# О ЕГЗИСТЕНЦИЈИ РЕШЕЊА ЈЕДНЕ КЛАСЕ ИМПЛИЦИТНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА

РАНКО БОЈАНИЋ (Београд)

**1.** Постоје углавном два различита поступка за испитивање егзистенције решења имплицитне диференцијалне једначине

$$x' - f(t, x, x') = 0 .$$

Један поступак заснива се на теорији имплицитних функција, а састоји се у томе да се испита под којим се претпоставкама о функцији $f(t, x, x')$ претходна једначина може решити по $x'$ [**1**; стр. 151—170][1]. Други поступак је онај који се употребљава кад се тражи не само егзистенција решења него и само решење; то је поступак сукцесивне апроксимације. Један став те врсте дао је F. A. Valentine [**2**]. Његов став гласи:

*Нека је у области* $(A, B, B')$ *дефинисаној неједначинама*

$$|t - t_0| \leqslant A, \quad |x - x_0| \leqslant B, \quad |x' - x_0'| \leqslant B'$$

*функција* $f(t, x, x')$ *непрекидна и*

$$|f(t, x, x')| \leqslant M .$$

*Претпоставимо да постоје позитивне константе* $\varepsilon, L$ *и* $K$ $(K < 1)$, *такве да је за свако* $t, x, x'$ *области* $(A, B, B')$

$$|f(t, \bar{x}, \bar{x}') - f(t, \underline{x}, \underline{x}')| \leqslant L\,|\bar{x} - \underline{x}| + K\,|\bar{x}' - \underline{x}'|, \tag{1}$$

$$|f(t, x_0, x_0') - f(t_0, x_0, x_0')| \leqslant \varepsilon < (1 - K)\, B' \tag{2}$$

*и да је*

$$x_0' = f(t_0, x_0, x_0') .$$

*Тада постоји једно и само једно решење почетног задатка*

$$x' = f(t, x, x'); \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0' \tag{3}$$

*дефинисано у размаку* $|t - t_0| \leqslant D$, *где је*

$$D = \min\left\{A, \frac{B}{M}, \frac{B'(1 - K) - \varepsilon}{LM}\right\}. \tag{4}$$

*То решење може се добити методом сукцесивне апроксимације.*

---

[1]) Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају чланка.

Овде ћемо дати један други доказ овог става који може да послужи као илустрација једног општег поступка за свођење нелинеарних проблема на линеарне. Тај поступак може се применити код граничних задатака нелинеарних диференцијалних једначина другог реда [3; a, b], затим код нелинеарних интегралних једначина са позитивним језгром, као и код нелинеарних парцијалних диференцијалних једначина елиптичког типа.

**2.** *Доказ.* Сукцесивне апроксимације почетног задатка (3) дефинисане су обрасцем

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\{t, x_{n-1}(t), x'_{n-1}(t)\}\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Једноставности ради претпоставимо да је $t > t_0$. Доказаћемо прво да функције $x_n(t)$ и $x_n'(t)$ припадају области $(D, B, B')$ дефинисаној неједначинама

$$t - t_0 \leqslant D, \quad |x - x_0| \leqslant B, \quad |x' - x_0'| \leqslant B',$$

при чему је $D$ дато обрасцем (4).

Функције $x_1(t)$ и $x_1'(t)$ припадају области $(D, B, B')$ јер је

$$|x_1(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(t, x_0, x_0')\, dt \right| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(t, x_0, x_0')|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M(t - t_0) \leqslant MD \leqslant B,$$

$$|x_1'(t) - x_0'| = |f(t, x_0, x_0') - f(t_0, x_0, x_0')| < \varepsilon < B'.$$

Претпоставимо да функције $x_n(t)$ и $x_n'(t)$ припадају области $(D, B, B')$. Тада је

$$|x_{n+1}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(t, x_n, x_n')\, dt \right| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(t, x_n, x_n')|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M(t - t_0) \leqslant MD \leqslant B.$$

