# РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА МАТРИЧНОМ МЕТОДОМ ПО БАНАХЈЕВИЧЕВОЈ СХЕМИ

ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ (Београд)

I. Систем од $n$ независних линеарних једначина са $n$ непознатих

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=k_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=k_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=k_n,
\end{aligned}\tag{1}$$

може се у матричним ознакама написати

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{k},\tag{2}$$

где је

$$\mathbf{A}=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{Bmatrix}=\{a_{ij}\},\tag{3}$$

$$\mathbf{x}=\begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{Bmatrix}=[x_i],\qquad \mathbf{k}=\begin{Bmatrix} k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{Bmatrix}=[k_i].\tag{4}$$

У таквом случају биће матрица коефицијената $\mathbf{A}$ несингуларна, тј. њена детерминанта $|a_{ij}|=A$ различита од нуле ($A\neq 0$). Тада се решење матричне једначине (2) може добити множењем те једначине слева реципрочном матрицом $\mathbf{A}^{-1}$, што даје

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k},\tag{5}$$

где је

$$\mathbf{A}^{-1} = \{\alpha_{ij}\}, \qquad \alpha_{ij} = \frac{A_{ji}}{A}, \tag{6}$$

а $A_{ji}$ је кофактор елемента $a_{ji}$ у детерминанти $A$ матрице $\mathbf{A}$. Сама реципрочна матрица $\mathbf{A}^{-1}$ одређује се, како је познато, из једначине

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad \text{одн.} \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \tag{7}$$

где је са $\mathbf{I}$ обележена односна јединична матрица.

Из обрасца (5) је јасно да је читаво тежиште оваквог матричног решавања система линеарних једначина у израчунавању реципрочне матрице. Међутим, према обрасцу (6) ово израчунавање се своди у крајњој линији на познати Крамеров (Cramer) поступак за решавање система линеарних алгебарских једначина помоћу детерминаната и не претставља у суштини ништа ново [1].

II. Изванредно важне примене система линеарних једначина изазвале су велики број радова о проблему њиховог решавања и довеле до проналаска многих метода за то. У новије време због извесних нових примена то интересовање за питање решавања система линеарних једначина са бројним коефицијентима је чак и порасло. Из тих разлога приказаћемо овде неке најновије резултате до којих је у тој области дошао Т. Банахјевич (T. Banachiewicz), и то изложене у нарочитој верзији и са извесним нашим допунама. Да бисмо то постигли, поћи ћемо од једне директне методе решавања система линеарних једначина која је одавно опробана, тзв. *Гаусовог* (Gauss) *алгоритма елиминације*. Помоћу њега се дати систем од $n$ линеарно независних једначина са $n$ непознатих претвара у еквивалентни систем нарочитог облика. Матрица тако трансформисаног система треба да буде троугластог облика, што значи да сви њени елементи испод (или изнад) главне дијагонале буду једнаки нули. Другим речима, после трансформације прва једначина ће садржавати у општем случају свих $n$ непознатих; друга једначина садржаваће само $n-1$ непознатих, без непознате $x_1$ итд.; и најзад последња једначина ће садржати само непознату $x_n$.

Гаусов алгоритам за извођење ове трансформације састоји се у овоме. Прва једначина система (1) са челним коефицијентом $a_{11}$ помножи се са $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ и дода $i$-тој једначини. При томе је јасно да коефицијент $a_{11}$ мора бити различит од нуле, што се увек може постићи размештањем самих једначина или непознатих. Кад се ово множење и додавање спроведе за сваку једначину, почев од друге, биће у свима једначинама система, осим прве, елиминисана непозната $x_1$. Затим се на систем од $n-1$ једначина са $n-1$ непознатих који образује овако изведени систем без прве једначине примени исти поступак. После тога ћемо добити систем у коме је у првој једначини у општем случају свих $n$ непознатих, у другој једначини недостаје само непозната $x_1$, а у трећој и осталим једначинама има само $n-2$ непознате, без $x_1$ и $x_2$. Настављањем овог поступка, прво на систем од $n-2$ једначине са $n-2$ непознате, који чини овако изведени систем без прве две једначине, па затим поступно на даље изведене системе, добиће се, најзад, после $n-1$ корака систем од $n$ једначина са $n$ непознатих који се може написати у облику

$$\begin{aligned}
b'_{11}x_1 + b'_{12}x_2 + \cdots + b'_{1,n-1}\,x_{n-1} + b'_{1n}\,x_n &= l'_1,\\
b'_{22}x_2 + \cdots + b'_{2,n-1}\,x_{n-1} + b'_{2n}\,x_n &= l'_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
b'_{n-1,n-1}\,x_{n-1} + b'_{n-1,n}\,x_n &= l'_{n-1},\\
b'_{nn}\,x_n &= l'_n.
\end{aligned} \tag{8}$$

Овај се систем може још упростити на тај начин што ћемо прву једначину поделити са $-b'_{11}$, а другу са $-b'_{22}$ и тако редом, тако да се систем (8) своди на систем једначина

$$\begin{aligned}
-x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1,n-1}\,x_{n-1} + b_{1n}\,x_n + l_1 &= 0,\\
-x_2 + \cdots + b_{2,n-1}\,x_{n-1} + b_{2n}\,x_n + l_2 &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
-x_{n-1} + b_{n-1,n}\,x_n + l_{n-1} &= 0,\\
-x_n + l_n &= 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

где смо независне чланове после овог дељења пребацили на леву страну тако да је

$$l_i = \frac{l'_i}{b_{ii}}. \tag{10}$$

У овом облику је решење система утолико олакшано што се, кад се решавање почне од последње једначине, у свакој наредној једначини појављује само по једна нова непозната са коефицијентима једнаким јединици. Свака непозната одређује се по обрасцу

$$\begin{gathered}
x_i = l_i + b_{in}\,x_n + b_{i,n-1}\,x_{n-1} + \cdots + b_{i,i+1}\,x_{i+1}\\
(i = n, n-1, \ldots, 1).
\end{gathered} \tag{11}$$

Мора се одмах подвући да се број рачунских операција, које треба извести и број података које треба записати при решавању датог система на овај начин, не смањује у поређењу са обичним начином режавања, али се не можемо упуштати да то овде показујемо. Предност овог начина решавања је, међутим, у томе што чини читав поступак прегледнијим, омогућава да се он схематизује, што је и учињено [2], и најзад, нарочито што омогућава лаку контролу рада сталним извођењем проба у току рачуна.

