ЈЕДНО ПООПЋЕЊЕ ИНТЕГРАЛКОСИНУСА

ДАНИЛО БЛАНУША (Загреб)

1. У рјешењу задатка 8 Весник I, 3—4, стр. 149—153, показао сам, да се функција

$$S_p(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu)!(2\nu+p+1)}, \tag{1}$$

која је тиме дефинирана за сваки $p\neq-(2n+1)$, $n=0,1,2,3,\ldots$, може изразити у облику интеграла

$$x^p S_p(x)=\int t^p \cos t\, dt + K, \tag{2}$$

где је K константа интеграције, и да је

$$\lim_{x=\infty} x^p S_p(x)=\frac{\pi}{2\Gamma(-p)\cos\frac{p\pi}{2}} \quad \text{за } p<0 \text{ и } p\neq-1,-3,-5,\ldots \tag{3}$$

Како за $p<0$ интеграл (2) конвергира, кад горња граница тежи према неизмјерно, можемо га написати у облику

$$x^p S_p(x)=-\int_x^{\infty} t^p \cos t\, dt + K, \tag{4}$$

гдје је интеграл очито конвергентан и стога тежи к нули за $x\to\infty$, те добивамо, према (3), да је

$$K=\frac{\pi}{2\Gamma(-p)\cos\frac{p\pi}{2}}.$$

Дакле, према (1), за интеграл у (4) вриједи развој

$$\int_x^{\infty} t^p \cos t\, dt=\frac{\pi}{2\Gamma(-p)\cos\frac{p\pi}{2}}-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}x^{2\nu+p+1}}{(2\nu)!(2\nu+p+1)}. \tag{5}$$

За негативне лихе вриједности од p постаје константа K неизмјерна, а исто тако један члан реда потенција. Провест ћемо за тај случај гранични пријелаз, кад $p \to -(2n+1)$. Ставимо

$$p = -(2n+1+\varepsilon),$$

па добивамо

$$-\int_x^\infty \frac{\cos t}{t^{2n+1}}\,dt = \lim_{\varepsilon=0}\left\{\frac{(-1)^{n+1}\pi}{2\Gamma(2n+1+\varepsilon)\cos\frac{(1+\varepsilon)\pi}{2}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\,\varepsilon x^\varepsilon}\right\} +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu)!\,(2n-2\nu)\,x^{2n-2\nu}} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu x^{2\nu-2n}}{(2\nu)!\,(2\nu-2n)}. \tag{6}$$

Даље је

$$\lim_{\varepsilon=0}\left\{\frac{(-1)^{n+1}\pi}{2\Gamma(2n+1+\varepsilon)\cos\frac{(1+\varepsilon)\pi}{2}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\,\varepsilon x^\varepsilon}\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon=0}\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(2n+1+\varepsilon)\,x^\varepsilon}\lim_{\varepsilon=0}\frac{\pi(2n)!\,\varepsilon x^\varepsilon + 2\Gamma(2n+1+\varepsilon)\cos\frac{(1+\varepsilon)\pi}{2}}{2(2n)!\,\varepsilon\cos\frac{(1+\varepsilon)\pi}{2}} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\left[-\lg x + \frac{\Gamma'(2n+1)}{(2n)!}\right],$$

што излази двократном примјеном l'Hospitalova правила. Но познато је, да вриједи [1; стр. 213][1]

$$\frac{d\lg\Gamma(n)}{dn} = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1},$$

гдје је $\gamma = 0{,}5772\ldots$ Eulerova (или Mascheroni-јева) константа. Излази стога

$$\frac{\Gamma'(2n+1)}{(2n)!} = \frac{\Gamma'(2n+1)}{\Gamma(2n+1)} = \frac{d\lg\Gamma(2n+1)}{d(2n+1)} = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

тако да развој (6) гласи

$$-\int_x^\infty \frac{\cos t}{t^{2n+1}}\,dt = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\lg x + \gamma - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}\right) +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu)!\,(2n-2\nu)\,x^{2n-2\nu}} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+n}x^{2\nu}}{(2\nu+2n)!\,2\nu}. \tag{7}$$

---

[1]) Први број у угластим заградама односи се на литературу на крају чланка.

