

## СТРОФОИДАЛНЕ ПЛОХЕ ТРЕЋЕГ РЕДА

ВИЛКО НИЧЕ (Загреб)

**Увод.** Као што циркуларне кривуље неког реда и рода заузимају особито мјесто међу свим кривуљама тога реда и рода, ради својих особености по којима се разликују од оних осталих, тако се и плохе које пролазе апсолутном чуњосјечницом разликују од осталих плоха истога реда и истих сингуларитета. Код плоха 2. реда имамо куглу насупрот осталих плоха 2. реда, јер само она пролази апсолутном чуњосјечницом. Код опћих плоха 3. реда имамо неколико разних облика таквих плоха. Два од тих облика припадају у пету врсту по Schläfli-у (в. Klein F. [2; § 8 стр. 25—28]<sup>1)</sup>), јер имаду на себи само три реална правца. Ова два облика разликују се по томе, што су плохе једног облика једнодјелне, док су оне другог облика дводјелне. Има плоха ове врсте и таквих облика, који припадају у врсту оних с једном и двије двоструке тачке. Овакве се плохе најједноставније добију као производ пројективног свеска равнина и прамена кугала<sup>2)</sup>, као и посвеопћеном квадратном инверзијом кугле на кугли, како је то учињено у радњи „Кривуље и плохе 3. и 4. реда настале помоћу квадратне инверзије“. Могу се оне међутим добити и на друге начине, а један такав начин видјет ћемо и у овој радњи. Међу оваквим плохама, које пролазе апсолутном чуњосјечницом, постоји једна особита врста унутар споменутих облика, која се по својим особинама истиче између осталих, а управо том ћемо се позабавити у овој радњи. Ова особита врста има ту особину, да њене тангенцијалне равнине дуж апсолутне чуњосјечнице оматају имагинаран стожац 2. реда којег се реалан врх налази на самој површини те плохе. Разлику између ових и осталих плоха које пролазе апсолутном чуњосјечницом, могли би према томе успоредити с разликом између обичних циркуларних кривуља 3. реда

<sup>1)</sup> Први број у угластим заградама односи се на литературу на крају чланка.

<sup>2)</sup> Други Штајнеров начин извођења опћих плоха 3. реда.

рода првога и нултога, и строфоидале, односно обичне строфоиде. Видјет ћемо, да овакве плохе имају неке изразите особине кугле. Ради аналогије са строфоидалом и строфоидом у равнини, називат ћемо такве опће плохе 3. реда строфоидалним плохама.

1. Steiner [6], Grassmann [5; стр. 74], Мајсен [3] и други показали су више разних начина, како се могу добити и истраживати опће плохе 3. реда. R. Sturm је показао, да се оне могу добити и као производ пројективно придруженог снопа зрака и свежња плоха 2. реда. За наше сврхе одабрат ћемо управо овај начин, само што нећемо свежањ плоха 2. реда задати као обично с осам асоцираних точкака (в. Reye Т. [5; стр. 48]), него с једном чуњосјечницом и двије точке. С ова три елемента задан је наине један специјалан свежањ плоха 2. реда.

Задајмо по вољи у простору неку чуњосјечницу  $s$  и двије точке  $A, B$ . Пресијечемо ли једном равнином спојнице точкака  $A, B$  чуњосјечницу  $s$  у двије точке  $K_1, K_2$ , тад је точкама  $A, B, K_1, K_2$  у тој равнини дан прамен чуњосјечница, а свака ова чуњосјечница даје с чуњосјечницом  $s$  темељну кривуљу 4. реда (распаднуту у двије чуњосјечнице) неког прамена плоха 2. реда. Точкама  $A, B$  пролази  $\infty^1$  равнина, а сваком точком простора пролази  $\infty^1$  таквих плоха, дакле точкама  $A, B$  и чуњосјечницом  $s$  пролази свега  $\infty^2$  плоха 2. реда. Поставимо ли наине спојницом  $AB$  било коју равнину, тада је праменом чуњосјечница темељних точкака  $A, B, K_1, K_2$  у тој равнини и чуњосјечницом  $s$  дано  $\infty^2$  плоха 2 реда, али све те плохе сијеку сваку равнину спојнице  $AB$  у оном прамену чуњосјечница, који је одређен точкама  $A, B$  и сјечиштима  $K_1, K_2$  те равнине с чуњосјечницом  $s$ .

Продужимо сада спојницу тачака  $A, B$  до њеног прободишта  $C$  с равнином чуњосјечнице  $s$ . Нађемо ли на овој спојници добиеном прободишту  $C$  хармонијски придружену точку  $C_1$ , тј.  $(ABCC_1) = -1$ , па овом точком  $C_1$  и поларом  $t$  пола  $C$ , обзиром на чуњосјечницу  $s$ , поставимо равнину  $\rho$ , тад су ова равнина и точка  $C$  пол и поларна равнина свих  $\infty^2$  плоха нашег свежња плоха 2. реда, а баш она ће нам згодно послужити.

Одаберимо надаље по вољи у простору неку точку  $S$ , која нека буде средиште неког снопа зрака ( $S$ ). Прободиште сваке зраке овог снопа с равнином  $\rho$  нека буде пол поларне равнине чуњосјечнице  $s$  обзиром на једну плоху нашег свежња. Свакој зраци нашег снопа нека буде придружена баш оваква плоха нашег свежња плоха 2. реда. На тај смо начин те двије геометријске творевине пројективно придружили, јер ће четирима хармонијским зракама снопа ( $S$ ) у некој равнини, бити придружене