У матричном облику се систем (9) може написати

$$\mathbf{B}\mathbf{x}+\mathbf{l}=0, \tag{12}$$

где је

$$\mathbf{B}=\left\{\begin{array}{cccccc} -1 & b_{12} & b_{13}\cdot\cdot\cdot & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & -1 & b_{23}\cdot\cdot\cdot & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\cdot\cdot\cdot & -1 & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0\cdot\cdot\cdot & 0 & -1 \end{array}\right\}=\{b_{ij}\}, \tag{13}$$

$$\mathbf{l}=\left\{\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ l_n \end{array}\right\}=[l_i], \tag{14}$$

а где је $\mathbf{x}$ раније дати стуб непознатих. Са гледишта матричног рачуна Гаусов алгоритам се, дакле, састоји у претварању матрице коефицијената $\mathbf{A}$ у троуласту матрицу $\mathbf{B}$ и, наравно, у односној трансформацији стуба независних чланова $\mathbf{k}$ у стуб $\mathbf{l}$. У односу на матрицу коефицијената се, међутим, у Гаусовом алгоритму изводе искључиво тзв. *елементарне трансформације матрице*, тј.:

1) Множење врсте бројем и њено додавање другој врсти, што не мења уопште вредност детерминанте те матрице.

2) Размена врста или колона, што мења само знак поменуте детерминанте.

3) Множење врсте матрице одређеним бројем, чиме се множи и детерминанта те матрице.

На основу тога биће трансформат $\mathbf{B}$ матрице $\mathbf{A}$, изведен овим елементарним трансформацијама, еквивалентан у погледу детерминанте полазној матрици, јер је са њом у јасној и одређеној вези.

Сам елиминациони поступак који одговара Гаусовом алгоритму, одн. претварање матрице $\mathbf{A}$ у троугласту матрицу $\mathbf{B}$, изводи се матричном методом множења матрице A слева редом са $n-1$ матрица

$$\mathbf{U}_1=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{a_{n-1,1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{U}_2=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_{23}}{\beta_{22}} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -\frac{\beta_{n-1,2}}{\beta_{22}} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_{n2}}{\beta_{22}} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (15)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{U}_{n-1}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\gamma_{n,n-1}}{\gamma_{n-1,n-1}} & 1 \end{Vmatrix}$$

и најзад матрицом

$$\mathbf{D}=\begin{Vmatrix} -\frac{1}{b'_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b'_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{b'_{nn}} \end{Vmatrix}. \qquad (16)$$

Структура матрица (15) је јасна. Свака од њих има све елементе главне дијагонале једнаке јединици, а осим тога свака садржи још само елементе по једног стуба, који могу бити различити од нуле, и то само слева од главне дијагонале. При томе су у матрици $\mathbf{U}_i$ ти елементи у $i$-тој колони испод главне дијагонале, а добивају се деобом са првим негативним дијагоналним елементом односних елемената у $i$-том систему једначина који се добива узастопним трансформацијама. Исто тако је јасна и структура матрице $\mathbf{D}$, кад се она упореди са системом једначина (8).

Према томе, ако се стави

$$\mathbf{T}=\mathbf{D}\mathbf{U}_{n-1}\ldots\mathbf{U}_2\mathbf{U}_1, \tag{17}$$

биће

$$\mathbf{T}\mathbf{A}=\mathbf{B},\quad \mathbf{T}\mathbf{k}=-\mathbf{1}. \tag{18}$$

Из ових матричних једначина проистиче

$$\mathbf{A}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B},\quad \mathbf{k}=-\mathbf{T}^{-1}\mathbf{1}, \tag{19}$$

па кад ставимо

$$\mathbf{T}^{-1}=-\mathbf{C}, \tag{20}$$

где знак минус није од битног значаја, добићемо

$$\mathbf{A}=-\mathbf{C}\mathbf{B}\quad \text{или}\quad \mathbf{A}+\mathbf{C}\mathbf{B}=0 \tag{21}$$

и

$$\mathbf{k}=\mathbf{C}\mathbf{1}. \tag{22}$$

Матрична једначина (21) указује на једну изванредно важну чињеницу коју је код симетричних матрица приметио Холески (Cholesky) [3] и независно од њега у општем случају Банахјевич [**4**, **5**], да се матрица $\mathbf{A}$ може разложити у производ две троугласте матрице истог реда. При томе је $\mathbf{B}$ троугласта матрица (13), а за помоћну матрицу $\mathbf{C}$ одмах ћемо показати да је и она троугласта са елементима десно од главне дијагонале једнаким нули, тј. показаћемо да је она облика

$$\mathbf{C}=\begin{Bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{Bmatrix}=\{c_{ij}\}. \tag{23}$$

Иако је лако увидети да је матрица $\mathbf{C}$ троугласта из чињенице да је реципрочна матрица троугластој матрици, изнећемо један прост начин за њено израчунавање, који је показао Бодевиг (E. Bodewig) [**6**]. Наиме, биће с обзиром на (17) и (20)

$$\mathbf{C}=-\mathbf{U}_1^{-1}\mathbf{U}_2^{-2}\ldots\mathbf{U}_{n-1}^{-1}\mathbf{D}^{-1} \tag{24}$$

Међутим, ако се уочи да се свака од матрица $\mathbf{U}_i$ може раставити на збир јединичне матрице $\mathbf{I}$ и матрице $\mathbf{R}_i$ која има свуда нуле изузев оних елемената матрице $\mathbf{U}_i$ који су различити од нуле и леже ван главне дијагонале, тј. ако се стави

$$\mathbf{U}_i=\mathbf{I}+\mathbf{R}_i, \tag{25}$$

одмах се види да је увек

$$\mathbf{R}_i\mathbf{R}_k=\mathbf{0} \quad \text{за} \quad k \geqslant i. \tag{26}$$

