# О КОНВЕРГЕНЦИЈИ ЈЕДНОГ НИЗА ПОЛИНОМА

РАНКО БОЈАНИЋ (Београд)

Нека је

$$p_1(x, \alpha) = x(1-x),$$
$$p''_{n+1}(x, \alpha) + \alpha p_n(x, \alpha) = 0 \tag{1}$$

и

$$p_n(0, \alpha) = p_n(1, \alpha) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Уопштавајући и пооштравајући Picard-ов став о егзистенцији решења граничног задатка

$$y'' = f(x, y); \qquad y(0) = y(1) = 0,$$

В. Г. Авакумовић [1][1]) је доказао да је за $|\alpha| < \pi^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(1/2, \alpha) = \frac{2}{\alpha}\left\{\frac{1}{\cos\sqrt{\alpha}/2} - 1\right\}, \tag{2}$$

а затим је на основу тога доказао да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x, \alpha) \tag{3}$$

конвергира за свако $x$ размака $(0, 1)$ ако је $0 \leqslant \alpha < \pi^2$.[2])

Авакумовићев доказ обрасца (2) почива на принципу аналитичког продужења. Према томе, остало је отворено питање да ли се образац (2) може доказати без употребе теорије функција комплексне променљиве, и да ли се конвергенција реда (3) може добити независно од тог обрасца.

У овом чланку доказаћу (2) елементарним путем. Штавише, из обрасца (6), који уствари претставља Fourier-ов ред полинома $p_n(x, \alpha)$, непосредно следи да ред (3) униформно конвергира за $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant \alpha < \pi^2$, тако да образац (2), уколико

---

1) Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају чланка.

2) У Авакумовићевој расправи уместо $p_n(x, \alpha)$ једноставности ради стављено је $p_n(x)$. Специјално, $p_n(1/2, \alpha) = m_n(\alpha)$.

се ради само о конвергенцији тог реда, није чак ни потребан. Осим тога, из доказа се види да се овим поступком може добити Fourier-ов ред функција $p_n(x, \alpha)$, дефинисаних обрасцима

$$p_1(x, \alpha) = H(x),$$

$$p''_{n+1}(x, \alpha) + \alpha p_n(x, \alpha) = 0$$

$$p_n(0, \alpha) = p_n(1, \alpha) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

при чему се за функцију $H(x)$ претпоставља само да се може развити у Fourier-ов ред (образац (5)).

У суштини реалног доказа обрасца (2) лежи развијање језгра интегралне једначине, која одговара граничном задатку (1), у Fourier-ов ред (Mercer-ов став).

*Доказ.* Диференцијалну једначину

$$p''_{n+1}(x, \alpha) + \alpha p_n(x, \alpha) = 0$$

заједно са граничним условима

$$p_n(0, \alpha) = p_n(1, \alpha) = 0$$

можемо изразити овом интегралном једначином

$$p_{n+1}(x, \alpha) = \alpha(1 - x) \int_0^x t p_n(t, \alpha)\, dt + \alpha x \int_x^1 (1 - t)\, p_n(t, \alpha)\, dt,$$

односно

$$p_{n+1}(x, \alpha) = \frac{\alpha}{2} \int_0^1 (x + t - |x - t| - 2xt)\, p_n(t, \alpha)\, dt.$$

Како је

$$x + t - |x - t| - 2xt = 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\pi x \sin \nu\pi t}{(\nu\pi)^2},$$

то је

$$p_{n+1}(x, \alpha) = 2\alpha \int_0^1 p_n(t, \alpha) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\pi x \sin \nu\pi t}{(\nu\pi)^2}\, dt.$$

Међутим, ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\pi x \sin \nu\pi t}{(\nu\pi)^2}$$

униформно конвергира, па се може интегрисати члан по члан. На тај начин добијамо

$$p_{n+1}(x, \alpha) = 2\alpha \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\pi x}{(\nu\pi)^2} \int_0^1 p_n(t, \alpha) \sin \nu\pi t\, dt.$$