четири хармонијске плохе у једном прамену плоха унутар нашег свежња [5; стр. 48]. Четири плохе 2. реда, унутар неког прамена таквих плоха, зову се хармонијским онда, ако њихове поларне равнине обзиром на исти пол, које увијек пролазе једним правцем, чине четири хармонијске равнине. Узмемо ли такву точку на темељној кривуљи прамена, онда четири поларне равнине прелазе у четири тангенцијалне равнине. Узмемо ли према томе точком  $S$  неку равнину и у њој четири хармонијске зраке нашег снопа, тад ће тим зракама бити придружене оне плохе нашег свежња, које ће дуж чуњосјечнице  $s$  тангирати оне стошце 2. реда, којима су врхови у прободиштима споменутих зрака с равнином  $p$ . Поста- вимо ли било којом тангентом чуњосјечнице  $s$  тангенцијалне равнине на споменуте четири плохе, односно њихове тангенти- јалне стошце дуж чуњосјечнице  $s$ , онда су то сигурно четири хармонијске равнине, јер оне сијеку пресјечницу равнине  $p$  с равнином задатих четирију хармонијских зрака у четири хармо- нијске точке, будући да су ове сјечишта те пресјечнице са задане четири хармонијске зраке. Дакле, четирима хармонијским зракама точке  $S$  у истину су придружене четири хармонијске плохе нашег свежња. Да су ове четири плохе унутар једног прамена, видјет ћемо мало касније.

Производ нашег пројективно придруженог снопа ( $S$ ) и свежња плоха 2. реда бит ће опћа плоха 3. реда, јер ју сваки правац простора сијече у три точке. Поставимо ли наиме таквим правцем  $p$  и точком  $S$  равнину, те њоме пресијечемо равнину  $p$  у правцу  $s$ , тад су точке правца  $s$  полови равнине чуњосјечнице  $s$ , обзиром на плохе једног прамена унутар нашег свежња плоха 2. реда. Доказати се то може овако: Равнина правца  $p$  и точке  $S$  сијече полару  $t$  чуњосјечнице  $s$ , обзиром на пол  $C$ , у једној точки, које ће полара на исту чуњосјечницу бити коњугирана полари  $t$ , а сјећи ће чуњосјечницу  $s$  у реалном или имагинарном пару точка  $D, E$ . Јер ова коњугирана полара полари  $t$  пролази полом  $C$ , који је на спојници  $AB$ , налазе се точке  $A, B, C, D$  и  $E$  у једној равнини. У точкама  $D, E$  имат ће плохе нашег свежња, придру- жене зракама точке  $S$  у равнини  $(pS)$ , исте тангенцијалне равнине, које пролазе правцем  $s$ . Поставимо ли према томе точкама  $D, E$  и точкама  $A, B$  чуњосјечницу, која тангира те двије равнине (чим тангира у једној точки једну, онда у другој точки тангира и другу ову равнину), онда је ова чуњосјечница уз чуњосјечницу  $s$  саставни дио темељне кривуље прамена оних плоха 2. реда унутар нашег свежња, које су придружене зракама точке  $S$  у равнини  $(pS)$ . Равнина  $(pS)$  сијече тај прамен плоха у прамену

добивеној опћој плохи 3. реда, јер точком  $S$  сигурно пролази бар једна плоха нашег свежња, а зраке  $SA, SB$  пробадају себи придружене плохе нашег свежња управо у тим точкама. Спојимо ли точку  $S$  са сваком точком чуњосјечнице  $c$ , тад свака ова спојница има на чуњосјечници  $c$  по двије точке заједничке с добивеном плохом 3. реда, т. ј. она ју тангира, јер у тој точки тангира та зрака себи придружену плоху 2. реда унутар нашег свежња. Ово заправо произлази директно из дефиниције нашег свежња, јер свакој зраци точке  $S$  придружена је она плоха 2. реда, која пролази точкама  $A, B$  и чуњосјечницом  $c$ , дуж које ју дира онај стожац, којему се врх налази у прободишту те зраке с равнином  $\rho$ . Ако та зрака сијече чуњосјечницу  $c$ , онда је она одмах и изводница таквог стошца, дакле дира у том сјечишту себи придружену плоху, а према томе и насталу плоху 3. реда. Видимо дакле, да тангенцијалне равнине наше плохе 3. реда дуж чуњосјечнице  $c$  оматају стожац 2. реда, којег се врх налази у точки  $S$  на тој плохи.

Узмемо ли точке  $A, B$  као врхове стожаца, који пролазе чуњосјечницом  $c$ , тад се ти стошци сијеку у још једној чуњосјечници  $c_1$ , која лежи у равнини  $\rho$ . Ова чињеница произлази одавде: Имамо ли два стошца 2. реда, чији се продор распада у двије чуњосјечнице (оба стошца имају двије заједничке тангенцијалне равнине), па кроз оба врха поставимо било коју равнину, сјећи ће она те стошце у два пара изводница које чине један четворостран, а равнине продорних чуњосјечница у двије дијагонале тог четворострана. Трећа дијагонала тог четворострана је спојница врхова тих стожаца. Позната је чињеница, да сваку дијагоналу неког четворострана сијеку остале двије дијагонале у точкама, које с врховима тог четворострана на тој дијагонали стоје у хармонијском двоомјеру. Чуњосјечница  $c_1$  мора према томе бити у равнини  $\rho$ , јер је она хармонијски придружена равнини чуњосјечнице  $c$ , обзиром на равнине  $(tA)$  и  $(tB)$  као темељне. Узмемо ли сада ову чуњосјечницу  $c_1$  као базу, а точку  $S$  као врх, тад и

овај стожац дира нашу плоху 3. реда дуж ове чуњосјечнице  $c_1$ , јер на свакој изводници овог стошца у точкама чуњосјечнице  $c_1$  леже двије точке наше плохе. Ова чињеница произлази одатле, што свака точка чуњосјечнице  $c_1$ , спојена с точкама  $A, B$ , даје двије изводнице оне плохе 2. реда нашега свежња, која је придружена оној зраци точке  $S$  која пролази одабраном точком на чуњосјечници  $c_1$ . Будући да међутим прободишта  $M, N$  сваке зраке точке  $S$  с њој придруженом плохом 2. реда и њена прободишта  $Q, P$  с равнинама  $\rho$  и чуњосјечнице  $c$  чине хармонијски двоомјер  $(QPMN) = -1$ , морају точке  $M, N$  пасти скупа, ако једна од тих точкака дође у тачку  $Q$ , као што се то десило у нашем случају. Дакле, споменуте зраке точке  $S$  и чуњосјечнице  $c_1$  у истину дирају насталу плоху дуж те чуњосјечнице. Точке чуњосјечнице  $c_1$  су наиме врхови свих стожаца унутар нашег специјалног свежња плоха 2. реда. Евидентно је, да се чуњосјечнице  $c, c_1$  сијекну у двије точке правца  $t$ .