Стога је

$$\mathbf{I}=\mathbf{I}-\mathbf{R}_i^2=(\mathbf{I}+\mathbf{R}_i)(\mathbf{I}-\mathbf{R}_i)$$

па је, према томе,

$$\mathbf{U}_i^{-1}=\mathbf{I}-\mathbf{R}_i. \tag{27}$$

На основу тога биће

$$\mathbf{C}=-(\mathbf{I}-\mathbf{R}_1)(\mathbf{I}-\mathbf{R}_2)\ldots(\mathbf{I}-\mathbf{R}_{n-1})\mathbf{D}^{-1}$$

и према једначини (26)

$$\mathbf{C}=(\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2+\cdots+\mathbf{R}_{n-1}-\mathbf{I})\,\mathbf{D}^{-1}. \tag{28}$$

С обзиром на структуру матрица $\mathbf{R}_i$ биће

$$\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2+\cdots+\mathbf{R}_{n-1}-\mathbf{I} \tag{29}$$

троугласта матрица чији су елеманти на главној дијагонали негативне јединице, а од нуле различити елементи леже лево од главне дијагонале. Како је, према (16),

$$\mathbf{D}^{-1}=\begin{Vmatrix} -b'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b'_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b'_{nn} \end{Vmatrix} \tag{30}$$

то се, множењем матрице (29) овом матрицом, множе елементи сваке колоне те матрице редом, почев од прве са $-b'_{11}$, затим са $-b'_{22}$ итд. То, међутим, оставља троугласти облик матрице (29) непромењен и потврђује да је матрица $\mathbf{C}$ троугласта са елементима слева од главне дијагонале и на главној дијагонали.

Из матричне једначине (21) се, поред осталог, добија и веза између детерминаната $A$, $\overline{B}$ и $C$ матрица $\mathbf{A}$, $-\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ која гласи

$$A=C\overline{B}. \tag{31}$$

Како је, међутим, очигледно $\overline{\mathbf{B}}=\pm 1$, биће

$$A=\pm C=\pm c_{11}c_{22}\cdots c_{nn}, \tag{32}$$

што показује да се вредност детерминанте коефицијената система линеарних једначина (1) добија као производ елемената главне дијагонале помоћне матрице $\mathbf{C}$.

Ипак, после свих ових излагања је јасно да је формално решење трансформисаног система (12) линеарних једначина дато са

$$\mathbf{x} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{l}, \tag{33}$$

и да, према томе, поново захтева одређивање реципрочне матрице. Истина, сад се тражи одређивање реципрочне матрице за троугласту матрицу, што је нешто лакше, али укупан број операција и записивања неће се смањити.

III. Најважнији резултат досадашњих излагања, да се матрица може раставити у производ две троугласте матрице супротних схема (□ = ◺◹), може се искористити за врло просто одређивање матрица $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ и за решавање система линеарних једначина (1) без израчунавања реципрочне матрице. Банахјевичева је заслуга што је указао на тај пут и први конструисао нарочиту схему за то. Банахјевич је из непознатих разлога за извођење резултата да се матрица $\mathbf{A}$ може разложити у производ две троугласте матрице и за конструкцију те нове схеме решавања система линеарних једначина дефинисао нове операције са матрицама. Оне се у суштини састоје у друкчијој дефиницији множења матрица, не врста — стубац, већ стубац — стубац, али које није асоцијативно. Матрице са којима се рачуна на тај начин назвао је *краковијани* [**4, 5**]. Међутим, најновији радови Бодевига и Цурмила (R. Zurmühl) [**7, 8**], а и овај рад, показују да се Банахјевичеви резултати изводе и тумаче врло просто са матричним рачуном и да је увођење краковијана потпуно непотребно.

Да дођемо до Банахјевичеве схеме, уочићемо да се матрична једначина (2) може написати у облику

$$\{\mathbf{A}, \ -\mathbf{k}\} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{34}$$

а матрична једначина (12) у облику

$$\{\mathbf{B} \ \mathbf{l}\} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{35}$$

где је у оба случаја $\mathbf{0}$ правоугаона нула матрица са $n$ врста и $n+1$ колона. При томе је, с обзиром на (21) и (22),

$$\{\mathbf{A}, \ -\mathbf{k}\} = -\mathbf{C}\{\mathbf{B} \ \ \mathbf{l}\} \tag{36}$$

или

$$\mathbf{F}+\mathbf{C}\,\mathbf{G}=\mathbf{0}, \tag{37}$$

кад се стави

$$\{\mathbf{A},-\mathbf{k}\}=\mathbf{F}, \quad \{\mathbf{B}\ \mathbf{l}\}=\mathbf{G}. \tag{38}$$

Матрица $\mathbf{F}$ је матрица $\mathbf{A}$ којој су као последњи $(n+1)$-и стубац додати независни чланови система једначина (1) са негативним знаком, а $\mathbf{G}$ је матрица $\mathbf{B}$ којој су додати независни чланови из система (9) као $(n+1)$-и стубац, и најзад $\mathbf{C}$ је раније дефинисана троугласта матрица (23). Експлицитно исписана матрична једначина (37) изгледа

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n}, & -k_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n}, & -k_2 \\ \cdot & \cdot\cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn}, & -k_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} & l_1 \\ 0 & -1 & \cdots & b_{2n} & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & l_n \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{Bmatrix} \tag{39}$$

и она у ствари одређује *Банахјевичеву схему* за решавање система линеарних алгебарских једначина.

Читав проблем се у суштини састоји у одређивању елемената $b_{ij}$ и $c_{ij}$. Између елемената $b_{ij}$ и $c_{ij}$ с једне стране и елемената $a_{ij}$ са друге стране добија се из схеме (39) врло лако веза

$$a_{ij}+c_{i1}\,b_{1j}+c_{i2}\,k_{2j}+\cdots+c_{ik}\,b_{kj}=a_{ij}+\sum_{k}{}' c_{ik}\,b_{kj}=0, \quad k\leqslant i,j, \tag{40}$$

при чему је увек $k$, број до кога се врши сабирање производа елемената $i$-те врсте матрице $\mathbf{C}$ и $j$-тог ступца матрице $\mathbf{B}$, једнак мањем од индекса $i$ и $j$, или, ако су они једнаки, једнак тим индексима. Ово је очигледно из троугласте структуре матрица $\mathbf{C}$ и $\mathbf{B}$ и правила о множењу матрица. Према томе, јасно је, да се у општем случају, кад се оставе на страну елементи главне дијагонале матрице $\mathbf{B}$, јер су сви једнаки $-1$ и стога унапред познати, може рећи да су од нуле различити само они елементи $b_{ij}$ за које је $i<j$ и они елементи $c_{ij}$ за које је напротив $i\geqslant j$.

