РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА АЛГЕБАРСКИХ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА ПОМОЋУ КРАКОВИЈАНА

В. В. МИШКОВИЋ (Београд)

I ДЕО

1. — Краковијани као рачунска шема

Увод. — Неко је рекао једном да је Математика вештина која нам помаже да што мање рачунамо! Колико у парадоксалности ове мисли има и истине то ће, мислим, примењени математичари лако осетити, још лакше, чини ми се, астрономи-калкулатори; кратко речено, осетиће сви они чији истраживачки рад неизбежно мора да прође и кроз фазу нумеричких рачуна. У Астрономији је та, нумеричка, фаза готово у сваком проблему не само неизбежна већ и несразмерно обимнија и заморнија но што је то случај и у једној другој од егзактних дисциплина. Сетимо се, из Класичне астрономије, проблема одређивања планетских и кометских путања, или рачуна поремећаја њихових кретања; или, из Стеларне астрономије, проблема одређивања транслаторног кретања Сунчева система из сопствених и радијалних кретања некретница. А што, специјално у Астрономији, тај нумерички рад чини гломазним и напорним то су не толико оне радње и делови његови који воде ка самом решењу проблема колико они, такозвани, „споредни" радови, подразумевајући под овима оне, краће или дуже, припремне и помоћне, а све неопходне, рачунске радње које се обавезно провлаче кроз сав нумерички рад. Као мала илустрација овога нека послужи један пример из свакодневне астрономске праксе.

Да би се добио за извесни тренутак геоцентрички положај планете или комете, познатих путањских елемената, претходно се морају израчунати, за тај тренутак, хелиоцентричке правоугле екваторске координате тог тела. Означимо их са x, y, z. Оне се израчунавају помоћу израза, привидно врло једноставних, наиме

$$\begin{aligned} x &= aP_x (\cos E - e) + bQ_x \sin E, \\ y &= aP_y (\cos E - e) + bQ_y \sin E, \\ z &= aP_z (\cos E - e) + bQ_z \sin E, \end{aligned} \tag{1}$$

где су са a, b, e обележене: велика, односно мала полуоса, односно ексцентричност путање тела; са E ексцентрична аномалија за тражени датум; а са P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z, такозвани векторски елементи тела, уствари пројекције на осе екваторског координатног система јединичних вектора $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, усмерених ка перихелу, односно ка тачки на путањи $v = +90^0$. Развијени за нумерички рачун, ти изрази, из којих се ове величине израчунавају, овако изгледају

$$\begin{aligned} P_x &= -\sin \omega \cos i \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega, \\ Q_x &= -\cos \omega \cos i \sin \Omega - \sin \omega \cos \Omega, \\ P_y &= (\sin \omega \cos i \cos \Omega + \cos \omega \sin \Omega) \cos \varepsilon - \sin \omega \sin i \sin \varepsilon, \\ Q_y &= (\cos \omega \cos i \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega) \cos \varepsilon - \cos \omega \sin i \sin \varepsilon, \\ P_z &= (\sin \omega \cos i \cos \Omega + \cos \omega \sin \Omega) \sin \varepsilon + \sin \omega \sin i \cos \varepsilon, \\ Q_z &= (\cos \omega \cos i \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega) \sin \varepsilon + \cos \omega \sin i \cos \varepsilon; \end{aligned}$$

ω, Ω, i означавају у њима дате елементе који оријентишу путању тела, односно одређују положај путањске равни, а ε — нагиб еклиптике. Ако се траже тачни положаји планете или комете, вредности тих величина морају се израчунавати са седам децимала; ако се траже само приближни положаји, довољно је и пет децимала.

Сад треба знати да број нумерисаних планетоида износи данас око 1600. За сваки од ових морају бити израчунате вредности шест векторских елемената, и то на седам децимала. Број планетоида повећава се сваке године за по две до три десетине нових објеката, за које такође треба израчунати те величине. Отприлике двапут оволиком броју планетоида путањски елементи се поправљају, то јест замењују новима. Значи и векторске елементе треба прерачунавати. Свему томе треба додати још и десетину комета, за које то исто треба учинити — па ће довољно јасно бити колики нумерички рад претставља израчунавање само — векторских елемената. А то су тек потребне величине да би се могли предузети рачуни геоцентричких положаја тих тела.

