ГЕОМЕТРИСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА БАНАХЈЕВИЧЕВЕ СХЕМЕ

РАДИВОЈЕ КАШАНИН (Београд)

Методи које је проф. Т. Анђелић изложио у свом раду „Решавање система линеарних алгебарских једначина матричном методом по Банахјевичевој схеми“ може се дати геометриска интерпретација.

Узмимо два координатна триједра вектора: триједар X састављен од вектора $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ и триједар Y састављен од вектора $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$. Векторе реципрочних триједара означићемо са $\mathfrak{a}^1$, $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{a}^3$ и $\mathfrak{b}^1$, $\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{b}^3$. Претпоставимо да су нам познате контраваријантне координате вектора $\mathfrak{b}_k$ с обзиром на триједар X:

$$a_k{}^i = \mathfrak{a}^i \cdot \mathfrak{b}_k\,, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Тада је

$$\mathfrak{b}_k = a_k{}^1\,\mathfrak{a}_1 + a_k{}^2\,\mathfrak{a}_2 + a_k{}^3\,\mathfrak{a}_3\,, \quad (k = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Коваријантне координате вектора $\mathfrak{r}$ у триједру X нека буду x_1, x_2, x_3, а у триједру Y нека буду y_1, y_2, y_3:

$$x_i = \mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{r}\,, \quad y_k = \mathfrak{b}_k \cdot \mathfrak{r}\,.$$

Помножимо ли (1) скаларно са $\mathfrak{r}$, добићемо

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_1{}^1\,x_1 + a_1{}^2\,x_2 + a_1{}^3\,x_3 \\ y_2 &= a_2{}^1\,x_1 + a_2{}^2\,x_2 + a_2{}^3\,x_3 \\ y_3 &= a_3{}^1\,x_1 + a_3{}^2\,x_2 + a_3{}^3\,x_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из координата x_i лако је израчунати координате y_k. Биће лак и обрнут задатак ако је $\mathfrak{a}_i \parallel \mathfrak{b}_i$ за $i = 1, 2, 3$. Тада наиме једначине (2) гласе

$$y_1 = a_1{}^1\,x_1\,, \quad y_2 = a_2{}^2\,x_2\,, \quad y_3 = a_3{}^3\,x_3\,.$$

Међутим, ако то није случај, треба систем једначина (2) решавати по x_1, x_2, x_3.

Да бисмо у том општем случају на неки начин уравнотежили један рачун с другим, увешћемо помоћни координатни триједар Z

вектора $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$ начињен овако. Сигурно постоји бар једна координатна раван триједра X која није паралелна с једном од координатних равни триједра Y. Нумеришући згодно векторе, може се узети да су те равни $X\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ и $Y\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$. Ове равни се, дакле, секу дуж неке праве. За правац вектора $\mathfrak{c}_2$ узећемо правац те праве. Вектор $\mathfrak{c}_2$ је зато компланаран с једне стране с векторима $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$, с друге стране с векторима $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$:

$$\mathfrak{c}_2 = \alpha_2^2\mathfrak{a}_2 + \alpha_2^3\mathfrak{a}_3 = \beta_2^1\mathfrak{b}_1 + \beta_2^2\mathfrak{b}_2.$$

Вектор $\mathfrak{c}_1$ узећемо паралелно с вектором $\mathfrak{b}_1$, који се према (1), може линеарно изразити помоћу $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$; дакле,

$$\mathfrak{c}_1 = \beta_1^1\mathfrak{b}_1 = \alpha_1^1\mathfrak{a}_1 + \alpha_1^2\mathfrak{a}_2 + \alpha_1^3\mathfrak{a}_3.$$

Вектор $\mathfrak{c}_3$ узећемо паралелно с вектором $\mathfrak{a}_3$, који се може линеарно изразити помоћу вектора $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$; дакле,

$$\mathfrak{c}_3 = \alpha_3^3\mathfrak{a}_3 = \beta_3^1\mathfrak{b}_1 + \beta_3^2\mathfrak{b}_2 + \beta_3^3\mathfrak{b}_3.$$

И тако, за помоћни триједар Z имамо:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^1\mathfrak{a}_1 + \alpha_1^2\mathfrak{a}_2 + \alpha_1^3\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{c}_1 = \beta_1^1\mathfrak{b}_1 \\ \alpha_2^2\mathfrak{a}_2 + \alpha_2^3\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{c}_2 = \beta_2^1\mathfrak{b}_1 + \beta_2^2\mathfrak{b}_2 \\ \alpha_3^3\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{c}_3 = \beta_3^1\mathfrak{b}_1 + \beta_3^2\mathfrak{b}_2 + \beta_3^3\mathfrak{b}_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Коваријантне координате вектора $\mathfrak{r}$ у триједеру Z нека буду z_1, z_2, z_3:

$$z_1 = \mathfrak{c}_1 \cdot \mathfrak{r}, \quad z_2 = \mathfrak{c}_2 \cdot \mathfrak{r}, \quad z_3 = \mathfrak{c}_3 \cdot \mathfrak{r}.$$