При исписивању једначина (40), које треба да нам послуже за одређивање елемената $b_{ij}$ и $c_{ij}$, *најзгодније* је рачунати почев од првог ступца матрице $\mathbf{A}$, па одређивати све везе које одговарају елементима овог ступца идући одозго наниже. Предност таквог израчунавања је у томе, што се тада у свакој наредној од једначине (40) појављује само по један нови елемент $c_{ij}$, док је $i \geqslant j$, а по том један нови елемент $b_{ij}$ за $i < j$. Ако се ова чињеница искористи, може се систем једначина (40), који даје везе између $a_{ij}$, $b_{ij}$ и $c_{ij}$, написати у два одвојена облика, посебно за $i < j$, а посебно за $i \geqslant j$.

1) За $i < j$ биће

$$a_{ij} + c_{i1} b_{1j} + c_{i2} b_{2j} + \cdots + c_{i,\,i-1} b_{i-1,\,j} + c_{ii} b_{ij} = 0,$$

одакле се за одређивање $b_{ij}$ добија образац

$$b_{ij} = -(a_{ij} + c_{i1} b_{1j} + c_{i2} b_{2j} + \cdots + c_{i,\,i-1} b_{i-1,\,j}) : c_{ii}. \tag{41}$$

2) За $i \geqslant j$ биће

$$a_{ij} + c_{i1} b_{1j} + c_{i2} b_{2j} + \cdots + c_{i,\,j-1} b_{j-1,\,j} + c_{ij} b_{jj} = 0,$$

одакле се за одређивање $c_{ij}$ добија образац

$$c_{ij} = a_{ij} + c_{i1} b_{1j} + c_{i2} b_{2j} + \cdots + c_{i,\,j-1} b_{j-1,\,j}. \tag{42}$$

Практично упутство за израчунавање елемената $b_{ij}$ и $c_{ij}$ гласи:

1) За одређивање елемента $b_{ij}$ матрице **B** треба односном елементу $a_{ij}$ матрице **A** додати скаларни производ елемената $c_{ij}$ из $i$-те врсте до елемента $c_{ii}$ на главној дијагонали и елемената $b_{ij}$ $j$-тог ступца до елемента који се тражи (дакле, свих елемената ступца $j$ испред елемента који се тражи), па тај скаларни производ поделити негативним елементом $c_{ii}$ на главној дијагонали.

2) За одређивање елемента $c_{ij}$ матрице **C** треба односном елементу $a_{ij}$ матрице **A** додати скаларни производ елемената $c_{ij}$ из $i$-те врсте до елемента који се тражи (свих испред елемента који се тражи) и елемента $b_{ij}$ ступца $j$ до елемента на главној дијагонали.

Израчунавање елемената $b_{ij}$ матрице **B** овим поступком, по истом обрасцу, обухвата очигледно и елементе $(n+1)$-ог ступца, тј. $l_1, l_2, \ldots, l_n$, ако се узме да је

$$b_{i,\,n+1} = l_i \tag{43}$$

и да је

$$a_{i,\,n+1} = -k_i. \tag{44}$$

Осим тога исти поступак израчунавања служи и за врсте елемената $-s_i$ и $-\sigma_i$, које се могу додати испод врста матрица **F** и **C** у изразу (39). При томе $s_1, s_2, \ldots, s_n$ претстављају збирове колона матрице **A**, а $s_{n+1} = s$ збир независних чланова $k_i$ система датих једначина. Са друге стране $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ претстављају збирове колона матрице **C**. После ове допуне правоугаона матрица **F** постаје квадратна реда $n+1$, а допуњена матрица **C** постаје правоугаона типа $(n+1,\ n)$. Тако проширена матрица **C** помножена матрицом **G** која је типа $(n,\ n+1)$ даје као резултат квадратну матрицу $(n+1)$-ог реда. Ради примене поступка и на ове допунске врсте ставићемо

$$-s_i = a_{n+1,\,i} \qquad (i=1,2,\ldots,n+1), \tag{45}$$

одн.

$$-\sigma_i = c_{n+1,\,i} \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{46}$$

Ове две нове врсте и њихово коришћење у израчунавању служе за контролу као проба за тачност рада, јер по обрасцу (42) израчунати елемент $c_{n+1,\,i}$ мора бити једнак збиру елемената $c_{ij}$ у ступцу матрице **C** изнад елемента $c_{n+1,\,i}$. У тачност овог тврђења се лако уверавамо, ако испишемо изразе за све елементе $c_{ki}$ ступца $i$ матрице **C**, према обрасцу (42), и извршимо сабирање.

Из образаца (41) и (42) добија се:

1) Из обрасца (41) за $i=1$ $(i<j)$

$$b_{1j} = -a_{1j} : c_{11}, \qquad (j=1,2,\ldots,n+1), \tag{47}$$

јер у скаларном производу, који се иначе додаје, нема ниједног члана, пошто је $b_{1j}$ увек први елемент овога ступца.

2) Из обрасца (42) за $j=1$ $(i \geqslant j)$

$$c_{i1} = a_{i1}, \qquad (i=1,2,\ldots,n+1), \tag{48}$$

јер је сад $c_{i1}$ први елемент своје врсте и испред њега нема елемената.

