ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ GEGENBAUER-ОВИХ ПОЛИНОМА

С. АЉАНЧИЋ (Београд)

1. Gegenbauer-ови полиноми $C_n^\nu(x)$ дефинисани су генератрисом

$$\frac{1}{(1-2hx+h^2)^\nu}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(x)\,h^n, \tag{1}$$

или помоћу

$$C_n^\nu(x)=\frac{(-1)^n}{2^n\,n!}\,\frac{(2\nu)_n}{(\nu+{}^1/_2)_n}\,(1-x^2)^{1/2-\nu}\,\frac{d^n}{dx^n}\,[(1-x^2)^{n+\nu-1/2}], \tag{2}$$

где је

$$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1).$$

Кад је $\nu=m+{}^1/_2$, m цео позитиван број, они су уско повезани са Legendre-овим асоцираним функцијама прве врсте целих индекса, наиме,

$$P_n^m(x)=(-1)^m\frac{(2m)!}{2^m\,m!}(1-x^2)^{m/2}\,C_{n-m}^{m+1/2}(x),$$

те садрже као специјалан случај $(m=\nu-{}^1/_2=0)$ и Legendre-ове полиноме.

Посматрани као функције од x, Gegenbauer-ови полиноми задовољавају диференцијалну једначину хипергеометриског типа, те се могу изразити и коначним хипергеометриским редом

$$C_n^\nu(x)=\frac{\Gamma(2\nu+n)}{n!\,\Gamma(2\nu)}\,F\left(-n,n+2\nu;\ \nu+{}^1/_2;\ \frac{1-x}{2}\right). \tag{3}$$

Овде ћемо, пре свега, показати да се $C_n^\nu(\cos\theta)$, $0<\theta<\pi$, може развити, према томе које вредности узима ν, у један од следећа два тригонометриска реда:

$$C_n^\nu(\cos\theta)=$$

$$=\frac{2\,\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma^2(\nu)\,n!}\,(2\sin\theta)^{1-2\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k^{1-\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^{\nu}}\sin(n+2k+1)\theta, \tag{4}$$

$$0<\theta<\pi,\quad \nu>0,\quad \nu\neq 1,2,3,\ldots$$

односно

$$C_n^\nu(\cos\theta) =$$

$$= \frac{2\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^\nu\, a_{n+k}^{2\nu}}{(\nu+n+k)\, a_{n+k}^\nu} \sin\left[(n+2\nu+2k)\theta + (1/2-\nu)\pi\right], \quad (5)$$

$$0<\theta<\pi, \quad 0<\nu<1.$$

Коефицијенти a_k^ν одређени су са

$$f_\nu(x) = (1-x)^{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^\nu x^k, \quad (6)$$

т. ј.

$$a_k^\nu = \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+k-1)}{k!} = \frac{(\nu)_k}{k!} = \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)\,k!}, \quad (7)$$

тако да је

$$a_k^\nu \sim \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} k^{\nu-1}, & k\to\infty, \\ \dfrac{1}{\Gamma(k+1)} \nu^k, & \nu\to\infty. \end{cases} \quad (8)$$

Развици (4) и (5) своде се за $\nu = 1/2$ на класичан Heine-ов [1][1] Fourier-ов ред за Legendre-ове полиноме.

Кад је ν реално и $n \geqslant 0$, коефицијенти ових тригонометриских редова показују знатну правилност. Тако је низ коефицијената

$$c_k^\nu(n) = \frac{a_k^{1-\nu}}{(\nu+n+k)\, a_{n+k}^\nu}, \quad k=0,1,2,\ldots \quad (9)$$

тотално монотон за $0<\nu<1$. За $s<\nu<s+1$, s цео позитиван број, првих s чланова низа ($k=0, 1,\ldots, s-1$) осцилују, али чланови низа од $(s+1)$-ог па надаље имају сталан знак и образују тотално монотон низ.

Слично вреди и за низ коефицијената

$$d_k^\nu(n) = \frac{a_k^\nu\, a_{n+k}^{2\nu}}{(\nu+n+k)\, a_{n+k}^\nu}, \quad k=0,1,2,\ldots \quad (10)$$

који се јавља у тригонометриском реду (5). И тада је за $0<\nu<1$ низ $d_n^\nu(n)$, $k=0,1,\ldots$ тотално монотон, а за $-(s+1)<\nu<-s$, s цео позитиван број, такав је само његов остатак $d_k^\nu(n)$, $k=2s+2, 2s+3,\ldots$

[1]) Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају чланка.

Ослањајући се на један општи став који је недавно доказао J. Карамата [**2**] (в. тачку **6**), показаћемо како се из тригонометриских редова (4) и (5) може добити познати Stieltjes-ов уопштени асимптотски развитак за $C_n^\nu(\cos\theta)$

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \frac{2}{B(\nu,\nu+n)}\sum_{\mu=0}^{l}\frac{a_\mu^\nu\, a_\mu^{1-\nu}}{(\nu+n+\mu)\, a_\mu^{\nu+n}}\,\frac{\cos[n\theta+(\nu+\mu)(\theta-\pi/2)]}{(2\sin\theta)^{\nu+\mu}} + o\left(\frac{1}{n^{l+1-\nu}}\right), \quad n\to\infty \tag{11}$$

униформно за $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$. Караматин став омогућује да се из тригонометриског реда који је Abel-збирљив и чији коефицијенти показују извесну правилност добије асимптотски развитак његове Abel-ове суме.

Из тригонометриског развитка (4) могу се извести и неке друге особине Gegenbauer-ових полинома $C_n^\nu(\cos\theta)$, $0<\nu<1$. Тако, ако са θ_m обележимо нуле од $C_n^\nu(\cos\theta)$ које леже у размаку $(0,\pi/2)$, њихов положај је ту одређен са

$$(m-{}^1/_2)\frac{\pi}{n}<\theta_m<m\frac{\pi}{n+1}, \qquad m=1,2,\ldots,n'=\left[\frac{n+1}{2}\right]. \tag{12}$$

Нуле из размака $(\pi/2,\pi)$ су симетрично распоређене према $\theta=\pi/2$.