Даље, на основу (1) и (2) је

$$|x'_{n+1}(t) - x_0'| = |f(t, x_n, x_n') - f(t_0, x_0, x_0')| \leqslant$$

$$\leqslant |f(t, x_n, x_n') - f(t, x_0, x_0')| + |f(t, x_0, x_0') - f(t_0, x_0, x_0')| \leqslant$$

$$\leqslant L|x_n - x_0| + K|x_n' - x_0'| + \varepsilon.$$

Ако је

$$|x'_{n+1}(t) - x_0'| \leqslant |x_n(t) - x_0'|$$

за $t-t_0 \leqslant D$, тада $x'_{n+1}(t)$ лежи у области $(D, B, B')$. Претпоставимо да постоји једно $t$ у размаку $t-t_0 \leqslant D$ за које је

$$|x'_{n+1}(t)-x_0'| > |x_n'(t)-x_0'|.$$

Тада је

$$|x'_{n+1}-x_0'| \leqslant L\,|x_n-x_0|+K\,|x_n'-x_0'|+\varepsilon$$

$$< L\,|x_n-x_0|+K\,|x'_{n+1}-x_0'|+\varepsilon,$$

тј.

$$|x'_{n+1}-x_0'| < \frac{\varepsilon+L\,|x_n-x_0|}{1-K} < \frac{\varepsilon+LMD}{1-K} \leqslant B'.$$

Тиме смо потпуном индукцијом доказали да функције $x_n(t)$ и $x_n'(t)$ дефинисане обрасцем (5) припадају области $(D, B, B')$.

Остало је још да докажемо да $x_n(t)$ конвергира решењу почетног задатка (3). Како је

$$|x_1(t)-x_0| \leqslant M\,(t-t_0) \leqslant 2M\,(t-t_0)$$

и

$$|x_1'(t)-x_0'| \leqslant |f(t, x_0, x_0')-f(t_0, x_0, x_0')| \leqslant 2M,$$

то стављајући

$$p_1(t)=2M\,(t-t_0)$$

и

$$q_1(t)=2M$$

добијамо да је

$$|x_1(t)-x_0(t)| \leqslant p_1(t)$$

и

$$|x_1'(t)-x_0'(t)| \leqslant q_1(t).$$

Претпоставимо сада да је

$$\left.\begin{aligned} &|x_\nu(t)-x_{\nu-1}(t)| \leqslant p_\nu(t), \\ &|x_\nu'(t)-x'_{\nu-1}(t)| \leqslant q_\nu(t), \end{aligned}\right\} \quad \nu=1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Доказаћемо најпре да из (6) следи

$$\begin{aligned} &|x_{n+1}(t)-x_n(t)| \leqslant p_{n+1}(t) \\ &|x'_{n+1}(t)-x_n'(t)| \leqslant q_{n+1}(t) \end{aligned} \tag{7}$$

ако погодно дефинишемо функције $p_n(t)$ и $q_n(t)$, а одатле непосредно следи да неједначине (7) важе за свако $n$.

Како је на основу (1) и (6):

$$| x_{n+1}(t) - x_n(t) | \leqslant \int_{t_0}^{t} | f(t, x_n, x_n') - f(t, x_{n-1}, x'_{n-1}) | \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \{ L | x_n - x_{n-1} | + K | x_n' - x'_{n-1} | \} \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \{ L p_n(t) + K q_n(t) \} \, dt$$

и

$$| x'_{n+1}(t) - x_n'(t) | \leqslant | f(t, x_n, x_n') - f(t, x_{n-1}, x'_{n-1}) | \leqslant$$

$$\leqslant L | x_n - x_{n-1} | + K | x_n' - x'_{n-1} | \leqslant$$

$$\leqslant L p_n(t) + K q_n(t),$$

то да би из (6) следило (7) треба функције $p_n(t)$ и $q_n(t)$ да дефинишемо тако да буде

$$p_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} \{ L p_n(t) + K q_n(t) \} \, dt$$

$$q_{n+1}(t) = L p_n(t) + K q_n(t).$$

Одавде видимо да су све функције $p_n(t)$ и $q_n(t)$ позитивне, јер су функције $p_1(t)$ и $q_1(t)$ позитивне, и да је

$$q_n(t) = p_n'(t),$$

тако да за функције $p_n(t)$ добијамо рекурентни образац

$$p_1(t) = 2M(t - t_0),$$

$$p_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} \{ L p_n(t) + K p_n'(t) \} \, dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

односно

$$p_1(t) = 2M(t - t_0),$$

$$p'_{n+1}(t) = K p_n'(t) + L p_n(t); \quad p_n(t_0) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Решење ове једначине је полином $n$-тог степена

$$p_n(t) = 2M \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} L^{\nu} K^{n-\nu-1} \frac{(t - t_0)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}.$$