Видели смо да је детерминанта матрице **C** једнака детерминанти матрице **A**, па ако матрица **A** није сингуларна, тј. ако је систем датих једначина линеарно независан, мора детерминанта **C** бити различита од нуле. То тврђење се управо своди на то да елементи главне дијагонале ове матрице морају бити различити од нуле. Међутим, применом показаног поступка може се догодити да се у току рачуна за неки дијагонални члан $c_{ii}$ матрице **C** добије ипак вредност нула. То у ствари значи само да ће $i$-ти систем једначина који се добија поступном трансформацијом после $i$ корака и који има $n-i$ непознатих имати први коефицијент у првој једначини једнак нули, што, наравно, не значи да детерминанта тог система мора бити једнака нули. У таквом случају треба само променити два стуба и то онај у коме се рачуна са неким од наредних, што је еквивалентно размени непознатих. То повлачи да се сви елементи $b_{ij}$ изнад таквог $c_{ii}$ морају избрисати и поново израчунати (иако Банахјевич тврди да се у том случају не мора у рачуну ништа понављати). Таква незгода се догађа само у оним случајевима кад је односни основни главни минор детерминанте A једнак нули. При томе се под основним главним минором разумеју минори ограђени цртама у детерминанти А матрице **A**, како је то показано у наредној схеми:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{49}$$

Да је заиста тако, одмах ћемо показати. Ако се узме у обзир да је $i$-ти дијагонални елемент $c_{ii}$ матрице **C** увек први коефицијент у првој једначини $i$-тог система једначина, тј. да је $c_{11} = a_{11}$, $c_{22} = \beta_{22}$, итд., може се после краћег рачуна применом Гаусовог алгоритма показати да ће челни коефицијент у првом изведеном систему једначина бити

$$\beta_{22} = c_{22} = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}{a_{11}} = \frac{\Delta_2}{a_{11}} = \frac{\Delta_2}{c_{11}}. \tag{50}$$

Како мора бити $a_{11} > 0$ може $\beta_{22}$ бити једнако нули само кад је

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 .$$

Уопште, како је

$$c_{ii} = \frac{\Delta_i}{c_{11}\; c_{22} \cdots c_{i-1,i-1}},$$

а $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{i-1,i-1}$ различити од нуле, биће $c_{ii}$ једнако нули само ако је

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} = 0. \tag{51}$$

Кад наступи случај да је неки дијагонални члан једнак нули, а то се не може отклонити никаквим размештајем једначина и непознатих, значи да је матрица **A** сингуларна. Према томе, ако је $c_{rr} \neq 0$ а $c_{r+1,r+1} = 0$ и не може се отклонити, биће и сви наредни дијагонални елементи једнаки нули. На тај начин се овим поступком може одредити и ранг матрице **A** и биће у оваквом случају једнак броју $r$ $(r < n)$. Хоће ли односни систем линеарних једначина бити неодређен или противречан, увиђа се израчунавањем елемената $b_{rj}$. Ако се за ове елементе добијају неодређене вредности, биће систем неодређен, иначе биће противречан.

IV. За практично провођење рачуна може се према (39) саставити од матрица **F**, **C** и **G**, допуњених елементима $-s_i$ и $-\sigma_i$, нарочита схема у врло простом облику. У том циљу треба уочити, прво, да се матрице **B** и **C** могу, пошто испуњавају супротна поља троугласте матрице, написати по Цурмилу [**7, 8**] као једна матрица ако се изоставе елементи главне дијагонале матрице **B**, јер су познати и сви једнаки $-1$. Овакву схему састављену од матрица **B** и **C** зваћемо *састављена матрица*. Наредна таблица показује распоред матрица и елемената који се неопходно морају унети у рачунску схему:

| | $j=1$ | 2 | 3 | ... | $n$ | $-k_i$ | проба |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i=1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | ... | $a_{1n}$ | $-k_1$ | |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | ... | $a_{2n}$ | $-k_2$ | |
| 3 | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | ... | $a_{3n}$ | $-k_3$ | |
| . | . . . . . . | . . . . . . | . . . . . . | . . . . . . | . . . | . | |
| $n$ | $a_{n1}$ | $a_{n2}$ | $a_{n3}$ | ... | $a_{nn}$ | $-k_n$ | |
| $-s_j$ | $-s_1$ | $-s_2$ | $-s_3$ | ... | $-s_n$ | $-s$ | |
| $i=1$ | $c_{11}$ | $b_{12}$ | $b_{13}$ | ... | $b_{1n}$ | $l_1$ | |
| 2 | $c_{21}$ | $c_{22}$ | $b_{23}$ | ... | $b_{2n}$ | $l_2$ | |
| 3 | $c_{31}$ | $c_{32}$ | $c_{33}$ | ... | $b_{3n}$ | $l_3$ | |
| . | . . . . . . | . . . . . . | . . . . . . | . . . . . . | . . . | . | |
| $n$ | $c_{n1}$ | $c_{n2}$ | $c_{n3}$ | ... | $c_{nn}$ | $l_n$ | |
| $-\sigma_j$ | $-\sigma_1$ | $-\sigma_2$ | $-\sigma_3$ | ... | $-\sigma_n$ | $-\sigma=0$ | |
| проба | | | | | | | |
| | $j=1$ | 2 | 3 | ... | $n$ | $l_i$ | $x_i$ |

(52)

Ова рачунска схема садржи матрицу **F** проширену елементима $-s_i$. Испод те матрице налази се матрица састављена од матрица **B** и **C** продужена елементима $l_i$ и проширена елементима $-\sigma_i$. При томе је $\sigma_{n+1}=\sigma=0$, јер матрица **C** има само $n$ стубова, чије збирове претстављају елементи $\sigma_i$. Са десне стране матрице **F** оставља се место за извођење једне пробе. Друга проба, која служи за контролу тачности израчунавања елемената $c_{ij}$, пише се при дну рачунске схеме. Непознате се уносе десно поред састављене матрице. Елементи главне дијагонале састављене матрице са којима се мора делити при израчунавању елемената $b_{ij}$ истакнути су нарочитим оквиром да би падали у очи. Ово је Банахјевичева схема у Цурмиловој стилизацији. Наиме, матрице **B** и **C** у оригиналној Банахјевичевој схеми су одвојене.

Израчунавање почиње, како смо рекли, према обрасцима (41) и (42), полазећи од првог ступца и највишег елемента у њему. При израчунавању елемената $b_{ij}$ и $c_{ij}$ треба одређивати скаларне производе извесних већ израчунатих елемената $b_{ij}$ и $c_{ij}$. Управо тежиште тог израчунавања је баш у одређивању тих скаларних производа, а са схеме је јасно како се они израчунавају.

