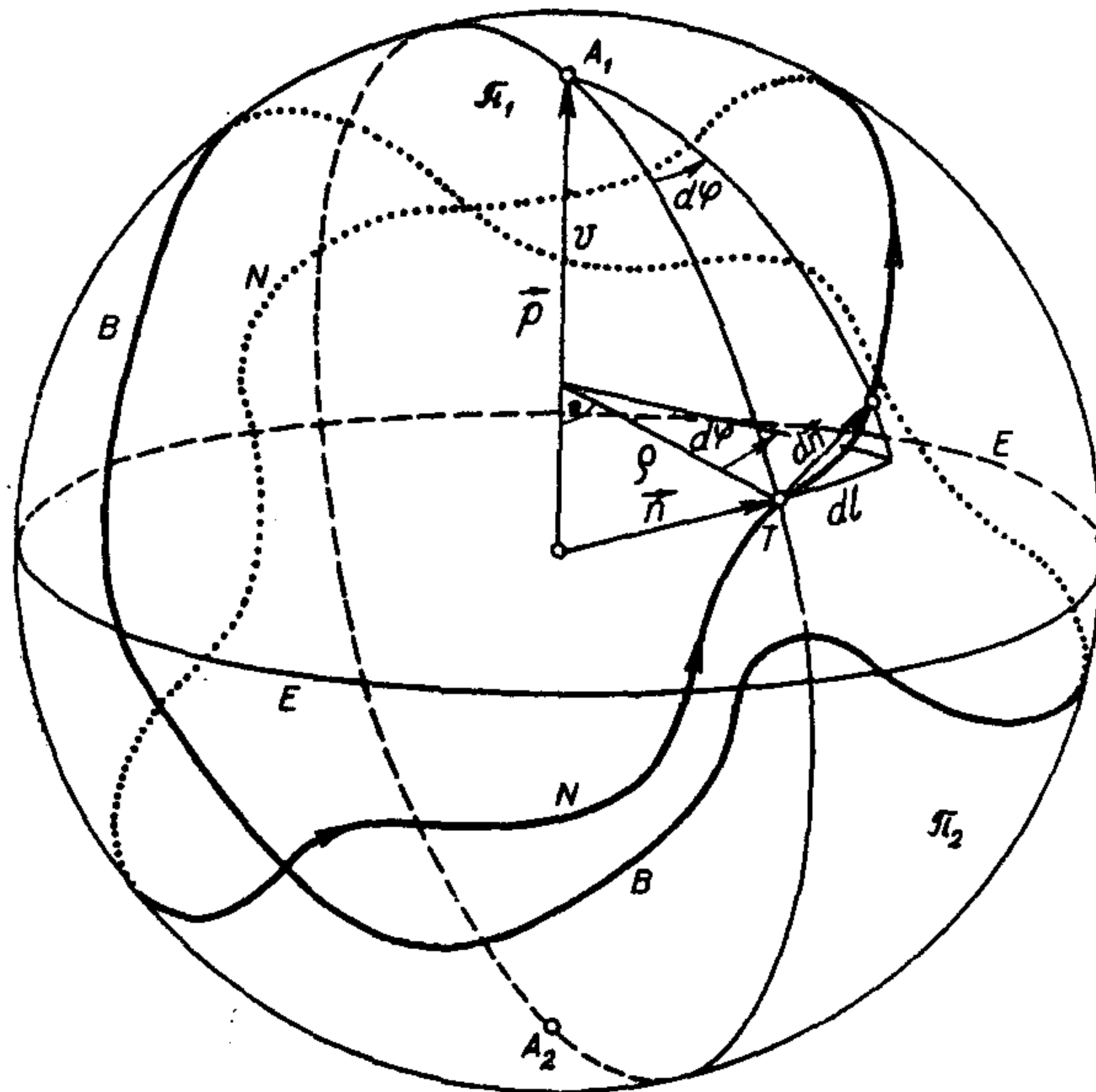
СТАНКО БИЛИНСКИ (Загреб)

Нека је C затворена кривуља у простору без сингуларних тачака, а N нека је сферна слика њезиних главних нормала. Претпостављамо да је и кривуља N без двоструких тачака и да дијели јединичну куглу на два једноставно-сувисла подручја Π_1 и Π_2 . Показат ћемо, да тада оба ова подручја имају једнаку површину.¹⁾

Одаберимо у ту сврху на јединичној кугли сферне слике N било коју чврсту тачку A_1 подручја Π_1 као један (сјеверни) „пол“ те кугле. Избор пола A_1 нека је само тиме ограничен, да дијаметрално супротна тачка, тј. други (јужни) пол A_2 , припада подручју Π_2 . (Није тешко разабрати, да је то уз горње претпоставке увијек могуће учинити).

Нека је пол A_1 одређен константним радијектором $\vec{p}$. Нека

је надаље куглина плоха оријентирана. Кривуљу C ћемо тада тако оријентирати, да је припадном оријентацијом кривуље N подручје Π_1 позитивно оријентирано. Обиђе ли тачка T једном цијелу кривуљу N у позитивном смислу, мањи од лукова $\widehat{A_1T}$ главног круга



Сл. 1

¹⁾ C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke, Bd VII., p. 39.

кугле ће при том једанпут позитивно описати цијелу површину подручја Π_1 .