Из (4) или (5) можемо добити и неједначину

$$\frac{\Gamma(\nu)}{2^{1-\nu}}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(2\nu+n)}\,|C_n^\nu(\cos\theta)|<\frac{G}{(\sin\theta)^\nu}, \tag{13}$$

$(0<\theta<\pi,\quad 0<\nu<1,\quad n=1,2,\ldots;\ G$ не зависи од n и $\theta)$,

која претставља аналогон Stieltjes-овој неједначини за Legendre-ове полиноме.

Први од наведених резултата следи непосредно из једног општег Fejér-овог [**3**; стр. 23] става који се односи на нуле тригонометриских редова Heine-ова типа са троструко монотоним коефицијентима. Други се, пак, може добити на аналоган начин као што je Fejér [**3**; стр. 52] из Heine-ова развитка за Legendre-ове полиноме извео Stieltjes-ову неједначину.

Тачка **2** садржи још неке особине Gegenbauer-ових полинома, а у тачки **3** изводимо један одређени интеграл који ће нам доцније бити потребан. У тачкама **4.1** и **4.2** долазимо до тригонометриских развитака (4) и (5) на два различита начина, једном директним развијањем у Fourier-ов ред, а други пут полазећи од једног интегралног облика за $C_n^\nu(\cos\theta)$. О правилности коефицијената који се јављају у (4) и (5) реч је у тачки **5**. У тачки **6** изводимо асимптотски развитак (11), а у тачки **7** неједначину (13).

2. Претходно наводимо неке особине Gegenbauer-ових полинома. Користећи (2), може се показати да је

$$\int_{-1}^{+1} x^k (1-x^2)^{\nu-1/2}\, C_n^\nu(x)\, dx = 0, \quad k=0, 1, \ldots, n-1, \tag{14}$$

тј. ортогоналитет Gegenbauer-ових полинома.

Из (2) непосредно следи и симетрија

$$C_n^\nu(-x) = (-1)^n\, C_n^\nu(x). \tag{15}$$

Најзад, Gegenbauer-ови полиноми $C_n^\nu(x)$, $x=\cos\theta$, могу се приказати у облику косинусног полинома

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k^\nu\, a_{n-k}^\nu \cos(n-2k)\,\theta\,. \tag{16}$$

Заиста,

$$(1-2h\cos\theta + h^2)^{-\nu} = (1-he^{-\theta i})^{-\nu}\,(1-he^{\theta i})^{-\nu} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\nu\, e^{-n\theta i}\, h^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\nu\, e^{n\theta i}\, h^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k^\nu\, a_{n-k}^\nu\, e^{(n-2k)\theta i} \right\} h^n,$$

те је према (1)

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k^\nu\, a_{n-k}^\nu\, e^{(n-2k)\theta i},$$

што је еквивалентно са (16).

3. Да не бисмо доцније прекидали излагање, израчунаћемо овде интеграл

$$\int_0^\pi \sin^a\theta \sin b\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2^a} \sin\frac{b\pi}{2} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}, \quad R\{a\} > -1. \tag{17}$$

Полазимо од функције

$$z^{b-1}\,(z^{-1}-z)^a$$

и интегришемо дуж контуре која се састоји из отсечка реалне осе од -1 до $+1$ и полукруга у горњој полуравни z. Критичне сингуларитете у $z=0$ и $z=\pm 1$ обилазимо деловима кружића, тако да у унутрашњости контуре нема сингуларитета. Интеграли дуж тих кружића тежиће нули са њиховим полупречником, уколико је $R\{a+1\}>0$ и $R\{b-a\}>0$. (Овог последњег услова ослобађамо се на крају аналитичким продужењем). Тако остаје само

$$e^{(b-a)\pi i}\int_1^0 x^{b-a-1}(1-x^2)^a\,dx+\int_0^1 x^{b-a-1}(1-x^2)^a\,dx$$

$$+\,i\int_0^\pi e^{b\theta i}(-2\,i\sin\theta)^a\,d\theta=0,$$

одакле

$$\int_0^\pi e^{b\theta i}\sin^a\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2^{a-1}}e^{\frac{b\pi i}{2}}\sin\frac{b-a}{2}\pi\int_0^1 x^{b-a-1}(1-x^2)^a\,dx=$$

$$=\frac{1}{2^a}e^{\frac{b\pi i}{2}}\sin\frac{b-a}{2}\pi\int_0^1 x^{\frac{b-a}{2}-1}(1-x)^a\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2^a}e^{\frac{b\pi i}{2}}\sin\frac{b-a}{2}\pi\,\frac{\Gamma\left(\frac{b-a}{2}\right)\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)}=$$

$$=\frac{\pi}{2^a}e^{\frac{b\pi i}{2}}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}.$$

Одавде добивамо, сем (17), и

$$\int_0^\pi \sin^a\theta\cos b\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2^a}\cos\frac{b\pi}{2}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)},\qquad R\{a\}>-1.$$

4. 1. Да бисмо добили тригонометриски ред (4), развићемо функцију

$$\mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta)=(\sin\theta)^{2\nu-1}\,C_n^\nu(\cos\theta)$$

у размаку $(0,\pi)$ у Fourier-ов синусни ред:

$$\mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta)=b_1\sin\theta+\cdots+b_n\sin n\theta+b_{n+1}\sin(n+1)\theta+\cdots$$

Пре свега, примећујемо да је

$$b_1=b_2=\cdots=b_n=0.$$

Заиста,

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathfrak{C}_n^{\nu}(\cos\theta)\,\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\nu-1/2}\, C_n^{\nu}(x)\, U_{k-1}(x)\,dx = 0$$

за $k=1,2,\ldots,n$, на основу (14), јер је $U_{k-1}(x)$ полином по x степена $k-1<n$.