Кад се одреде сви елементи састављене матрице заједно са елементима $l_i$, приступа се израчунавању непознатих по обрасцу (11), полазећи од последње непознате $x_n$, за коју важи

$$x_n = l_n. \qquad (53)$$

Образац (11) показује да, ако смо нашли $n-i$ непознатих, па тражимо $i$-ту непознату $x_i$, треба елементу $l_i$ додати скаларни производ свих непознатих испод $x_i$ полазећи одоздо и свих елемената $b_{ij}$ у $i$-тој врсти полазећи здесна до пред главни дијагонални елемент.

У току рада се врши стална контрола на основу обрасца

$$c_{ii}+c_{i+1,i}+\cdot\cdot\cdot+c_{ni}-\sigma_i=0, \qquad (54)$$

при чему се $\sigma_i$ израчуна по обрасцу (42). Ови збирови треба да дају као резултат нулу, али се у случају рачунања са нетачним заокругљеним бројевима може појавити и мало отступање, које се бележи испод схеме у јединицама најнижег места.

Кад се изврши израчунавање свих непознатих $x_i$, врши се последња проба замењивањем нађених решења у систем једначина (1), укључујући ту и збирове $s_i$, тј. уношењем у систем једначина

$$a_{i1}\,x_1+a_{i2}\,x_2+\cdot\cdot\cdot+a_{in}\,x_n-k_i=0 \quad (i=1,2,\ldots,n+1). \qquad (55)$$

И у овом случају треба резултат замене свуда да даје нулу, али се и овде могу појавити отступања за неколико јединица најнижег места, која се уносе такође у стубац одређен за те пробе, десно од матрице **F**. Често је за контролу довољно унети само израчунате вредности непознатих у врсту збирова $(i = n + 1)$ проширене матрице **F**. Врло редак, нарочито неповољан случај је кад је вредност детерминанте коефицијената врло мала. Тада се, кад се рачуна са приближним вредностима коефицијената, могу добити и знатнија отступања у пробама иако је рачун тачан. У том случају се морају уносити нарочите коректуре.

Пошто смо показали у детаљима нову схему и начин решавања система једначина по њој, поставља се природно питање: да ли ова схема смањује број рачунских операција и података које треба исписивати. То важно питање захтева детаљну и брижљиву анализу, у коју се овде не можемо упуштати. Према непотпуним Цурмиловим излагањима, читава вредност поступка по овој схеми лежи у једноликости непрестаног одређивања скаларних производа, који се лако могу одредити као готов резултат на многим адиционим машинама за рачунање, дакле, без исписивања појединих производа. У овој могућности је читава снага и вредност поступка. Са правилним коришћењем машине за рачунање може се постићи знатна уштеда у раду и много смањити напор пажње. Према Цурмиловим подацима, напр. при обичном решавању система од 10 једначина са 10 непознатих само нешто више од половине потребних операција може се извести на машини, док се по Банахјевичевом поступку 5/6 посла изводи на рачунској машини. Наравно да ове податке треба проверити. Уопште би било интересантно тачно утврдити колико времена и напора треба за решавање система једначина по новом поступку у поређењу са ранијим начинима.

Важно је напоменути и то да је Банахјевичева схема, као сажети израз једног читавог процеса, теже разумљива него обичан Гаусов алгоритам, али се њом могу чисто механички служити и калкулатори скоро без икаквих математичких знања.

V. Стварни ток решавања система једначина по овој методи показаћемо на наредном примеру система од четири једначине са четири непознате:

$$\begin{aligned} x_1 - \phantom{2}x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 18 \\ x_1 + \phantom{2}x_2 + \phantom{3}x_3 - 2x_4 &= 14 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 22 \\ 3x_1 + \phantom{2}x_2 + \phantom{3}x_3 + 4x_4 &= 4. \end{aligned} \tag{56}$$

Овај систем је врло прост и са тачним бројним коефицијентима. Ако су коефицијенти приближни бројеви са великим бројем децимала, треба узети у обзир читав низ практичних правила која олакшавају у таквим случајевима примену машина за рачунање, напр. у вези са бројем децимала, важећих цифара итд. Све су то ствари које треба да су познате сваком калкулатору и иначе.

Рачунска схема за решавање овог система једначина потпуно испуњена изгледа овако:

| | $j=1$ | 2 | 3 | 4 | $-k_i$ | проба |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i=1$ | 1 | -1 | 3 | 2 | -18 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | -2 | -14 | 0 |
| 3 | -1 | 2 | 4 | -2 | -22 | 0 |
| 4 | 3 | 1 | 1 | 4 | -4 | 0 |
| $-s_j$ | -4 | -3 | -9 | -2 | 58 | |
| $i=1$ | 1 | 1 | -3 | -2 | 18 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | -2 | -2 |
| 3 | -1 | 1 | 8 | -0,25 | 5,25 | 6 |
| 4 | 3 | 4 | -4 | 7 | -3 | -3 |
| $-\sigma_j$ | -4 | -8 | -2 | -6,75 | 0 | |
| проба | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| | $j=1$ | 2 | 3 | 4 | $l_i$ | $x_i$ |

При томе је, напр.,

$$c_{43}=1-9+4=-4,$$

$$b_{34}=(-2+2+2):(-8)=-0{,}25,$$

$$l_2=(-14+18):(-2)=-2,$$

итд.