Ако је v висина калоте јединичне кугле, површина оног сектора те калоте, који припада централном куту φ , износи $v\varphi$, па је према томе површина P_1 подручја Π_1 једнака

$$P_1 = \int_N v d\varphi \quad (1)$$

Нека је $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ једнацба кривуље C , а $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$ једнацба кривуље N , гдје је s дуљина лука на кривуљи C .

Ако је $T(s)$ точка кривуље N одређена радијектором $\mathbf{n}$, бит ће $\frac{\mathbf{p} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{p} \times \mathbf{n}|}$ јединични вектор, који у точки T одређује позитивни смјер географске паралеле. Тад је пројекција dl вектора $d\mathbf{n}$ у смјер географске паралеле једнака $\frac{\mathbf{p} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{p} \times \mathbf{n}|} \cdot d\mathbf{n}$.

Дакле је

$$dl = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{n}, d\mathbf{n})}{|\mathbf{p} \times \mathbf{n}|}, \quad (2)$$

Надаље је

$$dl = \rho d\varphi, \quad (3)$$

гдје је

$$\rho = |\mathbf{p} \times \mathbf{n}|. \quad (4)$$

Ради (3), (4) и (2) бит ће дакле

$$d\varphi = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{n}, d\mathbf{n})}{(\mathbf{p} \times \mathbf{n})^2}. \quad (5)$$

Будући да је осим тога

$$v = 1 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}, \quad (6)$$

то према (5), (6), и (1) излази

$$P_1 = \int_C \frac{1 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{p} \times \mathbf{n})^2} (\mathbf{p}, \mathbf{n}, d\mathbf{n}). \quad (7)$$

Пол A_2 је одређен радијектором $(-\mathbf{p})$. Будући да је подручје Π_1 кривуљом N позитивно оријентирано, иста оријентација кривуље N придаје подручју Π_2 негативну оријентацију. Тако добивамо за површину P_2 подручја Π_2 израз

$$P_2 = - \int_C \frac{1 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{p} \times \mathbf{n})^2} (\mathbf{p}, \mathbf{n}, d\mathbf{n}). \quad (8)$$

Означимо ли сада

$$P_2 - P_1 = 2J, \quad (9)$$

онда је према (7) и (8)

$$J = \int_C \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{p} \times \mathbf{n})^2} (\mathbf{p}, \mathbf{n}, d\mathbf{n}). \quad (10)$$

Докажемо ли да је вриједност интеграла (10) једнака нули, бит ће ради (9) тиме и Јакобијев теорем доказан.

Примјеном Frenet-ових формула

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n},$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b},$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}$$

излази из (10) редом

$$\begin{aligned} J &= \int_C \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{p} \times \mathbf{n})^2} (\mathbf{p}, \mathbf{n}, -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) ds = \\ &= \int_C \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}) \kappa + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}) \tau}{(\mathbf{p} \times \mathbf{n})^2} ds = \\ &= \int_C \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}) d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}) d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{b})}{[\mathbf{p} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{t})]^2}. \end{aligned}$$

Будући да је $\mathbf{p} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{t}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}) - \mathbf{t} \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{b})$, можемо даље писати

$$J = \int_C \frac{\frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}) d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}) d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{b})}{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{b})^2}}{1 + \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}}\right)^2} = \int_C \frac{d\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}}\right)}{1 + \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}}\right)^2},$$

па је дакле

$$J = \arctg \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}} \Big|_{s_1}^{s_1+L}, \quad (11)$$

гдје је $T_1(s_1)$ било која точка кривуље C , а L дуљина лука цијеле те кривуље. Но L је онда период векторских функција $\mathbf{t}$ и $\mathbf{b}$, а ради тога и период функције $\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}}$.

Ипак не можемо одатле одмах закључити, да је вриједност (11) интеграла J увијек једнака нули. Ради многозначности функције arctg постоји наине могућност да је та вриједност једнака неком многократнику од π .

Но овдје ћемо сада показати, да се након једног обиласка око цијеле кривуље C долази и опет до исте детерминације функције $\operatorname{arctg} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}}$, па да према томе интеграл J доиста ишчезава.

Ако кривуља C не лежи у једној равнини, бит ће и кривуља B , т. ј. њезина сферна слика бинормале, нека затворена сферна кривуља. Будућу да сферна слика тангенте T и сферна слика бинормале B нигдје не могу за исту вриједност параметра s сјећи екватор E , нигдје не може функција $\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}}$ бити неодређена,

а сваки пут, кад кривуља B пресијече екватор E , пријећи ће $\operatorname{arctg} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}}$ преко неизмјерности на сусједну детерминацију. Али

B је непрекидна затворена кривуља, па колико год пута она пресијецајући екватор прелази с једне куглине полутке на другу, толико се пута и враћа натраг на исту полутку, док не стигне на почетну точку. Ради тога ћемо се, пошавши од било које детерминације функције $\operatorname{arctg} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}}$, након једног обиласка око цијеле кривуље

C при повратку на почетну точку увијек вратити с почетном детерминацијом. Зато је у сваком случају $J=0$ и Јакобијев теорем тиме доказан.

SUR UN THÉORÈME DE JACOBI

Par Stanko Bilinski

Sans faire intervenir explicitement le théorème de Gauss-Bonnet, l'auteur démontre le théorème de Jacobi, à savoir que:

L'image sphérique de la normale principale d'une courbe fermée régulière divise la surface de la sphère en deux parties égales.