С друге стране, и за $\mathfrak{C}_n^{\nu}(x)$ важи (15), тј.

$$\mathfrak{C}_n^{\nu}\{\cos(\pi-\theta)\} = (-1)^n\,\mathfrak{C}_n^{\nu}(\cos\theta),$$

а како и $\sin m\theta$ има сличну симетрију, то је

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathfrak{C}_n^{\nu}(\cos\theta)\sin m\theta\,d\theta = 0$$

кадгод су n и m оба парна или оба непарна.

Према томе, $\mathfrak{C}_n^{\nu}(\cos\theta)$ мора имати синусни ред облика

$$\mathfrak{C}_n^{\nu}(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sin(n+2k+1)\,\theta, \qquad 0<\theta<\pi.$$

За коефицијенте β_k налазимо, према (16),

$$\beta_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathfrak{C}_n^{\nu}(\cos\theta)\sin(n+2k+1)\,\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2\nu-1} \sum_{m=0}^{n} a_m^{\nu} a_{n-m}^{\nu} \cos(n-2m)\,\theta \cdot \sin(n+2k+1)\,\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2\nu-1} \left\{\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n} a_m^{\nu} a_{n-m}^{\nu} \sin(2n-2m+2k+1)\,\theta \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n} a_m^{\nu}\, a_{n-m}^{\nu} \sin(2m+2k+1)\,\theta\right\} d\theta\,.$$

Како су ове две последње суме једнаке, то је

$$\beta_k = \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{n} a_m^{\nu}\, a_{n-m}^{\nu} \int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2\nu-1} \sin(2m+2k+1)\theta\,d\theta$$

и, према (17),

$$\beta_k = \frac{\Gamma(2\nu)}{2^{2\nu-2}} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{k+m} \frac{a_m^\nu a_{n-m}^\nu}{\Gamma(\nu+k+m+1)\,\Gamma(\nu-k-m)}, \qquad \nu>0.$$

За нас је од интереса понашање коефицијената β_k кад $n\to\infty$. Зато ћемо, служећи се једним Saalschütz-овим [5] резултатом,

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} \frac{(x)_m (y+u+n-1)_m}{(x+u)_m (y)_m} = \\ = \frac{\Gamma(y)\,\Gamma(y-x+n)\,\Gamma(x+u)\,\Gamma(u+n)}{\Gamma(y-x)\,\Gamma(y+n)\,\Gamma(u)\,\Gamma(x+u+n)}, \tag{18}$$

добивени израз за коефицијенте β_k дати у затвореном облику. Доводећи овај претходно на облик леве стране у (18)

$$\beta_k = \frac{(-1)^n 2^{2-2\nu}\,\Gamma(2\nu)\,\Gamma(1-\nu+k)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1+\nu+k)\,\Gamma(1-\nu-n)\,n!} \cdot \\ \cdot \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} \frac{(\nu)_m (1-\nu+k)_m}{(1+\nu+k)_m (1-\nu-n)_m}, \qquad \nu>0,$$

налазимо коначно, примењујући (18),

$$\beta_k = \frac{(-1)^n\,\Gamma(2\nu)\,\Gamma(1-2\nu)}{2^{2\nu-2}\,\Gamma^2(\nu)\,\Gamma(1-2\nu-n)\,n!} \, \frac{\Gamma(1-\nu+k)}{\Gamma(1-\nu)\,k!} \, \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(k+n+1)}{(\nu+k+n)\,\Gamma(\nu+k+n)} = \\ = \frac{\Gamma(2\nu+n)}{2^{2\nu-2}\,\Gamma^2(\nu)\,n!} \, \frac{a_k^{1-\nu}}{(\nu+k+n)\,a_{n+k}^\nu}, \qquad \nu>0.$$

Према томе, Fourier-ов ред за $\mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta)$ гласи

$$\mathfrak{C}_n^\nu(\cos\theta) = \frac{\Gamma(2\nu+n)}{2^{2\nu-2}\,\Gamma^2(\nu)\,n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^{1-\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu} \sin(n+2k+1)\theta,$$

и он конвергира за $\nu>0$ и $0<\theta<\pi$, јер је, према (8),

$$\frac{a_k^{1-\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu} \sim \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(1-\nu)} k^{-2\nu}, \quad k\to\infty.$$

Одавде непосредно добијамо развитак (4).

Развитак (5) извешћемо из (4), прво чисто формално, а затим ћемо оправдати легитимитет изведених операција. У ту сврху написаћемо (4) у облику

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \\ = \frac{2^{2-2\nu}\,\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma^2(\nu)\,n!} J\left\{(\sin\theta)^{1-2\nu} e^{(n+1)\theta i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^{1-\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu} e^{2k\theta i}\right\}, \\ \nu>0,\ 0<\theta<\pi. \tag{19}$$

Ако овде место $(\sin\theta)^{1-2\nu}$ уврстимо ред

$$(\sin\theta)^{1-2\nu} = 2^{2\nu-1} e^{(1-2\nu)(\pi/2-\theta)i} (1-e^{2\theta i})^{1-2\nu} = \\ = 2^{2\nu-1} e^{(1-2\nu)(\pi/2-\theta)i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{2\nu-1} e^{2k\theta i} \tag{20}$$

који конвергира за $\nu < 1$ и $0 < \theta < \pi$, па изможимо оба реда под знаком $J\{\}$, добићемо

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \frac{2\,\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma^2(\nu)\,n!}\,J\left\{e^{[(n+2\nu)\theta+(1/2-\nu)\pi]i}\sum_{k=0}^{\infty} g_k\, e^{2k\theta i}\right\}, \qquad (21)$$