Решења датог система биће

$$x_1=4;\quad x_2=-2;\quad x_3=6;\quad x_4=-3.$$

VI. Навешћемо и нека упрошћења н која се наилази кад је матрица **A** симетрична, тј. кад је испуњеı услов

$$a_{ij}=a_{ji} \quad \text{одн.} \quad \mathbf{A}=\overline{\mathbf{A}} \tag{58}$$

где црте означују транспоновану матрицу. Наиме, из обрасца (21) следи да је

$$\overline{\mathbf{A}}=-\overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{C}}, \tag{59}$$

па због симетрије матрице **A** мора бити

$$\mathbf{C}\,\mathbf{B}=\overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{C}},$$

тј.

$$\sum c_{ik}\,b_{kj}=\sum c_{jk}\,b_{ki}\,. \tag{60}$$

Међутим, пошто су матрице **B** и **C** троуı ıасте, чији су од нуле различити елементи у супротним пољим ı, морају индекси тих елемената у скаларним производима (60) ıадовољавати услов

$$i,j \geqslant k. \tag{61}$$

Ако је $i<j$, то је могуће само за $k=i$ ı у том случају се (60) своди на

$$c_{ii}\,b_{ij}=c_{ji}\,b_{ii}\,,$$

па како је $b_{ii}=-1$, биће

$$b_{ij}=-\frac{c_{ji}}{c_{ii}}\,. \tag{62}$$

Исти тај резултат се добија и у случ ју $i>j$, само ће тада индекси имати размењена места. Овај о ıразац показује да, кад су израчунати елементи $c_{ij}$, ако је матри ıа **A** симетрична, сваки елемент $b_{ij}$ се добија деобом њему сим ıтричног елемента $c_{ji}$ у састављеној матрици негативним дијагона ним елементом $c_{ii}$ који је у истом стубу са елементом $c_{ji}$.

Коришћења обрасца (62) за израчунаı ıње састављене матрице кад је полазна матрица симетрична нем код Банхјевича. Он се налази први пут, уколико је мени позı ıто, код Цурмила [**7, 8**], који га приписује Герхарту Шрајеру и ı ıзводи потпуном индукцијом, дакле, друкчије но што смо ми то овде учинили. Сам Банахјевич, и пре њега Холески, примењу је други један поступак, који је изванредно кратак, али практички применљив углавном у оним случајевима где се зна да је матр ца датог система позитивно дефинитна. Такав је, напр., слу ıј код матрице система нормалних једначина у рачуну изравнањ . Суштина ове методе лежи у чињеници да се, место матрице с стављене од матрица **B** и **C** са $n^2$ елемената, уведе, кад је **A** симет ıична квадратна матрица

$n$-тог реда, само једна троугласта матрица

$$\mathbf{R}=\begin{Bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \cdot \cdot \cdot r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \cdot \cdot \cdot r_{2n} \\ \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot r_{nn} \end{Bmatrix} \tag{63}$$

$n$-тог реда и њој транспонована

$$\bar{\mathbf{R}}=\begin{Bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0 \cdot \cdot \cdot 0 \\ \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ r_{1n} & r_{2n} & r_{3n} \cdot \cdot \cdot r_{nn} \end{Bmatrix} \tag{64}$$

што је довољно, пошто симетрична матрицаима само $n(n+1)/2$ независних елемената колико и једна троугласта матрица истог реда. Дакле, полази се од матричне једначине

$$\mathbf{A}=\bar{\mathbf{R}}\,\mathbf{R}, \tag{65}$$

којој одговара схема

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\cdots a_{3n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n}\cdots a_{nn} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} r_{11} & 0 & 0\cdots 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0\cdots 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33}\cdots 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ r_{1n} & r_{2n} & r_{3n}\cdots r_{nn} \end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13}\cdots r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23}\cdots r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33}\cdots r_{3n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0\cdots r_{nn} \end{Bmatrix}, \tag{66}$$

Из ове схеме се може написати систем од $n(n+1)/2$ једначина за одређивања елемената $r_{ij}$. За одређивање дијагоналних елемената те једначине дају образац

$$r_i^2 = a_{ii} - r_{1i}^2 - r_{2i}^2 - \cdot \cdot \cdot \cdot - r^2_{i-1,i}. \tag{67}$$

Одатле се елементи $c_{ii}$ састављене матрице одређују као позитивни квадратни корени из елемената $r_{ii}$, јер унапред знамо да они морају бити позитивни (претпоставка о позитивној дефинитности матрице). Биће, дакле,

$$c_{ii} = \sqrt{r_{ii}}\,. \tag{68}$$

Из матричне једначине (65) добија се наредна детерминантна једначина

$$A = \bar{R}\,R = R^2 = (r_{11}\, r_{22} \ldots r_{nn})^2, \tag{69}$$

која показује како се израчунава вредност детерминанте $A$ кад је позната матрица $\mathbf{R}$.

Потребне квадратне корене одређујемо из таблица или помоћу машине за рачунање, кад таблица нема. У ту сврху треба онда одредити логаритмаром неку приближну вредност траженог квадратног корена, па том вредношћу поделити на машини дати број и најзад као приближну вредност траженог квадратног корена узети аритметичку средину прве приближне вредности и резултата деобе.

Како је очигледно у матрици састављеној од матрица **R** и $\bar{\mathbf{R}}$ довољно одредити само матрицу **R**, као што је и у матрици **A**, кад је она симетрична, довољно обратити пажњу само напр. на горњи њен део заједно са главном дијагоналом, најбоље је рачунати по врстама. При томе је

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad r_{1j} = a_{1j} : r_{11}, \tag{70}$$

што је лако увидети из (66). Из (66) се за израчунавање осталих врста добија образац

$$r_{ij} = (a_{ij} - r_{1i}\, r_{1j} - r_{2i}\, r_{2j} - \cdot \cdot \cdot - r_{i-1,\,i}\, r_{i-1,\,j}) : r_{ii}, \quad (i < j). \tag{71}$$

Кратко, за израчунавање елемента $r_{ij}$ треба елементу $a_{ij}$ матрице **A** додати негативни скаларни производ $i$-тог ступца и $j$-тог ступца матрице **R** и то поделити са дијагоналним елементом $r_{ii}$. При том се елементи $i$-тог ступца узимају до дијагоналног члана $r_{ii}$, а они $j$-тог ступца до траженог елемента.

Пошто је у самој рачунској схеми довољно сад записати само десни део са главном дијагоналом матрице **A**, а у доњој таблици где је састављена матрица само матрицу **R**, пробе се додају у овом случају свуда здесна као колона у којој су $-s_i$ и $-\sigma_i$ збирови елемената врста. Како сад у трансформату датог система коефицијенти уз непознате нису једнаки јединици, непознате се одређују по обрасцу

$$x_i = (r_i - r_{in}\, x_n - r_{i,\,n-1}\, x_{n-1} - \cdot \cdot \cdot - r_{i,\,i+1}\, x_{i+1}) : r_{ii}, \tag{72}$$

при чему се израчунавање и овде почиње последњом непознатом, која је одређена са

$$x_n = r_n : r_{nn},$$

где су $r_i$ елементи ступца у који се претвара стубац независних елемената датог симетричног система једначина.