Поставимо точкама  $A, B$  и  $S$  равнину, па њоме пресијецимо чуњосјечницу  $c_1$  у даљње двије точке. С тих пет точкака одређена је у тој равнини нека чуњосјечница  $b$ , а чуњосјечницама  $b, c$ , као темељном кривуљом, одређен је један прамен плоха 2. реда унутар нашег свежња. Будући да све плохе овог прамена пролазе точком  $S$ , морају се друга прободишта свих оних зрака точке  $S$ , које су на описани начин придружене плохама овог прамена, са себи придруженим плохама, налазити у оној равнини  $\alpha$ , која пролази пресјечницом  $t$  равнине  $\rho$  и равнине  $\beta$  чуњосјечнице  $c$ , а која је хармонијски придружена равнини правца  $t$  и точке  $S$  (равнина  $\gamma$ ), с обзиром на споменуте двије као темељне, т. ј.  $(\rho\beta\gamma\alpha) = -1$ . Будући да у сједиштима кружница  $b, c$  све плохе споменутог прамена имају сталне тангенцијалне равнине, то се врхови тангенцијалних стожаца плоха тога прамена дуж чуњосјечнице  $c$ , налазе на пресјечници  $l$  тих двију заједничких тангенцијалних равнина, која лежи као што знадемо, у равнини  $\rho$ . Све точки наше тражене плохе 3. реда, које се налазе на оним зракама точке  $S$ , које су придружене плохама 2. реда прамена темељне кривуље  $(bc)$ , налазе се према томе у равнини точке  $S$  и правца  $l$ , као и у равнини  $\alpha$  правца  $t$ , дакле на њиховој пресјечници  $l$ . Правац  $l$  налази се према томе на нашој плохи 3. реда. Евидентно је, да се на тој плохи налази и пресјечница  $t$  равнине  $\rho$  и  $\beta$ , јер све плохе (дегенериране) нашег свежња, које су придружене зракама точке  $S$  у равнини  $(tS)$ , пролазе правцем  $t$ .

Узмимо точком  $S$  по вољи неку равнину  $\tau$ . Ова равнина нека сијече равнине  $\beta$  и  $\rho$  рецимо у правцима  $p$  и  $q$ . У тој равнини

узмимо точком  $S$  зраку  $k$ , која нека сијече правац  $q$  у точки  $Q$ . Правац  $q$  нека пробада зраци  $k$  придружену плоху у точкама  $M, N$ , а правац  $p$  у равнини  $\beta$  нека сијече у точки  $P$ . Спојимо ли једно прободиште  $K$  зраке  $k$ , с њој придруженом плохом, с точкама  $M, N, P, Q$ , онда те спојнице дају четири хармонијске зраке ради хармонијског двоомјера  $(MNPQ) = -1$ . Врtimo ли зраку  $k$  у равнини  $\tau$  око точке  $S$ , остаје тај двоомјер хармонијски. Помакнемо ли зраку  $k$  тако, да она пролази сјечиштем праваца  $p, q$ , т. ј. точком  $P$ , онда у ту точку прелазе точке  $K, Q$  и  $M$  или  $N$ , а спојнице  $KM, KN$  прелазе у правце  $p, q$ , док спојница  $KQ$  остаје у зраци  $k = PS$ . Спојница  $KP$  прелазе у тангенту настале кривуље 3. реда у точки  $P$ , а ради хармонитета горњег двоомјера лежат ће увијек та тангента и у равнини  $\alpha$ . Доказати се све ово може на овај начин: Равнина  $\tau$  сијече зраци  $k$  придружену плоху 2. реда у некој кривуљи  $a$  2. реда, којој ће тангенте у њеним сјечиштима  $L_1, L_2$  с чуњосјечницом  $s$  пролазити точком  $Q$ . Ово произлази из дефиниције нашег свежња. Узмимо надаље, да се точка  $M$  налази на луку  $L_1 L_2$  те пресјечне кривуље  $a$ . Пустимо ли сада зраку  $k$  путовати према точки  $P$ , путоват ће у ту точку сигурно и точка  $Q$ . Будући да су точки  $M, K$  на луку  $L_1 L_2$ , дакле унутар кута  $QL_1 L_2$ , који постаје све мањи, то ће у ту точку отпутовати и точки  $K, M$ , када тај кут буде једнак нули. Ако тангента лука  $L_1 L_2$  у точки  $M$  сијече правац  $p$  у точки  $A$ , онда знамо да вриједи  $(L_1 L_2 PA) = -1$ . За сваку зраку  $k$  точка  $A$  остаје константна. Означимо ли сјечиште спојнице  $MK$  и праваца  $p$  с  $B$ , онда полара те точке обзиром на чуњосјечницу  $a$  сијече правац  $p$  у некој точки  $C$ , за коју такођер вриједи  $(L_1 L_2 BC) = -1$ . Путује ли зрака  $k$  с точкама  $M, K$  према точки  $P$ , то ће према тој точки путовати и точка  $C$  на правцу  $p$ , а према томе и точка  $B$  према точки  $a$ , која је увијек константна. Видимо дакле, да спојница  $BMK$ , односно  $MK$  прелазе у спојницу  $AP$ , т. ј. у правац  $p$ , када зрака  $k$  пролази точком  $P$ . Да зрака  $KQ$  прелазе у спојницу  $PS$ , као и спојница  $KN$  у правац  $q$ , је евидентно. Ради сталности хармонијског двоомјера  $(MNPQ) = -1$  мора спојница  $KP$  прећи у правац који лежи у равнини  $\alpha$  ради  $(p\beta\gamma\alpha) = -1$ , будући да сви правци  $p$  леже у равнини  $\beta$ , сви правци  $q$  у равнини  $\rho$ , а све спојнице  $PS$  у равнини  $\gamma$ . Познато је, да гранични положај спојнице  $KP$  прелазе у гранични положај тетиве  $KP$  пресјечне кривуље наше плохе с равнином  $\tau$ , дакле у њену тангенту у точки  $P$ . Јер се ово збива у свакој равнини точке  $S$ , то одавле произлази, да равнина  $\alpha$  праваца  $l, t$  тангира нашу плоху 3. реда дуж праваца  $t$ . Видимо, дакле, да је правац  $t$  такав правац наше плохе, у који су се стегнула два њена обична правца.