где је

$$g_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{a_m^{1-\nu}\, a_{k-m}^{2\nu-1}}{(\nu+n+m)\, a_{n+m}^{\nu}}.$$

Израз за g_k можемо написати у облику

$$g_k = \frac{(-1)^{k+1}\,\Gamma(\nu)\,n!}{\sin 2\nu\pi\,\Gamma(2\nu-1)\,\Gamma(\nu+n+1)\,\Gamma(2-2\nu-k)\,k!}\,\cdot$$
$$\cdot\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}\frac{(1-\nu)_m\,(n+1)_m}{(\nu+n+1)_m\,(2-2\nu-k)_m},$$

и ако на десну страну применимо Saalschütz-ов сумациони образац (18), налазимо после лаке трансформације

$$g_k = \frac{\Gamma(2\nu)\,n!}{\Gamma(2\nu+n)}\,\frac{a_k^{\nu}\,a_{n+k}^{\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^{\nu}}.$$

Са овом вредношћу за g_k (21) постаје

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \frac{2\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)}\,J\left\{e^{[(n+2\nu)\theta+(1/2-\nu)\pi]i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k^{\nu}\,a_{n+k}^{2\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^{\nu}}\,e^{2k\theta i}\right\}, \qquad (22)$$

што формално претставља тригонометриски развитак (5). Примећујемо да ред који овде фигурише под знаком $J\{\ \}$ конвергира за $\nu < 1$ и $0 < \theta < \pi$, јер је, према (8),

$$\frac{a_k^{\nu}\,a_{n+k}^{2\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^{\nu}} \sim \frac{1}{\Gamma(2\nu)}\,k^{2\nu-2}, \quad k\to\infty.$$

Према самом начину извођења, релација (22) вреди само када је $0 < \nu < 1$ и $0 < \theta < \pi$. Јер једино уз та ограничења су редови (19) и (20), као и њихов производ (22), истовремено конвергентни, па према томе и допуштене изведене операције.

4. 2. Тригонометриске развитке (4) и (5) можемо добити и полазећи од једног интегралног обрасца за $C_n^\nu(\cos\theta)$ који претставља уопштење Stieltjes-овог интеграла за Legendre-ове полиноме:

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \frac{2\sin\nu\pi}{\pi}\left\{e^{[(2\nu+n)\theta+(1/2-\nu)\pi]i}\int_0^1\frac{t^{2\nu+n-1}\,dt}{(1-t)^\nu\,(1-te^{2\theta i})^\nu}\right\}, \qquad (23)$$
$$0<\nu<1, \quad 0<\theta<\pi.$$

Овај образац добијамо из генератрисе (1). Према Chauchy-у је, наиме,

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(K)}\frac{dh}{h^{n+1}\,(h-e^{\theta i})^\nu\,(h-e^{-\theta i})^\nu},$$

где контура (K) обухвата тачку $h=0$, а искључује тачке $h=e^{\pm\theta i}$. Ако је изаберемо као што је показано на слици 1 и пустимо да полупречник великог круга тежи бесконачности а малих нули, интегралу ће за $0<\nu<1$ доприносити једино праволиниски делови контуре. Они, после лаке трансформације, дају (23).

Тригонометриски ред (5) добивамо из (23) ако под интегралом развијемо $(1-te^{2\theta i})^{-\nu}$ у ред и интегришемо члан по члан. Тако налазимо

$$\int_0^1 \frac{t^{2\nu+n-1}\,dt}{(1-t)^\nu(1-te^{2\theta i})^\nu}=\int_0^1 \frac{t^{2\nu+n-1}}{(1-t)^\nu}\sum_{k=0}^{\infty} a_k^\nu\, e^{2k\theta i}\, t^k\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} a_k^\nu\, e^{2k\theta i}\int_0^1 t^{2\nu+n+k-1}(1-t)^{-\nu}\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k^\nu\,\Gamma(2\nu+n+k)\,\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\nu+n+k+1)}\,e^{2k\theta i}=$$

$$=\frac{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k^\nu\, a_{n+k}^{2\nu}}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu}\,e^{2k\theta i},$$

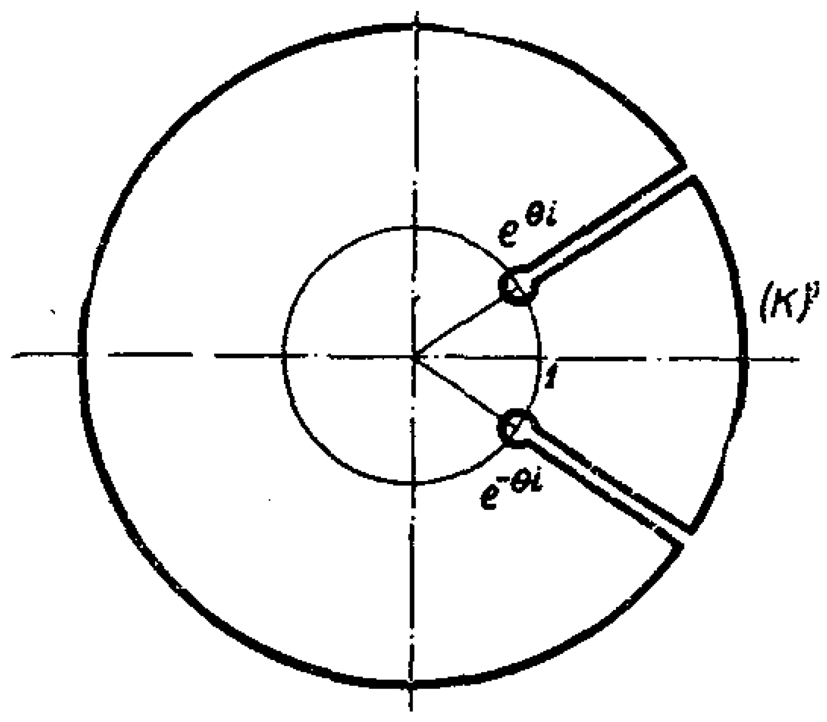
и ако ово уврстимо у (23) добивамо (5).