За $n=0$ излази познати развој за интегралкосинус:

$$Ci(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \lg x + \gamma + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} x^{2\nu}}{2\nu(2\nu)!}.$$

2. Још ћемо размотрити интеграл (5) за позитивне вриједности од p укључиво нуле. У том случају је интеграл дивергентан, али је збројив. У аналогији с A-збројивим редовима [**2**; стр. 448] називат ћемо A-збројивим неки интеграл

$$\int_a^x f(t)\, dt \quad (x \to \infty),$$

ако постоји

$$\lim_{\sigma=+0} \int_a^{\infty} e^{-\sigma t} f(t)\, dt,$$

а тада ћемо ставити

$$A\text{-}\lim \int_a^{\infty} f(t)\, dt = \lim_{\sigma=+0} \int_a^{\infty} e^{-\sigma t} f(t)\, dt, \tag{8}$$

био интеграл с лијеве стране дивергентан или не. Познато је, да је релација (8) исправна без „A-lim", ако је интеграл конвергентан, јер је испуњен захтјев перманенције за ту врсту збројивости [**3**; стр. 388].

Полазимо од релације [**4**; стр. 159]

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma x} x^p \cos x\, dx = \frac{\Gamma(p+1}{(\sigma^2+1)^{(p+1)/2}} \cos\left[(p+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{\sigma}\right],$$

која у смислу дефиниције (8), кад $\sigma \to +0$, даје

$$A\text{-}\lim \int_0^{\infty} t^p \cos t\, dt = \Gamma(p+1) \cos\frac{(p+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2\Gamma(-p)\cos\frac{p\pi}{2}}, \tag{9}$$

што очито вриједи за сваки $p > -1$. Будући да за тај случај можемо очито интегралу у (2) дати границе од 0 до x, уз $K=0$, то излази даље

$$A\text{-}\lim \int_0^{\infty} t^p \cos t\, dt = \int_0^x t^p \cos t\, dt + A\text{-}\lim \int_x^{\infty} t^p \cos t\, dt =$$

$$= x^p S_p(x) + A\text{-}\lim \int_x^{\infty} t^p \cos t\, dt,$$

дакле је, према (9),

$$A\text{-}\lim \int_x^\infty t^p \cos t \, dt = \frac{\pi}{2\,\Gamma(-p)\cos\frac{p\pi}{2}} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu+p+1}}{(2\nu)!\,(2\nu+p+1)}. \tag{10}$$

Како су с лијеве стране формуле (5) и (10) исте, то је са (10) добивена опћа формула, која вриједи за све реалне вриједности од p, јер за $p < 0$ интеграл конвергира већ у обичном смислу, а за $p = -(2n+1)$ треба узети граничну вриједност израза (10), кад $p \to -(2n+1)$, а која је дана формулом (7). (За цијеле позитивне вриједности од p или 0 треба узети први од израза (9), или пустити у другом изразу, т. ј. у (10), да $p \to 0$ или к цијелом позитивном броју).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Serret-Scheffers — Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung II, Leipzig und Berlin 1911.

[2] K. Knopp — Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin 1922.

[3] E. W. Hobson — The theory of functions of a real variable II, Cambridge 1926.

[4] G. Lejeune-Dirichlet — Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, Braunschweig 1904.

EINE VERALLGEMEINERUNG DES INTEGRALKOSINUS

D. Blanuša

Es wird die Formel (10) aufgestellt, die für alle reellen Werte von p gilt. Für $p < 0$ konvergiert das Integral im gewöhnlichen Sinne, für $p = -(2n+1)$ ist der durch (7) gegebene Grenzwert zu nehmen. Für positive ganze Werte von p und für $p = 0$ ist der erste Ausdruck in (9) zu benützen. Für $p = -1$ erhält man den bekannten Ausdruck für den Integralkosinus.