VII. Осим на решавање система линеарних једначина, израчунавање вредности детерминанте и ранга матрице, може се код симетричних матрица овај упрошћени поступак искористити и за одређивање да ли је квадратна форма која одговара датој матрици дефинитна, семидефинитна или индефинитна. Напр., ако су сви главни дијагонални елементи $c_{ii}$ састављене матрице позитивни, мора односна квадратна форма бити позитивно дефинитна, јер, како смо показали, ови елементи имају исти знак као основни главни минори детерминанте форме, а на основу познатог критеријума за позитивну дефинитност квадратних форми. Исто се тако овај поступак може искористити и за свођење квадратних форми на канонски облик, јер ће квадратна форма

$$\begin{aligned}\Phi \equiv \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i\, x_j = a_{11}\, x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + 2\, a_{13}\, x_1\, x_3 + \cdots + 2\, a_{1n}\, x_1\, x_n \\ + a_{22}\, x_2^2 + 2\, a_{23}\, x_2\, x_3 + \cdots + 2\, a_{2n}\, x_2\, x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{nn}\, x_n^2\end{aligned} \tag{74}$$

бити претворена у форму

$$\Phi \equiv \sum_i c_{ii}\, y_i^2 = c_{11}\, y_1^2 + c_{22}\, y_2^2 + \cdots + c_{nn}\, y_n^2, \tag{75}$$

ако је

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \\ y_2 &= \phantom{x_1 +{}} x_2 + \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}} x_3 \cdots + \frac{\beta_{2n}}{\beta_{11}} x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \phantom{x_1 + x_2 + x_3 \cdots +{}} x_n. \end{aligned} \tag{76}$$

Коефицијенти $\beta_{ij}$ су овде већ раније поменути коефицијенти првог изведеног система у примени Гаусовог алгоритма, итд.

Наравно, све се ово може искористити и за свођење једначина површина другог реда на канонски облик, и то врло просто и брзо изводити. У поређењу са познатим Лагранжовим поступком омогућава знатну уштеду времена и рада, а не може се применити само на квадратне форме у којима нема ниједног квадратног члана. У том се случају не може уосталом применити ни Лагранжов поступак директно, већ се пре тога мора извршити прво једна линеарна трансформација да би се појавили квадратни чланови ради примене самог поступка.

Као пример за ова наша тврђења уочимо квадратну форму

$$\Phi \equiv 6\, x_1^2 + 35\, x_2^2 + 11\, x_3^2 + 34\, x_2\, x_3 \tag{77}$$

и потражимо одговор на питање да ли је она позитивно дефинитна или није и при томе је довести на канонски облик. Банахјевичева схема, у коју смо ставили с обзиром на природу задатка само пробе за одређивање елемената $c_{ij}$, изгледаће

| | $j=1$ | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $i=1$ | 6 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 35 | 17 |
| 3 | 0 | 17 | 11 |
| $-s_j$ | $-6$ | $-52$ | $-23$ |
| $i=1$ | 6 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 35 | $-\frac{17}{35}$ |
| 3 | 0 | 17 | $\frac{96}{35}$ |
| $-\sigma_j$ | $-6$ | $-52$ | $-\frac{79}{35}$ |
| | 0 | 0 | 0 |
| | $j=1$ | 2 | 3 |

Према томе је канонски облик дате квадратне форме

$$\Phi \equiv 6\, y_1^2 + 35\, y_2^2 + \frac{96}{35} y_3^2, \tag{79}$$

а одатле је јасно да је дата квадратна форма позитивно дефинитна.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Frazer R. A., Duncan W. J. and Collar A. R. — Elementary Matrices and some Applications to Dynamics and Differential Equations. Cambridge U. P., 1946.

[2] Runge C. und König H. — Numerisches Rechnen. Springer, Berlin, 1924.

[3] Bénoit — Sur une méthode de résolution des équations normales (procédé du commandant Cholesky), *Bull. géodésique* 2 (1924), Toulouse.

[4] Arend S. — Voies nouvelles dans le calcul scientifique. *Ciel et Terre*, LVII Année, № **12**, p. 497—513, Bruxelles, 1941.

[5] Banachiewicz T. — Résolution d'un système d'équations linéaires algébriques par division. *L'enseignement mathématique*, XXXIX Année 1942—1950, № 1—2—3, p. 34—45, Genève, 1950.

[6] Bodewig E. — Zu R. Zurmühl: Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme nach dem Matrizenverfahren von Banachiewicz. *Zeitschrift für angew. Math. u. Mech.*, Bd. **30**, Heft 4, S. 130—131, 1950.

[7] Zurmühl R. — Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme nach dem Matrizenverfahren von Banachiewicz. *Zeitschrift für angew. Math. u. Mech.*, Bd. **29**, S. 76—84, 1949,

[8] Zurmühl R. — Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure. Springer, Berlin 1950.

## RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ALGÉBRIQUES PAR LA MÉTHODE DE BANACHIEWICZ

Par Tatomir Angelitch

Ce travail est un exposé des résultats les plus récents concernant la théorie et la pratique de la résolution des systèmes d'équations linéaires algébriques par la méthode des matrices en utilisant le schéma de Banachiewicz. On y montre comment on peut, d'après Zurmühl (Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme nach dem Matrizenverfahren von Banachiewicz, *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 1949), développer et appliquer les résultats obtenus par Banachiewicz sans recours aux cracoviens.

Enfin, dans le cas d'un système d'équations dont la matrice des coefficients est symétrique, décomposable en deux matrices triangulaires d'après la formule

$$\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\} = -\left\{\begin{matrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} -1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{matrix}\right\},$$

on donne une nouvelle démonstration très simple du fait qu'on a toujours

$$b_{ij} = -\frac{c_{ji}}{c_{ji}} .$$