Остаје једино да оправдамо инверзију $\int_0^1$ и $\sum_0^\infty$. У питању је само лева околина тачке $t=1$. Међутим, ред

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^\nu\, e^{2k\theta i}\, t^k$$

и ту је униформно конвергентан за $\nu<1$ и $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$, јер је

$$a_k^\nu\sim\frac{1}{\Gamma(\nu)}k^{\nu-1},\quad k\to\infty.$$



Сл. 1

Тригонометриски развитак (4) можемо сада извести из (5), на сличан начин као што смо у **4. 1** из (4) добили (5). А то се у суштини своди да уместо од интегралног обрасца (23) за $C_n^\nu(\cos\theta)$ пођемо од

$$C_n^\nu(\cos\theta)=\frac{2\sin\nu\pi}{\pi(2\sin\theta)^{2\nu-1}}\,J\left\{e^{(n+1)\theta i}(1-e^{2\theta i})^{2\nu-1}\int_0^1\frac{t^{2\nu+n-1}\,dt}{(1-t)^\nu(1-te^{2\theta i})^\nu}\right\}.$$

$$0<\nu<1,\quad 0<\theta<\pi.$$

5. У овој тачки испитаћемо правилност коефицијената $c_k^\nu(n)$ (9) и $d_k^\nu(n)$ (10) који се јављају у тригонометриским развицима (4) и (5). У ту сврху раставићемо низ $c_k^\nu(n)$ на два низа

$$a_k^{1-\nu}\quad\text{и}\quad\frac{1}{(\nu+n+k)\,a_{n+k}^\nu}=b_k^\nu(n),\quad k=0,1,2,\ldots,\tag{24}$$

где смо за други, краткоће писања ради, увели нову ознаку. Према (7) можемо онда писати

$$a_k^{1-\nu}=\frac{B(1-\nu+k,\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}=\frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}\int_0^1 t^{k-\nu}(1-t)^{\nu-1}\,dt \tag{25}$$

и

$$b_k^{\nu}(n)=B(k+n+1,\nu)=\int_0^1 t^{k+n}(1-t)^{\nu-1}\,dt. \tag{26}$$

На основу познатог Hausdorff-овог става, наиме, да се *сваки тотално монотон низ* a_k, $k=0,1,\ldots$ *може написати у облику интеграла момената*

$$a_k=\int_0^1 t^k\,d\alpha(t),\quad k=0,1,2,\ldots,$$

где функција $\alpha(t)$ *не опада и ограничена је у* $0\leqslant t\leqslant 1$, видимо из (25) и (26) да је низ $b_k^{\nu}(n)$, $k=0,1,2,\ldots$ тотално монотон за $\nu>0$, а низ $a_k^{1-\nu}$, $k=0,1,2,\ldots$ само кад је $0<\nu<1$, јер тада конвергирају интеграли у (25) и (26) за свако $k=0,1,\ldots$ Међутим, ако је $s<\nu<s+1$, s цео позитиван број, првих s чланова овог последњег низа истина осцилују, али чланови од $(s+1)$-ог па надаље имају сталан знак. То увиђамо ако експлицитно напишемо чланове низа $a_k^{1-\nu}$, $k=0,1,2,\ldots$:

$$1,\quad \frac{(1-\nu)_1}{1!}<0,\quad \frac{(1-\nu)_2}{2!}>0,\ \ldots,\ (-1)^{s-1}\frac{(1-\nu)_{s-1}}{(s-1)!}>0,$$

$$(-1)^s\frac{(1-\nu)_s}{s!}>0,\quad (-1)^s\frac{(1-\nu)_{s+1}}{(s+1)!}>0,\ldots$$

Тотална монотонија низа $a_k^{1-\nu}$, $k=s,\ s+1,\ldots$ следи опет из (25).

За $0<\nu<1$ је, дакле, низ $c_k^{\nu}(n)$, $k=0,1,\ldots$ производ два тотално монотона низа, те се према (25) и (26) може написати у облику

$$\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)\,c_k^{\nu}(n)=\int_0^1 t^{k-\nu}(1-t)^{\nu-1}\,dt\cdot\int_0^1 \tau^{k+n}(1-\tau)^{\nu-1}\,d\tau=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 t^{k-\nu}\tau^{k+n}(1-t)^{\nu-1}(1-\tau)^{\nu-1}\,dt\,d\tau=$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^1\left(\frac{x}{y}\right)^{k-\nu}y^{k+n-1}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{\nu-1}(1-y)^{\nu-1}\,dy=$$

$$=\int_0^1 x^k\,d\alpha(x), \tag{27}$$

где смо ставили

$$\alpha(x) = \int_0^x \psi(\tau)\, d\tau, \tag{28}$$

са

$$\psi(x) = x^{-\nu} \int_x^1 y^n (y-x)^{\nu-1} (1-y)^{\nu-1}\, dy. \tag{29}$$

Лако је увидети да је $\psi(x) \geqslant 0$ за $0 \leqslant x \leqslant 1$, јер ниједан од фактора који се јављају у интергранду није негативан за $x \leqslant y \leqslant 1$, и $0 \leqslant x \leqslant 1$. Према (28), $\alpha(x)$ онда свакако не опада. С друге стране, ако је $0 < \nu < 1$, интеграл који фигурише у (29) ограничен је за $0 \leqslant x \leqslant 1$, те је, према (28), и функција $\alpha(x)$ ограничена у $0 \leqslant x \leqslant 1$. Према томе, $\alpha(x)$ задовољава услове Hausdorff-ова става, те је на основу (27) низ $c_k^\nu(n)$, $k = 0, 1, 2 \ldots$ тотално монотон. Слично се закључује ако је $s < \nu < s+1$ за низ $c_k^\nu(n)$, $k = s, s+1, \ldots$