У равнини правца  $l$  и точке  $S$  повуцимо оне зраке  $k$ , које сијеку чуњосјечницу  $s$ . Знадемо, да те зраке тангирају нашу плоху 3. реда у тим сјечиштима. На тој се плохи налази и точка  $S$ , као и сјечишта тих зрака с правцем  $l$ , јер је и он на тој плохи. Будући да те зраке имају с том плохом више од три точке заједничке, излази да се оне читаве налазе на тој плохи. Поставимо ли надаље такве равнине правца  $l$  и точкама  $A, B$  те њима пресијечемо чуњосјечницу  $s$ , тад свака трансверзала правца  $l$  и чуњосјечнице  $s$ , која пролази точком  $A$  или точком  $B$ , сијече, као што знадемо, и чуњосјечницу  $s_1$  наше плохе 3. реда. И ове трансверзале имају према томе с том плохом више него три точке заједничке, дакле и оне се налазе читаве на тој плохи. Видимо према томе, да сваком од точка  $S, A$  и  $B$  пролазе по два правца наше плохе 3. реда, који сијеку чуњосјечницу  $s$ .

Показали смо, да је правац  $t$  такав правац наше плохе 3. реда, дуж којег ју тангира равнина  $(tl) = \gamma$ . Свака равнина тог правца сијече нашу плоху у још једној чуњосјечници. Све те чуњосјечнице (међу њима и  $s, s_1$ ) морају сјећи тај правац у исте двије точке, јер само у два његова сјечишта с чуњосјечницом  $s$  (и с чуњосјечницом  $s_1$ ) има та плоха тангенцијалне равнине, које се разликују од сталне такве равнине  $\gamma$ . Будући да на темељу изведеног сваки правац ових двају сјечишта пробада нашу плоху 3. реда још у само једној точки, то су наведена два сјечишта двоструке точке наше плохе, а правац  $t$  је њен четворозначни правац.

Позната је чињеница, да сваком двоструком точком неке опће плохе 3. реда с двије такве точке пролазе осим оног правца, који је четворозначан, још четири правца, који су двозначни. По два између њих, из сваке двоструке точке по један, се сијеку, а могу бити коњугирано комплексни прве или друге врсте. У нашем случају открит ћемо те правце на овај начин: Равнина точка  $S, A, B$  сијече нашу плоху у кривуљи 3. реда, на којој се налази и сјечиште правца  $t$  с том равнином. Свака равнина правца  $t$  сијече ту кривуљу 3. реда у још даљње двије точке, којима пролази пресјечна чуњосјечница те равнине с нашом плохом. Вртимо ли ту равнину око правца  $t$ , доћи ћемо четири пута у положај, гдје ће оне двије точке на кривуљи 3. реда у равнини  $(SAB)$  пасти скупа, т. ј. у тој се равнини пресјечна чуњосјечница претвара у два реална или имагинарна правца, јер добива једну двоструку точку. То излази из чињенице, да на кривуљи 3. реда можемо из једне њене точке повући највише четири тангенте. Код наше плохе 3. реда то значи, да се у четири равнине правца  $t$  налазе парови правца те плохе,



т. ј. правцем  $t$  можемо поставити на ту плоху четири тангенцијалне равнине. Видјели смо, да се у тим тангенцијалним равнинама пресјечна чуњосјечница распада у два правца, ради настале двоструке точке. Разумије се само по себи, да овакве тангенцијалне равнине, као и двоструке точке плохе, могу бити или реалне, или имагинарне, а у том случају добивамо имагинарне правце прве, односно друге врсте.

На тај смо начин заправо открили свих 27 праваца наше опће плохе 3. реда, јер је правац  $t$  четворозначан, њега сијеку четири пара двозначних праваца, док су правац  $l$  и парови праваца који пролазе точкама  $S$ ,  $A$  и  $B$  једнозначни. Дакле,

$$4 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 7 = 27.$$

Одабирањем разних положаја за точке  $S$ ,  $A$  и  $B$ , као и положаја и облика чуњосјечнице  $c$ , која може бити и имагинарна, добили би разне варијанте опћих плоха 3. реда с двије или више двоструких точкака, од којих двије могу бити реалне или имагинарне. Ове ће двоструке точке бити заправо такве, у каквима правац  $t$  сијече чуњосјечницу  $c$ .

Даље нећемо овако добивене плохе разматрати посве опћено, него ћемо се ограничити само на један њихов дио, и то онај који смо споменули у уводу.