Скаларним множењем једначина (3) са $\mathfrak{r}$ добивамо

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \alpha_1^3 x_3 &= z_1 = \beta_1^1 y_1 \\ \alpha_2^2 x_2 + \alpha_2^3 x_3 &= z_2 = \beta_2^1 y_1 + \beta_2^2 y_2 \\ \alpha_3^3 x_3 &= z_3 = \beta_3^1 y_1 + \beta_3^2 y_2 + \beta_3^3 y_3. \end{aligned}$$

На тај начин, место система једначина (2) добивамо за трансформацију координата систем једначина

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^1 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \alpha_1^3 x_3 &= \beta_1^1 y_1 \\ \alpha_2^2 x_2 + \alpha_2^3 x_3 &= \beta_2^1 y_1 + \beta_2^2 y_2 \\ \alpha_3^3 x_3 &= \beta_3^1 y_1 + \beta_3^2 y_2 + \beta_3^3 y_3, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

у којем се координате x_i и y_k налазе у равноправном положају. Осим тога, знамо шта геометриски значе леве и десне стране једначина (4): то су коваријантне координате вектора $\mathfrak{r}$ у координатном триједру Z.

Остаје нам да одредимо бројеве α и β.

Из прве једначине у (3) и прве једначине у (1) имамо одмах:

$$\alpha_1{}^k = \mathfrak{c}_1 \cdot \mathfrak{a}^k = \beta_1{}^1 a_1{}^k,$$

а број $\beta_1{}^1$ остаје произвољан. Узећемо

$$\beta_1{}^1 = -1 : a_1{}^1.$$

Дакле,

$$\alpha_1{}^1 = -1, \quad \alpha_1{}^2 = -a_1{}^2 : a_1{}^1, \quad \alpha_1{}^3 = -a_1{}^3 : a_1{}^1. \tag{5}$$

Друга једначина у (3) је векторска једначина

$$\alpha_2{}^2 \mathfrak{a}_2 + \alpha_2{}^3 \mathfrak{a}_3 = \beta_2{}^1 \mathfrak{b}_1 + \beta_2{}^2 \mathfrak{b}_2,$$

која је еквивалентна с три скаларне. Скаларним множењем са $\mathfrak{a}^1$ добивамо

$$0 = \beta_2{}^1 a_1{}^1 + \beta_2{}^2 a_2{}^1,$$

тј.

$$\beta_2{}^1 = -C a_2{}^1, \quad \beta_2{}^2 = C a_1{}^1,$$

где је C произвољан број. Множећи другу једначину у (3) скаларно са $\mathfrak{a}^2$ и $\mathfrak{a}^3$, добићемо

$$\alpha_2{}^2 = \mathfrak{c}_2 \cdot \mathfrak{a}^2 = \beta_2{}^1 a_1{}^2 + \beta_2{}^2 a_2{}^2 = \quad C(a_1{}^1 a_2{}^2 - a_1{}^2 a_2{}^1),$$
$$\alpha_2{}^3 = \mathfrak{c}_2 \cdot \mathfrak{a}^3 = \beta_2{}^1 a_1{}^3 + \beta_2{}^2 a_2{}^3 = -C(a_1{}^3 a_2{}^1 - a_1{}^1 a_2{}^3).$$

Узећемо

$$C = -1 : (a_1{}^1 a_2{}^2 - a_1{}^2 a_2{}^1).$$

Дакле,

$$\alpha_2{}^2 = -1, \quad \alpha_2{}^3 = \frac{a_1{}^3 a_2{}^1 - a_1{}^1 a_2{}^3}{a_1{}^1 a_2{}^2 - a_1{}^2 a_2{}^1}. \tag{6}$$

Број $\alpha_3{}^3$ у првој једначини у (3) остаје произвољан. Узећемо

$$\alpha_3{}^3 = -1. \tag{7}$$

Резултате (5), (6) и (7) даје и метода изнесена у чланку проф. Анђелића. —

Ради лакшег писања и изражавања радили смо у простору од три димензије. Међутим, лако је ова излагања уопштити на Еуклидов простор ма од колико димензија.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU SCHÉMA DE BANACHIEWICZ

Par R. Kašanin

On donne du schéma de Banachiewicz pour la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires l'interprétation géométrique sous forme de deux transformations successives de coordonnées, dans trois systèmes de coordonnées.