Но и то је само једна од многобројних, и то још релативно једноставних, врстâ нумеричких предрадњи које свакодневна астрономска пракса захтева. О редукцијама посматрања и нумеричком раду које оне захтевају да и не говоримо. Те околности, то јест те неизбежне припремне и помоћне нумеричке операције, приморавале су астрономе одувек и приморавају их и данас да посвећују пажњу и усавршавању технике овог рада, другим речима, да изналазе средства за поједностављавање овог посла и уводе поступке који га убрзавају и механизују. Тако се данас извесне врсте овакви радњи избегавају или олакшавају готовим нумеричким таблицама; за друге се астрономи служе графичким методама; код трећих, опет, прибегавају специјалним рачунским шемама. У ову последњу категорију улазе и — **краковијани**, којима посвећујемо овај рад.

Краковијаном је названа матрична шема уведена да механизује нумерички рад и растерети калкулатора оне напрегнутости пажње коју иначе та врста рада од њега захтева. Краковијане је у нумерички рачун увео *Т. Банахјевич* [1], [2], [3],[1] професор краковског универзитета и директор тамошње астрономске опсерваторије. Он је до њих дошао, око 1916 године, искористивши, и несвесно, давно већ тада познату шему *Cayley*-евих матрица, но о којој — како каже — дотада није знао ни да постоји.

Првих неколико година од њихова увођења, до 1927 отприлике, краковијани су примењивани били углавном само у Пољској и, готово, искључиво у астрономском нумеричком раду. Отада, међутим, док у Пољској *Банахјевич* и његови ученици и сарадници разрађују теорију краковијана и усавршавају технику рачуна са њима, почиње се постепено ова шема примењивати и ван граница Пољске. И, ма да су у прво време гледишта стручњака о погодностима и предностима краковијана као рачунског оператора била подељена, доста велики број признатих научника и стручњака изван Пољске почео их је примењивати и — служи се и данас њима.

Шира примена краковијана датира од како је та шема почела бивати искоришћавана не само у астрономском нумеричком раду већ и за решавање система линеарних алгебарских једначина, за нумеричко израчунавање детерминаната вишег реда и секуларних детерминаната, па и у другим сличним врстама нумеричког рада. Тако је ова шема заинтересовала и наше математичке кругове, нешто раније нумеричаре, а за овима и теоретичаре; прве — као средство за поједностављење и механизовање нумеричких радова, друге — као оператор, а нарочито у односу према већ разрађеном матричном рачуну.

Циљ овог рада је да нашим стручним круговима прикаже, с једне стране, краковијане као рачунску шему, а у исти мах и

[1]) Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају рада.

њену примену специјално у решавању система алгебарских линеарних једначина. Зато ћемо, у овом првом делу, из опште теорије краковијана позајмити и, о краковијанима уопште, изложити само оно најбитније што је потребно да се објасни — поступак за решавање система линеарних једначина помоћу краковијана.

2. Дефиниције и овнаке краковијана

Дефиниције и ознаке. Краковијан је скуп бројева поређаних у квадратну или правоуглу шему, сличну матрицама, затворен у вертикалне витичасте заграде. Например

$$\begin{Bmatrix} 2.6 & 3.4 & -1.3 & 3.6 \\ 4.2 & 7.1 & 3.3 & 2.7 \\ 2.2 & -3.6 & 3.0 & 1.6 \\ -1.1 & -2.7 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos i \\ 0 & \sin i \end{Bmatrix}.$$

Као и код детерминаната и матрица, и код краковијана служимо се терминима врста, ступац, главна дијагонала, ред краковијана, итд. За разлику, међутим, од детерминаната, које претстављају бројеве које треба израчунавати, — краковијани су само *рачунске шеме* којима се оперише по одређеним правилима.