На сличан начин може се испитати и низ коефицијената $d_k^\nu(n)$ (10), растављајући га на низове

$$a_k^\nu \quad \text{и} \quad \frac{a_{n+k}^{2\nu}}{(\nu+n+k)\, a_{n+k}^\nu} = e_k^\nu(n), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Према (7) је, наиме,

$$a_k^\nu = \frac{B(\nu+k, 1-\nu)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)} = \frac{1}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)} \int_0^1 t^{\nu+k-1} (1-t)^{-\nu}\, dt \tag{30}$$

и

$$e_k^\nu(n) = \frac{\Gamma(\nu)\, B(2\nu+n+k, 1-\nu)}{\Gamma(2\nu)\,\Gamma(1-\nu)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)\,\Gamma(1-\nu)} \int_0^1 t^{2\nu+n+k-1} (1-t)^{-\nu}\, dt. \tag{31}$$

Интеграл у (30) конвергира за $-k < \nu < 1$, а онај у (31) за $-\frac{n+k}{2} < \nu < 1$. Према томе, ако је

$$-(s+1) < \nu < -s, \quad s = -1, 0, 1, \ldots,$$

биће, на основу Haussdorff-ова става, низови a_k^ν, $k = s+1, s+2, \ldots$ и $e_k^\nu(n)$, $k = 2s+2, 2s+3, \ldots$ тотално монотони. Слично као код низа $c_k^\nu(n)$, може се онда показати да ће за $-(s+1) < \nu < -s$, $s = -1, 0, 1, \ldots$ низ $d_k^\nu(n)$, $k = 2s+2, 2s+3, \ldots$ бити тотално монотон.

6. У овој тачки извешћемо асимптотски развитак (11) служећи се једним ставом Ј. Карамате [2], који, прецизно формулисан, гласи овако:

Нека је

$$G_n(\theta)=\lim_{r=1}\sum_{k=0}^{\infty} A_k\, B_k(n)\, r^k\, e^{k\theta i} \tag{32}$$

и нека коефицијенти A_k *и* $B_k(n)$ *задовољавају ове услове:*

1^0. *Низ* A_k, $k=0, 1,\ldots$ *је тотално монотон.*

2^0. *Сваки члан низа* $B_k(n)$, $k=0, 1,\ldots$ *може се развити у асимптотски ред облика*

$$B_k(n)=\sum_{\mu=0}^{l}\frac{p_\mu(k)}{q_\mu(n)}+o\left(\frac{1}{q_l(n)}\right),\quad n\to\infty, \tag{33}$$

где низ функција $q_\mu(n)$, $\mu=0, 1,\ldots$ *са* n *све брже тежи бесконачности, тј.*

$$q_0(n)\prec q_1(n)\prec q_2(n)\prec\ldots \quad \text{кад } n\to\infty,$$

а

$$p_\mu(k),\quad \mu=0, 1,\ldots, l$$

су полиноми степена мањег од L. *Број* L *је одређен тако да*

3^0. L*-та диференција низа* $B_k(n)$ *тежи монотоно нули, тј. од извесног* n *је*

$$\Delta^L B_k(n)\geqslant \Delta^L B_{k+1}(n)\to 0 \quad \text{кад } k\to\infty.$$

Под наведеним условима функција $G_n(\theta)$ *има асимптотски развитак облика*

$$G_n(\theta)=\sum_{\mu=0}^{l}\frac{\Gamma_\mu(\theta)}{q_\mu(n)}+o\left(\frac{1}{q_l(n)}\right),\quad n\to\infty, \tag{34}$$

где је

$$\Gamma_\mu(\theta)=\lim_{r=1}\sum_{k=0}^{\infty} A_k\, p_\mu(k)\, r^k\, e^{k\theta i},\quad \mu=0, 1,\ldots, l. \tag{35}$$

Да бисмо добили асимптотски ред (11) полазимо од тригонометриских развитака (4) и (5). Први од њих написаћемо, користећи ознаку (24), у облику (32):

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma^2(\nu)\, n!}{2\,\Gamma(2\nu+n)}(2\sin\theta)^{2\nu-1} C_n^\nu(\cos\theta) &=\\ &= J\left\{e^{(n+1)\theta i}\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{1-\nu}\, b_k^\nu(n)\, e^{2k\theta i}\right\}=\\ &= J\left\{e^{(n+1)\theta i}\, S_n(2\theta)\right\},\end{aligned} \tag{36}$$

где смо ставили

$$S_n(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{1-\nu}\, b_k^\nu(n)\, e^{k\theta i}.$$

Према томе, довољно је развити $S_n(\theta)$ у асимптотски ред кад $n \to \infty$ да бисмо добили одговарајући за $C_n^\nu(\cos\theta)$