2. Узмимо, да су точке  $A$ ,  $B$  и  $S$  опет по вољи смјештене у простору, али намјесто реалне коначне чуњосјечнице  $c$  узмимо сада неизмјерно далеку апсолутну чуњосјечницу простора. Наш досадањи свежањ плоха 2. реда прешао је тиме у свежањ кугала, одређен у коначности точкама  $A$ ,  $B$ . Равнина  $\rho$  бит ће симетрална равнина дужине  $AB$ , а њена сједишта са зракама снопа точке  $S$  бит ће полови неизмјерно далеке поларне равнине обзиром на плохе 2. реда, које пролазе апсолутном чуњосјечницом. Имамо дакле кугле и њихова средишта. Видимо према томе, ако имамо свежањ кугала одређен двјема точкама  $A$ ,  $B$ , па средиште сваке ове кугле спојимо с истом точком  $S$  у простору и том спојницом прободемо, ту куглу, тад сва таква прободишта чине неку опћу плоху 3. реда, која пролази апсолутном чуњосјечницом. Осим тога знадемо, на темељу разматрања у точ. 1., да су точке  $A$ ,  $B$  и  $S$  на тој плохи, као и то, да је точка  $S$  врх тангенцијалног стошца 2. реда ове плохе дуж апсолутне чуњосјечнице на тој плохи. Ова занимива особина такве плохе каже нам другим ријечима, да ће сваки њен равнински пресјек кроз точку  $S$  бити не само циркуларан, него ће имати у тој точки и свој четвороструки фокус. У тој се наине точки сијеку имагинарне тангенте тих пресјечних



кривуља постављене у њиховим апсолутним тачкама. Означимо овако добивену плоху 3. реда с  $P$ . Сви равнински пресеци плохе  $P$  кроз тачку  $S$  бити ће према томе или строфоидале, или обичне строфоиде, а с овом тачком као четвероструким фокусом.

Узмимо тачком  $S$  једну такву равнину и пресецимо њом симетралну равнину  $\rho$  тачака  $A, B$  у правцу  $s$ . Кугле нашег свежња, којима су средишта на правцу  $s$ , чине прамен кугала, које пролазе оном кружницом тачака  $A, B$ , којој је средиште на правцу  $s$ , док јој је равнина на тај правац окомита. Равнина  $(Ss)$  сијече тај прамен кугала у прамену кружница, чија су средишта на правцу  $s$ . Зраке тачке  $S$ , које пролазе овим средиштем на правцу  $s$ , сијеку придружене кружнице наведеног прамена у тачкама строфоидале [4]. То вриједи за сваку равнину тачке  $S$ , а према томе одавде излази, да се плоха  $P$  састоји из два дијела. Тачка  $S$  налази се на овалном дијелу плохе, који је читав у коначности.

Одаберимо сада у нашем свежњу онај прамен кугала, које пролазе тачкама  $A, B$  и  $S$ . Средишта тих кугала налазе се на оном правцу равнине  $\rho$ , који је окомит на равнини тачака  $A, B, S$  и пролази средиштем кружнице ових тачака. Равнина овог правца и тачке  $S$  сијече припадни прамен кугала у прамену кружница, које пролазе тачком  $S$ . Производ овог прамена кружница и придруженог прамена зрака тачке  $S$ , које пролазе средиштима тих кружница, распада се овдје у правац  $l$  и тачку  $S$ , односно у правац  $l$  и пар изотропних правца, који се сијеку у тачки  $S$ , као што се то може закључити на темељу наших разматрања у точ. 1. То је наиме онај пар правца плохе  $P$ , који пролазе тачком  $S$ , а сијеку апсолутну чуњосјечницу. Видимо, дакле, да је тачка  $S$  кружна тачка наше особите плохе  $P$ . Правац  $l$  налази се испод равнине  $\rho$ , удаљен од ње исто толико колико и тачка  $S$  изнад те равнине. Будући да су наши и снап зрака ( $S$ ) и свежањ кугала, као и њихова пројективна придруженост, симетрични обзиром на равнину тачака  $A, B, S$ , то мора и наша строфоидална плоха  $P$  бити симетрична на ту равнину. Ова симетрална равнина  $(A, B, S)$  сијече плоху  $P$  у строфоидали, коју ћемо звати симетралном строфоидалом те плохе. Сјециштем  $L$  правца  $l$  с овом симетралном строфоидалом пролази асимптота  $a$  ове строфоидале [7; стр. 38]. Правцем  $l$  можемо према томе поставити још три тангенцијалне равнине наше строфоидалне плохе, осим оне у тачки  $S$ . Двије од тих равнина тангират ће плоху  $P$  у тачкама  $A, B$ , а трећа у неизмјерности.<sup>1)</sup> Будући да су сви равнински пресеци плохе  $P$  циркуларни,

<sup>1)</sup> Јер тачком  $L$  пролази асимптота симетралне строфоидале.

сијеку равнине правца  $l$  ову плоху у кружницама. У равнинама  $(IA)$  и  $(IB)$  распада се та кружница у пар изотропних праваца, који се сијеку у точкама  $A$ ,  $B$ , а према томе су и те точке кружне точке наше строфоидалне плохе  $P$ . Видјели смо у точ. 1., да се пресјечне чуњосјечнице с равнинама правца  $l$  у три његове равнине, и то  $(IA)$ ,  $(IB)$  и  $(IS)$ , распадају у два правца, док у четвртој  $(It)$  таква два правца падају скупа у правац  $t$ . У нашем специјалном случају су до сада три споменута изотропна пара праваца она три пара, у мало прије наведене прве три равнине.

Позната је чињеница, да је код строфоидале асимптота једнако удаљена од симетрале прамена кружница из којег та кривуља настаје, као и то, да се њен четвороструки фокус налази на њој. Одавле директно излази да је равнина  $\alpha$  правца  $l$  и асимптота  $a$  асимптотска равнина наше плохе  $P$ . Другим ријечима то значи, да равнина  $\alpha$  дира дуж неизмјерно далеког правца строфоидалну плоху  $P$ . Неизмјерно далеки правац  $t$  плохе  $P$  је према томе њен четверозначан правац, а то смо већ открили за правац  $t$  у коначности на плохама у точ. 1. Овим смо надаље открили и сва три могућа реална правца на тој плохи. Ова чињеница, да строфоидална плоха  $P$  има у неизмјерности четверозначан правац, дуж којег ју тангира само равнина  $\alpha$ , казује нам надаље то, да су сви равнински пресјечи плохе  $P$ , који су успоредни с асимптотском равнином  $\alpha$ , такођер кружнице. Све овакве кружнице су чуњосјечнице, које пролазе сјечиштима апсолутне чуњосјечнице и неизмјерно далеког четверозначног правца, као што смо у осталом и то већ видјели на реалним и коначним дијеловима аналогних плоха у точ. 1. Ова су два сјечишта на апсолутној чуњосјечници, као што знадемо, имагинарне неизмјерно далеке двоструке точке наше строфоидалне плохе  $P$ . Будући да постоје четири тангенцијалне равнине плохе  $P$ , које су успоредне с асимптотском равнином  $\alpha$ , а које ради симетрије тангирају ту плоху на симетралној строфоидали, излази, да плоха  $P$  има даље четири кружне точке у својој симетралној равнини. Ова су четири пара изотропних праваца наше строфоидалне плохе њени познати двозначни правци, који пролазе њеним имагинарним двоструким точкама, на њеном неизмјерно далеком четверозначном правцу.