Скраћено се обележава краковијан масним малим словом, например

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{Bmatrix}.$$

Елемент краковијана $\mathbf{a}$ у i-том ступцу и k-тој врсти обележава се са a_{ik}; дакле *првим* индексом означава се редни број *ступца*, *другим* — редни број *врсте* краковијана.

i-ти ступац краковијана, узет као краковијан, обележава се са $\mathbf{a}_i$; дакле

$$\mathbf{a}_3 = \begin{Bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_n = \begin{Bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{nn} \end{Bmatrix}.$$

За краковијане $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ истих димензија (од по r ступаца и s врста) каже се да су једнаки ако су им елементи једнаких индекса — једнаки; дакле

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}, \text{ ако су } a_{ik} = b_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, r; \; k = 1, 2, \ldots, s).$$

Напр.

$$\begin{Bmatrix} \operatorname{tg}\varepsilon & \operatorname{ctg}\varepsilon & 1 \\ 1 & 1 & \sin 2\varepsilon \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin\varepsilon\;\sec\varepsilon & \cos\varepsilon\;\operatorname{cosec}\varepsilon & \operatorname{tg}\varepsilon\;\operatorname{ctg}\varepsilon \\ \cos\varepsilon\;\sec\varepsilon & \sin\varepsilon\;\operatorname{cosec}\varepsilon & 2\sin\varepsilon\;\cos\varepsilon \end{Bmatrix}.$$

Квадратни краковијан чији су сви елементи главне дијагонале јединица а остали нуле зове се **јединични краковијан** и означава се грчким словом τ; дакле

$$\tau = \{1\}, \quad \tau = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \tau = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Јединични краковијан игра у трансформацијама и рачунима са краковијанима врло важну улогу.

Троугли се зове квадратни краковијан чији су сви елементи било испод било изнад главне дијагонале једнаки нули. У првом случају зове се краковијан **горњи троугли** ($\bigtriangledown$), у другом — **доњи троугли** ($\triangle$). Дакле, краковијан $\mathbf{a}$ (r-тог реда) је

горњи троугли ($\bigtriangledown$) ако је $a_{ik} = 0$ за $i < k$,

доњи троугли ($\triangle$) ако је $a_{ik} = 0$ за $i > k$,

док су $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots\ldots r)$; дакле

горњи троугли краковијан је, напр.,

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \ldots a_{m1} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \ldots a_{m2} \\ 0 & 0 & a_{33} \ldots a_{m3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_{mn} \end{Bmatrix},$$

доњи троугли краковијан је, напр.,

$$\begin{Bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 \ldots\ldots 0 \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \ldots\ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} \ldots b_{nn} \end{Bmatrix}.$$

3. Основне операције са краковијанима

Сабирање и одузимање. Краковијани $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (од по r ступаца и s врста) сабирају се, односно одузимају, ако им се алгебарски саберу, односно одузму, елементи једнаких индекса; дакле

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b}, \text{ ако су } c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, r; \; k = 1, 2, \ldots, s).$$

Напр.

$$\begin{Bmatrix} 2.6 & 3.4 & -1.3 \\ 4.2 & 7.1 & 3.3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2.2 & -3.6 & 3.0 \\ -1.1 & -2.7 & 3.2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.8 & -0.2 & 1.7 \\ 3.1 & -0.6 & 6.5 \end{Bmatrix}.$$

Множење. Производ двају краковијана, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, који **морају** имати једнак број врста (рецимо s), је краковијан, $\mathbf{p}$, чији је општи члан

$$\mathbf{p}_{ik} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_k = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \cdots + a_{is} b_{ks} \quad (i = \;, 2, \ldots r; \; k = 1, 2, \ldots, q).$$

Другим речима, производ двају краковијана добива се множењем ступаца једнога ступцима другога.

Напр.

$$\begin{Bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} (3-4+9) & (-6+6+12) & (9-8-3) & (-12+2-6) \\ (5-8+6) & (-10+12+8) & (15-16-2) & (-20+4-4) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 8 & 12 & -2 & -16 \\ 3 & 10 & -3 & -20 \end{Bmatrix}.$$

Ово је **основна** операција краковијана; њоме се они почињу разликовати од матрица.

Производ више краковијана добива се множећи, редом, факторе-краковијане како су поређани; дакле, ако су дати краковијани **a**, **b**, **c**, **d**, њихов производ, **P**, биће

$$\mathbf{P} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}] \cdot \mathbf{d}.$$

Напр.

$$\begin{Bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= \left\{ \left\{ \left[\begin{Bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{Bmatrix} \right] \cdot \begin{Bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{Bmatrix} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{Bmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \left\{ \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \\ 7 & -5 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{Bmatrix} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{Bmatrix} \right\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 27 & -12 \\ 7 & 4 \\ -5 & -8 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 37 & 4 \\ -24 & -24 \\ -18 & 12 \end{Bmatrix}.$$

Напред поменутих шест векторских елемената, који се јављају у изразима за хелиоцентричке правоугле екваторске координате планете (или комете), у облику краковијана пишу се овако

$$\begin{Bmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{Bmatrix},$$

и израчунавају се по правилу о множењу краковијана.