Узмимо прво случај када је $0 < \nu < 1$. Тада $S_n(\theta)$ задовољава услове које захтева Караматин став. Пре свега, коефицијенти $a_k^{1-\nu}$ и $b_k^\nu(n)$ су тада тотално монотони и, према (8),

$$b_k^\nu(n) \sim \Gamma(\nu)\, k^{-\nu}, \quad k \to \infty.$$

Значи услови 1^0 и 3^0 су испуњени, и то овај последњи за свако L. Остаје још да покажемо да се $b_k^\nu(n)$, $k = 0, 1, \ldots$ може развити у асимптотски ред облика (33). Међутим, према (26) је

$$\begin{aligned}
b_k^\nu(n) &= \int_0^1 t^n \{1-(1-t)\}^k (1-t)^{\nu-1}\, dt = \\
&= \sum_{\mu=0}^{k} (-1)^\mu \binom{k}{\mu} \int_0^1 t^n (1-t)^{\nu+\mu-1}\, dt = \\
&= \sum_{\mu=0}^{k} (-1)^\mu \binom{k}{\mu} \frac{n!\,\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu+n+\mu+1)} = \\
&= \frac{1}{a_n^\nu} \sum_{\mu=0}^{k} (-1)^\mu \binom{k}{\mu} \frac{a_\mu^\nu}{(\nu+n+\mu)\, a_\mu^{n+\nu}} = \\
&= \frac{1}{a_n^\nu} \left\{ \frac{1}{\nu+n} - \binom{k}{1} \frac{a_1^\nu}{(\nu+n+1)\, a_1^{\nu+n}} + \right. \\
&\quad \left. + \binom{k}{2} \frac{a_2^\nu}{(\nu+n+2)\, a_2^{\nu+n}} - \cdots \right\}.
\end{aligned}$$

Водећи рачуна о (8), налазимо за $b_k^\nu(n)$

$$\begin{aligned}
b_k^\nu(n) &= \frac{1}{a_n^\nu} \left\{ \frac{1}{\nu+n} - \binom{k}{1} \frac{a_1^\nu}{(\nu+n+1)\, a_1^{\nu+n}} + \binom{k}{2} \frac{a_2^\nu}{(\nu+n+2)\, a_2^{\nu+n}} - \cdots \right. \\
&\quad \left. + (-1)^l \binom{k}{l} \frac{a_l^\nu}{(\nu+n+l)\, a_l^{\nu+n}} + o\left(\frac{1}{n^{l+1}}\right) \right\} = \\
&= \frac{1}{a_n^\nu} \left\{ \frac{1}{\nu+n} - \binom{k}{1} \frac{a_1^\nu}{(\nu+n+1)\, a_1^{\nu+n}} + \binom{k}{2} \frac{a_2^\nu}{(\nu+n+2)\, a_2^{\nu+n}} - \cdots \right. \\
&\quad \left. + (-1)^l \binom{k}{l} \frac{a_l^\nu}{(\nu+n+l)\, a_l^{\nu+n}} \right\} + o\left(\frac{1}{n^{l+\nu}}\right), \quad n \to \infty,
\end{aligned}$$

тј. асимптотски развитак облика (33) са

$$p_\mu(k) = (-1)^\mu \binom{k}{\mu} a_\mu^\nu,$$

$$q_\mu(n) = (\nu+n+\mu)\, a_n^\nu\, a_\mu^{\nu+n} \sim \frac{1}{\Gamma(\nu)\,\mu!}\, n^{\mu+\nu}, \quad n \to \infty.$$

Према томе, пошто су сви услови става задовољени, $S_n(\theta)$ допушта асимптотски развитак облика (34), где је $\Gamma_\mu(\theta)$, према (35) и (6),

$$\Gamma_\mu(\theta) = \lim_{r=1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{1-\nu} p_\mu(k) r^k e^{k\theta i} =$$

$$= (-1)^\mu a_\mu^\nu \lim_{r=1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{\mu} a_k^{1-\nu} r^k e^{k\theta i} =$$

$$= (-1)^\mu a_\mu^\nu \frac{f_{1-\nu}^{(\mu)}(e^{\theta i})}{\mu!} e^{\mu\theta i} =$$

$$= (-1)^\mu a_\mu^\nu a_\mu^{1-\nu} (1 - e^{\theta i})^{\nu-\mu-1} e^{\mu\theta i}.$$

Са овом вредношћу за $\Gamma_\mu(\theta)$ асимптотски ред за $S_n(\theta)$ гласи

$$S_n(\theta) = \frac{1}{a_n^\nu} \sum_{\mu=0}^{l} (-1)^\mu \frac{a_\mu^\nu a_\mu^{1-\nu}}{(\nu+n+\mu) a_\mu^{\nu+n}} \frac{e^{\mu\theta i}}{(1-e^{\theta i})^{\mu-\nu+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\nu+l}}\right), \quad n \to \infty.$$

Асимптотски развитак за $C_n^\nu(\cos\theta)$ добивамо ако добивени развитак за $S_n(\theta)$ уврстимо у (36):

$$C_n^\nu(\cos\theta) =$$

$$= \frac{2\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma^2(\nu) n!} (2\sin\theta)^{1-2\nu} J\left\{ \sum_{\mu=0}^{l} (-1)^\mu \frac{a_\mu^\nu a_\mu^{1-\nu}}{(\nu+n+\mu) a_\mu^{\nu+n}} \frac{e^{(n+2\mu+1)\theta i}}{(1-e^{2\theta i})^{\mu-\nu+1}} \right\} +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n^{l-\nu+1}}\right) =$$

$$= \frac{2\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma^2(\nu) n!} \sum_{\mu=0}^{l} (-1)^\mu \frac{a_\mu^\nu a_\mu^{1-\nu}}{(\nu+n+\mu) a_\mu^{\nu+n}} \frac{J\{ i^{\mu-\nu+1} e^{(n+\nu+\mu)\theta i} \}}{(2\sin\theta)^{\nu+\mu}} + o\left(\frac{1}{n^{l-\nu+1}}\right),$$

$$n \to \infty.$$

Ако још ставимо

$$(-1)^\mu J\{ i^{\mu-\nu+1} e^{(n+\nu+\mu)\theta i} \} = J\{ i(-1)^\mu (i)^{-\nu} e^{(n+\mu+\nu)\theta i} \} =$$

$$= J\{ i e^{-(\mu+\nu)\pi i/2} e^{(n+\mu+\nu)\theta i} \} =$$

$$= \cos[n\theta + (\mu+\nu)(\theta - \pi/2)],$$

налазимо коначно

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \frac{2\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+n)} \sum_{\mu=0}^{l} \frac{a_\mu^\nu a_\mu^{1-\nu}}{(\nu+n+\mu) a_\mu^{\nu+n}} \frac{\cos[n\theta + (\mu+\nu)(\theta-\pi/2)]}{(2\sin\theta)^{\nu+\mu}}$$

$$+ o\left(\frac{1}{n^{l-\nu+1}}\right), \quad n \to \infty,$$

тј. асимптотски развитак (11).