Све резултате наших досадашњих разматрања обухватит ћемо сада оваквим ставком:

а) *Строфоидалне плохе 3. реда, које настају као производ свежња кугала двију шочака  $A$ ,  $B$  и сноја зрака неке шочке  $S$ , које пролазе средишњима тих кугала, симетрична је обзиром на равнину  $(A, B, S)$ , има асимптомску равнину и пролази апсолутном чуњо-*

сјечницом, дуж које ју тангира сфожац с врхом у шочки  $S$ . У дијаметралној равнини има три плоха седам кружних шочака, у које се убрајају и шочке  $A, B, S$ .

Видјели смо сприједа, да све равнине тачке  $S$  сијеку плоху  $P$  у строфоидалама, којима је тачка  $S$  четвоструки фокус. Свака равнина тачке  $S$  сијече неизмјерно далеку равнину апсолутне чуњосјечнице у једном правцу, а њу само у двије тачке. Све равнине овог неизмјерно далеког правца чине у коначности свезак успоредних равнина. Пресјечне кривуље наше плохе с равнима оваквог свеска имаће своје четвоструке фокусе на једној заједничкој окомици, јер само таква пролази полом оног неизмјерно далеког правца обзиром на апсолутну чуњосјечницу, а пресјечница је имагинарног пара тангенцијалних равнина плохе  $P$  у тим сјецкиштима на апсолутној чуњосјечници. Будући да у сваком оваквом свеску успоредних равнина једна пролази и тачком  $S$ , а та тачка је већ у том случају четвоструки фокус, то за нашу плоху вриједи и овај ставак:

b) Четвоструки фокус сваког равнинског пресјекa строфоидалне плохе  $P$  налази се у окомишој пројекцији шочки  $S$  на ту равнину.

Из овога ставка одмах произлазе и ови даљњи ставци:

c) Сијечемо ли строфоидалну плоху  $P$  равнинама неког правца, тад се четвоструки фокуси ових пресјечних кривуља налазе на кружници, која пролази шочком  $S$  и сијече окомишо тај правац у дијаметралној шочки  $S$ .

d) Све равнине сноја равнина неке по вољи одабране шочки сијеку строфоидалну плоху  $P$  у кривуљама, којих се четвоструки фокуси налазе на кугли, која пролази врхом шог сноја и шочком  $S$  тако, да су те двије шочке дијаметралне на тој кугли.

Наведени ставци изричу нам очиту аналогију строфоидалне плохе  $P$  с куглом. На темељу ових досадањих ставака можемо о нашим строфоидалним плохама изрећи још и ове ставке:

e) Међу пресјечним кривуљама строфоидалне плохе  $P$  с равнинама неког свеска паралелних равнина налазе се, осим оне кроз шочку  $S$ , још двије строфоидале. Међу равнинама неког коначног правца налазе се строфоидале у три или једној шаквој равнини, осим оне која пролази шочком  $S$ .

f) Међу равнинама неке по вољи одабране шочки налази их се  $\infty^1$ , које строфоидалну плоху  $P$  сијеку у строфоидалама, којих се четвоструки фокуси налазе на некој просторној циклици 4. реда на тој плохи.

Последња два ставка произлазе директно одатле, што сваки правац тачке  $S$  сијече ту плоху у још двије тачке, а свака кружница, која пролази тачком  $S$ , сијече ју у још даљње три тачке. Надаље свака кугла продире овакву плоху 3. реда у просторној кривуљи 4. реда, јер обје већ имају заједничку апсолутну чуњосјечницу.

Чуњосјечница  $c_1$  врхова свих стожаца унутар нашег свежња кугала је имагинарна кружница у симетралној равнини тачака  $A$ ,  $B$ . Будући да су пресјечи строфоидалне плохе  $P$ , с равнинама успоредним с њеном асимптотском равнином, кружнице, може се на темељу ставка  $b$ ) врло лако запазити, да ће сви пресјечи равнина спојница  $AB$  бити строфоидале, којих ће се четвороструки фокуси налазити на кружници плохе  $P$  која пролази тачком  $S$ , а равнина јој је окомита на тој спојници.

Свака опћа дводјелна плоха 3. реда има три реална правца а осим равнине ових трију реалних правца има она још дванаест реалних равнина које пролазе тим правцима (сваким по четири), а које дирају ту плоху (Стептоа L. [1; стр. 214]). Ових дванаест равнина већ је пронађено код наших строфоидалних плоха ако се узме на знање, да два реална правца у неизмјерности падају скупа а према томе и двије тангенцијалне равнине које њима пролазе. Другим ријечима, све четири тангенцијалне равнине плохе  $P$ , успоредне с асимптотском равнином, су двозначне. Видимо према томе, да је наша строфоидална плоха  $P$  опћа плоха 3. реда V. врсте [2; § 2 стр. 17].

Поставимо ли неку куглу тако, да јој се средиште налази у тачки  $S$ , онда та кугла дира нашу плоху  $P$  дуж апсолутне чуњосјечнице, јер дуж ње оба та тијела имају заједнички тангенцијалан стожац. Продор ове кугле с нашом плохом састоји се дакле из двоструке апсолутне чуњосјечнице и још једне реалне или имагинарне кружнице. Свака кугла средишта  $S$  продире нашу плоху у једној кружници, које равнина сијече ту плоху у још једном правцу. Будући да у коначности има та плоха само један реалан правац, и то  $l$ , то је он ос тога прамена равнина. Видимо, дакле, да наша плоха може настати и као производ прамена равнина и прамена концентричних кугала.