Означимо са $a_{n,\nu}$ Fourier-ов коефицијент функције $p_n(x, \alpha)$, тј. ставимо

$$a_{n,\nu} = 2\int_0^1 p_n(t, \alpha) \sin \nu\pi t \, dt.$$

Тада је

$$p_{n+1}(x, \alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha}{(\nu\pi)^2} a_{n,\nu} \sin \nu\pi x.$$

На основу познатог става о једнозначности Fourier-овог развитка функције $p_{n+1}(x, \alpha)$ добијамо да је

$$a_{n+1,\nu} = \frac{\alpha}{(\nu\pi)^2} a_{n,\nu}.$$

Одавде непосредно следи да је

$$a_{n,\nu} = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n-2} \frac{a_{1,\nu}}{\nu^{2n-2}}. \tag{4}$$

Према томе је

$$p_n(x, \alpha) = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n-2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{1,\nu}}{\nu^{2n-2}} \sin \nu\pi x, \tag{5}$$

при чему је

$$a_{1,\nu} = 2\int_0^1 p_1(t, \alpha) \sin \nu\pi t \, dt.$$

У специјалном случају, кад је $p_1(x, \alpha) = x(1-x)$, биће

$$a_{1,\nu} = \frac{4}{(\nu\pi)^3}(1 - \cos \nu\pi),$$

па је, према (4),

$$a_{n,\nu} = \frac{4}{\alpha\pi}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n} \frac{1 - \cos \nu\pi}{\nu^{2n+1}}.$$

Ако је $\nu = 2k$, онда је $1 - \cos 2k\pi = 0$, а ако је $\nu = 2k+1$ онда је $1 - \cos(2k+1)\pi = 2$. Према томе је

$$a_{n,2k} = 0, \qquad a_{n,2k+1} = \frac{8}{\alpha\pi}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n} \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}},$$

тако да је Fourier-ов ред функције $p_n(x, \alpha)$ коначно

$$p_n(x, \alpha) = \frac{8}{\alpha\pi}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2n+1}}. \tag{6}$$

Како је

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2n+1}} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} = c,$$

то је

$$p_n(x,\alpha)\leqslant\frac{8c}{\alpha\pi}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n},$$

па према томе ред (3) униформно конвергира за свако $x$ размака $(0, 1)$ ако је $0\leqslant\alpha<\pi^2$.

Да бисмо најзад добили образац (2), довољно је да у (6) ставимо $x=1/2$. Тада је

$$p_n(1/2,\alpha)=\frac{8}{\alpha\pi}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}.$$

Како је [2; књ. $\text{II}_2$ стр. 133]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}=\frac{(-1)^n}{2n!}\,\frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}}E_{2n},$$

где су $E_{2n}$ Euler-ови бројеви, то је

$$p_n(1/2,\alpha)=\frac{2}{\alpha}\,\frac{(-1)^n}{2n!}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{2n}E_{2n}.$$

Отуда следи

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n(1/2,\alpha)=\frac{2}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{2n}E_{2n},$$

односно

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n(1/2,\alpha)=\frac{2}{\alpha}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{2n}E_{2n}-1\right\}.$$

Коначно је [2; књ. $\text{II}_1$ стр. 313]

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n(1/2,\alpha)=\frac{2}{\alpha}\left\{\frac{1}{\cos\sqrt{\alpha}/2}-1\right\}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Авакумовић — a) Сукцесивна апроксимација и нуле интеграла диференцијалних једначина другог реда, *Зборник радова Математичког Института САН*, 1, стр. 1—16, 1951; b) Über die Randwertaufgabe zweiter Ordnung. *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe*, t. IV (у штампи).

[2] Р. Кашанин — Виша математика, Београд 1949—50.

## ÜBER DIE KONVERGENZ EINER FOLGE VON POLYNOMEN

Ranko Bojanić

Der Verfasser beweist auf elementare Weise einen Satz, den Herr V. G. Avakumović ([1, b], Hilfssatz) unter Benutzung funktionentheoretischer Mittel bewiesen hat.