Краковијан **P**, производ више фактора, има онолико ступаца колико их има први фактор, а онолико врста колико последњи фактор има ступаца. У претпоследњем примеру: први фактор има два ступца, последњи фактор има три ступца; стога и производ има: два ступца, а три врсте.

Производ датог краковијана **a** и јединичног краковијана истог реда (у овом случају једнака броја врста) једнак је датом краковијану; дакле

$$\mathbf{a}\cdot\tau=\mathbf{a}.$$

Према томе множење датог јединичним краковијаном не мења — каже се и идемише — дати краковијан.

Транспозиција краковијана. Међутим, производ јединичног и датог краковијана **a** једнак је такозваном транспонованом датом краковијану, то јест краковијану у коме су врсте постале ступци, а ступци — врсте. Дакле, ако је дат краковијан

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1\end{Bmatrix},$$

његов транспоновани је

$$\tau\cdot\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1\end{Bmatrix}.$$

Место $\tau\cdot\mathbf{a}$, пише се само $\tau\mathbf{a}$ и чита — транспоновани краковијан **a**.

Транспозиција краковијана користи се често и при писању, да би се уштедео простор. Тако, напр., место

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_r\end{Bmatrix},\ \text{обично се пише}\ \mathbf{a}=\tau\{a_1\,a_2\ldots\ldots a_r\}.$$

Дељење. Квоцијент краковијана **a** и **b** (**a** са онолико врста колико **b** има ступаца) зове се краковијан

$$\mathbf{q}=\mathbf{a}:\mathbf{b},$$

дефинисан једначином

$$\mathbf{a}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}.$$

(Згоднија изгледа дефиниција квоцијента једначином $\mathbf{a}=\mathbf{q}\cdot\tau\mathbf{b}$ (в. Banachiewicz [3], p. 36)).

4. Специјална правила

Пермутација. Производ краковијана није комутативан. Ако су дати краковијани $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, и $\mathbf{d}$, па образујемо

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{P}_1,\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{P}_2,\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{P}_3,$$

лако је проверити да је

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\tau\mathbf{P}_1,\quad \mathbf{c}\cdot\tau\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\tau\mathbf{P}_2,\quad \mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c}\cdot\tau\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\tau\mathbf{P}_3.$$

Например, нека је

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix};$$

онда ће бити:

$$\mathbf{P}_1=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1 & 4\\ 4 & -5\\ 7 & -5\end{Bmatrix},$$

а

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1 & 4 & 7\\ 4 & -5 & -5\end{Bmatrix}=\tau\mathbf{P}_1;$$

$$\mathbf{P}_2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}1 & 4\\ 4 & -5\\ 7 & -5\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}14 & -1\\ 4 & 7\end{Bmatrix},$$

а

$$\mathbf{c}\cdot\tau\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}9 & 5\\ -4 & -6\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}14 & 4\\ -1 & 7\end{Bmatrix}=\tau\mathbf{P}_2.$$

Асоцијација. Производ краковијана није асоцијативан. Ако су дати краковијани $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, може се показати да је

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot(\mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c}\cdot\tau\mathbf{b}).$$

Например, нека су дати краковијани:

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix},\ \mathbf{c}=\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix},\ \mathbf{d}=\begin{Bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{Bmatrix};$$

онда ће бити:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}34 & -17\\ 10 & -8\end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot(\mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c})=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 1\end{Bmatrix}\cdot\left(\begin{Bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{Bmatrix}\right)=$$

$$=\begin{Bmatrix}34 & -17\\ 10 & -8\end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c}\cdot\tau\mathbf{b})=\begin{Bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\left(\begin{Bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{Bmatrix}\right)=$$

$$=\begin{Bmatrix}34 & -17\\ 10 & -8\end{Bmatrix}.$$

Дисоцијација. Ако су дати краковијани **a**, **b**, **c**, **d**, за њихове производе вреде правила

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\tau\mathbf{c}\cdot\mathbf{b},$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot\tau\mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}.$$

Например, нека су дати краковијани:

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{Bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{Bmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{Bmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{Bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{Bmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{Bmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{Bmatrix}.$$