Одаберемо ли врх  $S$  снопа зрака негдје на спојници тачака  $A$ ,  $B$ , строфоидална плоха  $P$  постат ће ротациона. Правац  $l$  отићи ће у овом случају такођер у неизмјерност, дакле ће плоха  $P$  имати неизмјерно далеки инфлексциони правац, а сви пресјечи кроз тачку  $S$  бит ће усправне строфоиде.

3. Претпоставимо сада, да тачке  $A$ ,  $B$  падну скупа у неку тачку  $D$ . Производ оваквог свежња кугала са снопом зрака неке

точке  $S$ , пројективно придружени на сприједа описани начин, бит ће строфоидална плоха с двоструком точком у точки  $D$ . Равнина  $\rho$  пролази сада том точком, разумије се окомито на заједничку тангенту  $o$  свих кугала нашег свежња ( $o = os$  свежња), а кружница  $c_1$  овакве плохе у тој равнини распада се у пар изотропних праваца точке  $D$ .

Осим већ сприједа споменутих особина, имат ће строфоидална плоха  $P$  оваквог облика још и неке друге, јер равнине свеска спојнице  $SD$ , као и равнине оси  $o$  свежња кугала, сијеку ту плоху у строфоидама.

Знадемо из разматрања из точ. 2., да се четвоструки фокуси свих равнинских пресјека строфоидалних плоха налазе на окомитој пројекцији точке  $S$  на равнине тих пресјека. Одавле међутим излази, да ће точком  $S$  пролазити свезак равнина, које овакву плоху сијеку у строфоидама, т. ј. равнине спојнице  $SD$ , јер све равнине двоструке точке сијеку овакву строфоидалну плоху у циркуларним кривуљама рода нултога. Из сприједа изведеног излази, да ће четвоструки фокуси свих оваквих пресјека бити на некој кугли, којој је дужина  $SD$  промјер. Поставимо ли правцем  $l$  и двоструком точком  $D$  равнину, тад је та равнина окомита на спојници  $SD$ , а сијече наша плоху у правцу  $l$  и пару изотропних праваца. Наша, мало прије споменута, кугла дира ову равнину, дакле сијече плоху  $P$  у кривуљи која се састоји из овога пара изотропних праваца, из апсолутне чуњосјечнице и још једне кружнице. Све равнине заједничке тангенте  $o$  свих кугала нашег свежња можемо сматрати оним куглама тог свежња, које имају бесконачно дуги полумјер. Све точке плохе  $P$ , које су на овим „куглама“, леже на неизмјерно далеком правцу и некој кружници, која према ономе од прије пролази точком  $S$  и сијече заједничку тангенту свежња окомито у дијаметралној точки точке  $S$ . Ово у осталом вриједи за сва три облика плоха  $P$ . На темељу досадањих разматрања можемо особине строфоидалних плоха оваквог облика скупити у овакву ставку:

*Четвоструки фокуси равнинских пресјека строфоидалне плохе 3. реда с двоструком точком, којих равнине пролазе том точком, леже на кугли, којој је промјер удаљаност двоструке точке  $D$  до врха  $S$  имагинарног тангенцијалног шиошца те плохе дуж апсолутне чуњосјечнице. Унутар ових  $\infty^2$  циркуларних кривуља 3. реда рода нултога постоји  $\infty^1$  строфоида, које леже у равнинама спојнице  $SD$  и у равнинама оси  $o$  свежња кугала из којих та плоха настаје. Пресјечи равнинама првог свеска имају своје четвоструке фокусе у точки  $S$ , а пресјечи равнинама другога свеска имају те фокусе*

на кружности која пролази тачком  $S$ , а коју ос свежња кугала сијече окомито у дијаметралној тачки тачке  $S$ .

Позната је чињеница, да је свака уникурзална циркуларна кривуља 3. реда ножишна кривуља параболе [7; стр. 25]. Строфоида је ножишна кривуља параболе, којој је фокус на спојници четвоструког фокуса и двоструке тачке тако, да четвоструки фокус располава удаљеност између фокуса те параболе и двоструке тачке строфоиде. Равналица ове параболе је успоредница с асимптотом строфоиде повучена њеном двоструком тачком.

Казали смо мало прије, да су пресјечи наше строфидалне плохе с равнинама оси  $o$  свежња кугала саме строфоиде, којих се четвоструки фокуси на кружности, која иде тачком  $S$  и сијече ос  $o$  свежња кугала окомито у дијаметралној тачки тачке  $S$ . Поставимо сада тачку  $F$  на спојници  $DS$  тако, да тачка  $S$  располава дужину  $FD$ . Тачком  $F$  поставимо сада другу кружницу, која споменуто ос  $o$  свежња кугала сијече исто као прва кружница, која иде тачком  $S$ . Свака равнина оси  $o$  сијече нашу строфидалну плоху у строфоиди, којој је сјечиште с првом описаном кружницом њен четвоструки фокус, док је сјечиште с другом кружницом фокус параболе, којој је пресјечна строфоида ножишна кривуља, за двоструку тачку  $D$  као пол. Равналице тих параболо налазе се у равнини  $\rho$  двоструке тачке  $D$ . Замислимо сада на свакој равнини оваквог пресјека кроз ос  $o$  постављене окомите равнине, које тангирају оне параболе у тим равнинама, којих су ножишне кривуље њихови пресјечи с плохом  $P$ . Све равнине овако постављене тангентама такве параболе чине неки парабололичан ваљак, који ће бити једнак свим осталим таквим ваљцима јер су посве једнаке параболе из којих они настају. Те су параболе једнаке зато, што им је свима фокус од равналице једнако далеко. Јер сви ови усправни ваљци тангирају дуж својих тјемених изводница исту равнину, а те тјемене изводнице пролазе једном тачком окомито испод тачке  $F$  (окомито обзиром на равнину  $\rho$ ), то сви ови парабололици ваљци оматају ротациони параболоид. Ос тога параболоида пролази тачком  $F$  окомито на равнину  $\rho$ . У равнини  $\rho$  налазе се све равналице, а у тачки  $F$  фокуси свих осних пресјека овог параболоида. На темељу ових разматрања можемо овакву строфидалну плоху 3. реда дефинирати и на овај начин:

*Строфидална плоха 3. реда с двоструком тачком је ножишна плоха ротационог параболоида, ако пол лежи у равнини равналица осних пресјека тога параболоида.*

На оваквој строфоидалној плохи 3. реда с двоструком точком постоје само три кружне тачке, опет у њеној симетралној равнини.