Добивени асимптотски развитак вреди, засада, само када је $0 < \nu < 1$, јер једино тада низ коефицијената $a_k^{1-\nu}$, $k = 0, 1, \ldots$ задовољава услов о тоталној монотонији. Међутим, није тешко проширити резултат и на случај када је $s < \nu < s+1$, s цео позитиван број. Наиме, став J. Караматè уствари даје довољне услове за инверзију процеса $\lim\limits_{r=1} \sum\limits_{k=0}^{\infty}$ и асимптотике $(n \to \infty)$. Према томе, ако је $s < n < s+1$, s цео позитиван број, довољно је тригонометриски ред за $S_n(\theta)$ раставити на два дела, $\sum\limits_{k=0}^{s-1}$ и $\sum\limits_{k=s}^{\infty}$, па став применити на другу суму чији коефицијенти, према оном што је речено у тачки **5**, задовољавају услове о монотонији. У првој, коначној суми, инверзија је наравно дозвољена.

На сличан начин можемо, полазећи и од тригонометриског реда (5), доћи до асимптотског развитка (11).

7. Неједначину (13) ћемо извести полазећи од једног од развитака (4) или (5), и служећи се следећом особином биноминалног реда коју је први открио Fejér [**4**]:

Нека је $0 < \rho \leqslant 1$ *и*

$$\frac{1}{(1-u)^\rho} = \lambda_0 + \lambda_1 u + \ldots + \lambda_n u^n + \ldots$$

Тада је

$$|\lambda_0 + \lambda_1 u + \ldots + \lambda_n u^n| < \frac{G}{|1-u|^\rho}, \qquad (n=0,1,2,\ldots\,; \quad |u| \leqslant 1, \quad u \neq 1) \tag{37}$$

где констан̄та G *зависи једино од* ρ.

Наиме, ако (5) напишемо, са ознаком из тачке **5**, у облику

$$C_n^\nu(\cos\theta) = \frac{2\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)}\, J\left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^\nu\, e_k^\nu(n)\, e^{[(n+2\nu+2k)\theta + (1/2-\nu)\pi]\,i}\right\},$$

биће

$$|C_n^\nu(\cos\theta)| \leqslant \frac{2\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k^\nu\, e_k^\nu(n)\, z^k\right|, \qquad z = e^{2\theta i}.$$

Ако на десну страну применимо Abel-ову парцијалну сумацију и водимо рачуна о (6) $(0 < \nu < 1)$ и (37), налазимо

$$|C_n^\nu(\cos\theta| \leqslant \frac{2\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \{e_k^\nu(n) - e_{k+1}^\nu(n)\}\,\{a_0^\nu + a_1^\nu z + \ldots + a_k^\nu z^k\}\right|$$

$$\leqslant \frac{2\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)}\, \frac{1}{|1-e^{2\theta i}|^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} |e_k^\nu(n) - e_{k+1}^\nu(n)|, \qquad z = e^{2\theta i},$$

и због монотоније низа $e_k^\nu(n)$

$$|C_n^\nu(\cos\theta)| \leqslant \frac{\Gamma(2\nu)\, e_0^\nu(n)}{2^{\nu-1}\,\Gamma(n)}\, \frac{1}{(\sin\theta)^\nu}$$

што претставља неједначину (13).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Heine E. — Handbuch der Kugelfunctionen, Bd. I, 2. Aufl., Berlin 1878.

[2] Karamata J. — Sur certains développements asymptotiques avec application aux polynomes de Legendre, *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe,* t. IV (у штампи).

[3] Fejér L. — Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, *Trans. of the Amer. Math. Soc.* 29, p. 19—59, 1936.

[4] Fejér L. — Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome, *Math. Zeitschr.* 24, S.285—298, 1925.

[5] Saalschütz L. — Eine Summationsformel, *Zeitschr. f. Math. u. Physik* 35, S. 186—188, 1890.

BEITRAG ZUR THEORIE DER GEGENBAUERSCHEN POLYNOME

S. Aljančić

Für die Gegenbauerschen Polynome $C_n^\nu(x)$, $x = \cos\theta$, die mit (1) definiert sind, gelten zwei trigonometrische Reihen (4) und (5) mit (6). Deren Koeffizienten, (9) und (10), haben eine interessante Struktur. So, zum Beispiel, oszillieren für $s < \nu < s+1$, s ganz, die ersten s Glieder der Koeffizientenfolge $c_k^\nu(n)$, $k = 0, 1, \ldots$, während der Rest der Folge dasselbe Vorzeichen hat und totalmonoton ist. Von den trigonometrischen Reihen (4) und (5) ausgehend, werden einige Eigenschaften der Gegenbauerschen Polynome bewiesen: 1° Auf Grund eines unlängst von J. Karamata [2] bewiesenen allgemeinen Satzes über die asymptotische Entwicklung von Funktionen, die durch im Abelschen Sinne summierbare trigonometrische Reihen dargestellt sind, wird die bekannte asymtotische Entwicklng (11) für $C_n^\nu(\cos\theta)$, $n \to \infty$ bewiesen. 2° Die Ungleichung (13), die ein Analogon der Stieltjesschen Abschätzung für die Legendreschen Polynome darstellt, wird mittels einer Fejérschen [5] Ungleichung für die Binominalreihe bewiesen.