Онда ће бити

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})=\begin{Bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\left(\begin{Bmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{Bmatrix}\right)=$$

$$=\begin{Bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\left(\begin{Bmatrix}10 & -5\\ 4 & 2\\ 0 & -5\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}\right)=\begin{Bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}24 & -23\\ -38 & 6\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}86 & 100\\ -52 & -35\end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{a}\cdot\tau\mathbf{d}\cdot\tau\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=\begin{Bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & -2 & 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}7 & 8\\ 4 & 5\\ 5 & 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}14 & 1\\ 24 & 33\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}86 & 100\\ -52 & -30\end{Bmatrix}.$$

Ово су основна правила рачуна са краковијанима.

5. Дељење троуглим краковијаном

Нека су дати квадратни краковијан $\mathbf{a}$ и троугли краковијан (истог реда) $\mathbf{b}$. Квоцијент њихов,

$$\mathbf{q}=\mathbf{a}:\mathbf{b}, \text{ то јест } \mathbf{a}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{b},$$

израчунава се по правилу о множењу краковијана,

$$\mathbf{a}_i=\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{b}.$$

Одавде следује

$$\mathbf{a}_{ik}=\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{b}_k. \tag{A}$$

Према томе, ако је $\mathbf{b}$ горњи троугли краковијан, из последњег обрасца добивамо

$$a_{ik}=\tau\{q_{i1}\; q_{i2}\ldots\ldots q_{ik}\}\cdot\tau\{b_{k1}\; b_{k2}\ldots\ldots b_{kk}\},$$

или, стављајући редом $k=1, 2, 3, \ldots. r$,

$$a_{ik}=\{q_{i1}\}\cdot\{b_{11}\},\qquad a_{i2}=\begin{Bmatrix} q_{i1}\\ q_{i2}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} b_{21}\\ b_{22}\end{Bmatrix},\ldots\ldots\quad a_{ir}=\begin{Bmatrix} q_{i1}\\ q_{i2}\\ \vdots\\ q_{ir}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} b_{r1}\\ b_{r2}\\ \vdots\\ b_{rr}\end{Bmatrix}.$$

Пример. Нека буду краковијани $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & -2 & 6 & 4\\ 6 & 1 & 7 & 3\\ 8 & 5 & -3 & -2\end{Bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{Bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Bmatrix}.$$

Израчунајмо њихов квоцијент $\mathbf{q}$.

Према горњем правилу о израчунавању квоцијента биће елементи првог ступца квоцијента:

$$a_{11}=\{q_{11}\}\cdot\{b_{11}\},\ \text{ или }\ 2=q_{11},\ \text{ дакле }\ q_{11}=2;$$

$$a_{12}=\begin{Bmatrix} 2\\ q_{12}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} 3\\ 1\end{Bmatrix},\ \text{ или }\ 4=6+q_{12},\ \text{ дакле }\ q_{12}=-2;$$

$$a_{13}=\begin{Bmatrix} 2\\ -2\\ q_{13}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} 5\\ 2\\ 1\end{Bmatrix},\ \text{ или }\ 6=10-4+q_{13},\ \text{ дакле }\ q_{13}=0,$$

$$a_{14}=\begin{Bmatrix} 2\\ -2\\ 0\\ q_{14}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} 7\\ 3\\ -4\\ 1\end{Bmatrix},\ \text{ или }\ 8=14-6+q_{14},\ \text{ дакле }\ q_{14}=0.$$

За елементе другог ступца имаћемо:

$$a_{21}=\{q_{21}\}\cdot\{b_{11}\},\quad \text{или}\quad 3=q_{21},\quad \text{дакле}\quad q_{21}=3;$$

$$a_{22}=\begin{Bmatrix}3\\ q_{22}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}3\\ 1\end{Bmatrix},\quad \text{или}\quad -2=9+q_{22},\quad \text{дакле}\quad q_{22}=-11;$$

$$a_{23}=\begin{Bmatrix}3\\ -11\\ q_{23}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}5\\ 2\\ 1\end{Bmatrix},\quad \text{или}\quad 1=15-22+q_{23},\quad \text{дакле}\quad q_{23}=8;$$

$$a_{24}=\begin{Bmatrix}3\\ -11\\ 8\\ q_{24}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}7\\ 3\\ -4\\ 1\end{Bmatrix},\quad \text{или}\quad 5=21-33-32+q_{24},\quad \text{дакле}\quad q_{24}=49.$$