Из

$$x_n(t)=x_0+\sum_{\nu=1}^{n}\{x_\nu(t)-x_{\nu-1}(t)\},$$

$$x_n'(t)=x_0'+\sum_{\nu=1}^{n}\{x_\nu'(t)-x'_{\nu-1}(t)\},$$

видимо да је за доказ конвергенције функција $x_n(t)$ и $x_n'(t)$ довољно да докажемо да конвергирају редови

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}p_\nu(t) \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}p_\nu'(t),$$

јер је

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\{x_\nu(t)-x_{\nu-1}(t)\}\right|\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu(t)-x_{\nu-1}(t)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}p_\nu(t)$$

и

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu'(t)-x'_{\nu-1}(t)\}\right|\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu'(t)-x'_{\nu-1}(t)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}p_\nu'(t).$$

Ставимо

$$P_n(t)=\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu(t), \qquad P_n'(t)=\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu'(t), \qquad n=1,2,\ldots \tag{9}$$

Доказаћемо прво да низови (9) конвергирају за довољно мало $t-t_0$. То непосредно следи из

$$p_n(t)=2M\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}L^\nu K^{n-\nu-1}\frac{(t-t_0)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\leqslant$$

$$\leqslant 2M\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}L^\nu K^{n-\nu-1}(t-t_0)^{\nu+1}=$$

$$\leqslant 2M(t-t_0)\{L(t-t_0)+K\}^{n-1},$$

односно

$$p_n'(t)=2M\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}L^\nu K^{n-\nu-1}\frac{(t-t_0)^\nu}{\nu!}\leqslant$$

$$\leqslant 2M\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}L^\nu K^{n-\nu-1}(t-t_0)^\nu=$$

$$\leqslant 2M\{L(t-t_0)+K\}^{n-1},$$

јер с обзиром да је $L>0$ и $0<K<1$, $t-t_0$ можемо увек изабрати тако мало да $L(t-t_0)+K$ буде мање од јединице.

Сада можемо да покажемо да низови (9) конвергирају за свако $t$. Сабирањем једначина (8) добијамо

$$P'_{n+1}(t)-p_1'(t)=KP_n'(t)+LP_n(t); \quad P_n(t_0)=0,$$

односно
$$P'_{n+1}(t) = 2M + KP_n'(t) + LP_n(t); \quad P_n(t_0) = 0, \tag{10}$$
јер је $p_1(t) = 2M(t - t_0)$. За довољно мало $t - t_0$, $\left(t - t_0 < \frac{1-K}{L}\right)$ биће
$$\lim_{n=\infty} P_n(t) = P(t), \quad \lim_{n=\infty} P_n'(t) = P'(t),$$
и кад у једначини (10) пустимо да $n \to \infty$ она постаје
$$P'(t) - \frac{L}{1-K} P(t) = \frac{2M}{1-K}; \quad P(t_0) = 0.$$
Њено решење је
$$P(t) = \frac{2M}{L}\left\{e^{\frac{L}{1-K}(t-t_0)} - 1\right\},$$
па на основу принципа о аналитичком продужењу редови
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu(t) = P(t) \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu'(t) = P'(t)$$
конвергирају за свако $t$ ако је $0 < K < 1$. Према томе, $x_n(t)$ и $x_n'(t)$ конвергирају ка некој граничној функцији $x(t)$ односно $x'(t)$ кад $n \to \infty$. Лако се може показати да је $x(t)$ решење постављеног задатка. На уобичајени начин види се да је ово решење једнозначно одређено почетним условима.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Lawrence M. Graves, — The Theory of Functions of Real Variables, New York and London 1947.

[2] F. A. Valentine — On the convergence of an iteration process for the differential equation $x' = f(t, x, x')$. *Seminar Reports in Mathematics* (Los Angelos), p. 77—84, 1944.

[3] В. Г. Авакумовић, — а) Сукцесивна апроксимација и нуле интеграла диференцијалних једначина другог реда. *Зборник радова Математичког Института САН* **1**, стр. 1—16, 1951; b) Über die Randwertaufgabe zweiter Ordnung. *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe*, t. IV (у штампи).

## EIN EXISTENZSATZ ÜBER DIE LÖSUNGEN EINER KLASSE IMPLIZITER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

Ranko Bojanić

Unter Benutzung einer modifizierten Methode der schrittweisen Annäherungen (wie in [**3**; b]) wird ein Beweis eines Satzes des Herrn F. A. Valentine gegeben.