4. Узмимо сада, да су тачке  $A, B$  на оси  $o$  нашег свежња кугала имагинарне. Производ овог свежња кугала и снопа зрака тачке  $S$ , пројективно придружених на сприједо описани начин, бит ће у овоме случају једнодјелна опћа плоха 3. реда. Ову плоху можемо замислити да је настала раздвајањем оне с двоструком точком, ако се она раскинула у двострукој тачки у смислу једно-плошног хиперболоида [2; § 2]. Будући да из тачке  $L$ , и неизмјерно далеке тачке, можемо на симетралну кривуљу ове плохе поставити четири реалне тангенте, међу којима се налази и асимптота те кривуље, видимо да ће оваква строфоидална плоха 3. реда имати само три кружне тачке, у које се убраја и тачка  $S$ . Тангенцијалне равнине ове плохе, које пролазе точком  $S$ , оматају познати имагинаран тангенцијални стожац дуж апсолутне чуњосјечнице и реалан тангенцијални стожац дуж кружнице  $c_1$  ове плохе у равнини  $\rho$ .

Знадемо, да све равнине тачке  $S$  сијеку ову плоху у строфоидалама, односно строфоидама. Поставимо ли точком  $S$  равнине, које тангирају кружницу  $c_1$  у равнини  $\rho$ , тад ове равнине не само тангирају ову плоху, него је и сијеку у строфоидама, јер ти пресјечи имају двоструку тачку. Одавде излази ставак:

*Точком  $S$  једнодјелне строфоидалне плохе 3. реда пролази  $\infty^1$  равнина, које омаштају стожац 2. реда, а сијеку ову плоху у строфоидама с четвороструким фокусом у тој тачки, док су им двоструке тачке на једној кружници.*

Повучемо ли код ове плохе аналогију с нашим разматрањима у точ. I., видимо одмах, да њене двије тангенцијалне равнине правца  $l$  постају имагинарне, ради имагинарности тачака  $A, B$ . Правци плохе у тим равнинама су према томе имагинарни правци друге врсте. Исто су тако имагинарне и двије тангенцијалне дво-значне равнине неизмјерно далеког четверозначног правца, у којима се налазе даљњи имагинарни правци друге врсте на нашој плохи, и то двозначни. Видимо, дакле, да је ова плоха у истини опћа плоха 3. реда с три реална правца, и то IV. врсте, т. ј. једнодјелна.

Строфоидална плоха овог облика, као и оне до сада споменуте, бит ће ротациона, ако тачку  $S$  одаберемо на реалној спојници имагинарних тачака  $A, B$ .

5. На крају ћемо обновити још једну чињеницу, изведену у овој радњи, која је у вези с разноликошћу облика опћих плоха 3. реда. Код извођења свих облика таквих плоха полази F. Klein од познате опће плохе 3. реда с четири двоструке тачке. Раздва-



јањем тих плоха у двостукиим точкама у смислу једноплошног и двоплошног хиперболоида, добива он свих пет врста опћих плоха 3. реда без сингуларитета, које се у главном разликују у броју и врсти њихових имагинарних праваца. Четврта и пета врста тих плоха има само три реална правца, док су остали имагинарни прве или друге врсте. Плохе четврте врсте су једнодјелне, а оне пете врсте су дводјелне. Видјели смо, да унутар ових двију врста има наших строфоидалних плоха. Ове наше плохе имају међутим двије имагинарне двоструке точке у неизмјерности, гдје им се налазе или два, или сва три реална правца, који су стегнути у један. Чињеница, коју смо овдје жељели истаћи је та, да међу опћим плохама 3. реда IV. и V. врсте има таквих, које имају пар имагинарних двоструких точкака, јер се то на темељу Klein-ових, а и осталих разматрања о опћим плохама 3. реда, не може директно закључити.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Cremona L. — Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung, Berlin 1870.
- [2] Klein F. — Über Flächen dritter Ordnung, *Gesamm. math. Abhandlungen*, Bd. II, S. 11—44, Berlin 1922.
- [3] Majcen J. — Eine neue Erzeugungsart für verschiedene typische Formen der Flächen 3. Ordnung. *Jahresb. d. deutsch. math. Verein.* 14, 1905.
- [4] Niče V. — О строфоидали и просторној кривуљи 4. реда на кугли. *Рад Југословенске академије* 276, стр. 109—116, 1949.
- [5] Reye T. — Die Geometrie der Lage, Leipzig 1910.
- [6] Steiner J. — *Gesamm. Werke*, Bd. II, S. 651—659, Berlin 1882.
- [7] Wieleitner H. — Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908.

#### LES SURFACES STROPHOÏDALES DU 3<sup>e</sup> ORDRE

Par Vilko Niče

L'auteur a étudié et trouvé un certain nombre de propriétés d'une espèce de surfaces du 3<sup>e</sup> ordre, qu'il appelle, à cause d'une certaine analogie avec la strophoïde, surfaces strophoïdales du 3<sup>e</sup> ordre. Les surfaces strophoïdales du 2<sup>e</sup> ordre seraient des sphères. Les surfaces strophoïdales du troisième ordre sont de surfaces du troisième ordre, passant par la section conique absolue, telles que leurs plans tangents le long de la section conique absolue enveloppent un cône imaginaire du second ordre.