На сличан начин израчунаћемо елементе трећег и четвртог ступца и добити за тражени квоцијент

$$\mathbf{q}=\begin{Bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ -2 & -11 & -6 & -11\\ 0 & 8 & -1 & 0\\ 0 & 49 & -17 & -4\end{Bmatrix}.$$

И није тешко проверити да је, доиста,

$$\mathbf{a}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}.$$

На тај начин израчунавамо поступно елементе $q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{ir}$, квоцијента датог квадратног, **a**, датим горњим троуглим краковијаном, **b**.

Ако је **b** доњи троугли краковијан, помоћу обрасца (A) добивамо

$$a_{ik}=\tau\{q_{ik}, q_{ik+1}, \ldots\ldots, q_{ir}\}\cdot\tau\{b_{kk}, b_{kk+1}, \ldots\ldots, b_{kr}\}.$$

односно, стављајући редом $k=r, r-1, \ldots\ldots, 3, 2, 1$,

$$a_{ir}=\{q_{ir}\}\cdot\{b_{rr}\},\qquad a_{i,r-1}=\begin{Bmatrix}q_{i,r-1}\\ q_{i,r}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}b_{r-1,r-1}\\ b_{r-1,r}\end{Bmatrix},\ \ldots\ldots\ a_{i1}=\begin{Bmatrix}q_{i1}\\ b_{i2}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ q_{ir}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}b_{11}\\ b_{12}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ b_{1r}\end{Bmatrix}.$$

6. Растављање квадратног у производ двају (горњих) троуглих краковијана

Претпоставимо да је дат квадратни краковијан **1**. Показаћемо како се овај растаља у производ двају троуглих (горњих) краковијана, рецимо $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, тако да је

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{h},$$

или, у развијеном облику,

$$\begin{Bmatrix} l_{11} & l_{21} & \ldots\ldots & l_{r1} \\ l_{12} & l_{22} & \ldots\ldots & l_{r2} \\ l_{13} & l_{23} & \ldots\ldots & l_{r3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{1r} & l_{2r} & \ldots\ldots & l_{rr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_{11} & g_{21} & \ldots\ldots & g_{r1} \\ 0 & g_{22} & \ldots\ldots & g_{r2} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & g_{r3} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & g_{rr} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_{11} & h_{21} & \ldots\ldots & h_{r1} \\ 0 & h_{22} & \ldots\ldots & h_{r2} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & h_{r3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & h_{rr} \end{Bmatrix},$$

Према правилу о множењу краковијана можемо написати

$$l_{ik} = \mathfrak{g}_i \cdot \mathfrak{h}_k. \tag{B}$$

Број елемената у факторима, различитих од нуле, које треба одредити, износи r^2+r, док број услова које треба њима задовољити износи r^2. Дакле, r величина има више но што има услова. Можемо их, према томе, произвољно бирати, и ставићемо, напр., за елементе g_{ii} ($i = 1, 2, \ldots\ldots, r$) да су једнаки јединицама. Другим речима, елементе (g_{ii}) главне дијагонале првог фактора можемо сматрати као познате.

Ставимо сад у (B) $i=1$ и, редом, $k = 1, 2, \ldots\ldots, r$; добићемо

$$\tau\{l_{11}\ l_{12}\ l_{13}\ \ldots\ldots\ l_{1r}\} = \{g_{11}\} \cdot \{h_{11}\ h_{21}\ h_{31}\ \ldots\ldots\ h_{r1}\}.$$

Одавде налазимо редом све елементе прве врсте другог фактора, краковијана $\mathfrak{h}$.

Ставимо ли у (B) редом $i = 1, 2\ 3, \ldots\ldots r$ и $k=1$, имаћемо

$$\{l_{21}\ l_{31}\ \ldots\ldots\ l_{r1}\} = \{g_{21}\ g_{31}\ \ldots\ldots\ g_{r1}\} \cdot \{h_{r1}\}.$$

Одавде добивамо елементе прве врсте првог фактора, краковијана $\mathfrak{g}$. Наравно, под условом да је $h_{11} \neq 0$, што ћемо претпоставити да је испуњено.

Ако наставимо и ставимо у (B)

$i=2$, а за k, редом, $2, 3, \ldots\ldots r$;
$i=3$, а за k, редом, $3, \ldots\ldots r$;
$i=r$, $k=r$,

добиваћемо поступно другу, трећу, ... r-ту врсту краковијана $\mathfrak{h}$. А стављајући

за i редом $3, 4, \ldots\ldots r$ и $k=2$;
i редом $4, \ldots\ldots r$ и $k=3$;
. . . .
$i=r$ и $k=r$;

добићемо поступно другу, трећу, ... r-ту врсту краковијана $\mathbf{g}$, — опет под условом да се не деси да буде $h_{kk}=0$, што ћемо овде претпоставити да је задовољено.

7. Решавање система линеарних једначина

Претпоставимо да нам је дат систем од n независних линеарних једначина са n непознатих

$$
\begin{aligned}
a_{11}\,x_1+a_{21}\,x_2+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+a_{n1}\,x_n&=l_1\,,\\
a_{12}\,x_1+a_{22}\,x_2+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+a_{n2}\,x_n&=l_2\,,\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot&\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
a_{1n}\,x_1+a_{2n}\,x_2+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+a_{nn}\,x_n&=l_n\,.
\end{aligned}
$$

Са краковијанским начином бележења можемо овај систем кратко написати

$$\mathbf{x}\cdot\tau\mathbf{a}=\mathbf{l}. \tag{C}$$

Претпоставља се да је ред једначина у систему тако подешен да је $a_{11}\neq 0$, као и да су, уопште, m првих његових једначина $(m=1, 2, \ldots, n)$ решљивих по m првих непознатих $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ово се може постићи изменом реда било непознатих било једначина.

Одавде, према дефиницији квоцијента добивамо

$$\mathbf{x}=\mathbf{l}:\tau\mathbf{a}.$$

Ова релација даје, уствари, тражена решења нашег система једначина.

Ако, наиме, дати квадратни краковијан $\mathbf{a}$ замислимо растављен у производ два горња троугла краковијана, $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$, другим речима ставимо

$$\mathbf{a}=\mathbf{g}\cdot\mathbf{h},$$

па ову вредност за $\mathbf{a}$ унесемо у (C), имаћемо

$$\mathbf{x}\cdot\tau(\mathbf{g}\cdot\mathbf{h})=\mathbf{l},$$

што можемо написати

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{h}\cdot\mathbf{g})=\mathbf{l}.$$

А применимо ли правило за дисоцијацију краковијана, биће

$$\mathbf{x}\cdot\tau\mathbf{g}\cdot\mathbf{h}=\mathbf{l}.$$

Одавде, дељењем прво краковијаном $\mathbf{h}$, а затим краковијаном $\tau\mathbf{g}$, налазимо за решења датог система од n једначина, изражена у краковијанском облику,

$$\mathbf{x}=\{\mathbf{l}:\mathbf{h}\}:\tau\mathbf{g}. \tag{D}$$

Пример. (W. E. Milne [6], p. 20). Наћи решења система

$$6.4375\,x_1+2.1849\,x_2-3.7474\,x_3+1.8822\,x_4=4.6351$$
$$2.1356\,x_1+5.2101\,x_2+1.5220\,x_3-1.1234\,x_4=5.2131$$
$$-3.7362\,x_1+1.4998\,x_2+7.6421\,x_3+1.2324\,x_4=5.8665$$
$$1.8666\,x_1-1.1104\,x_2+1.2460\,x_3+8.3312\,x_4=4.1322$$

Пре свега ћемо квадратни краковијан коефицијената поред непознатих раставити у производ двају горњих троуглих краковијана $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$.

За чланове прве врсте другог фактора имамо

$$\{g_{11}\}\cdot\{h_{11}\ h_{21}\ldots\ldots h_{r1}\}=\tau\{a_{11}\ a_{12}\ldots\ldots a_{1r}\}.$$

Како смо рекли да ћемо узети $g_{ii}=1$, налазимо одмах

$$h_{11}=a_{11}=\ \ 6.4375\overline{00},\qquad h_{21}=a_{12}=2.1356\overline{00},$$
$$h_{31}=a_{13}=-3.7362\overline{00},\qquad h_{41}=a_{14}=1.8666\overline{00}.$$

За члавове прве врсте првог фактора добивамо

$$\{g_{21}\ g_{31}\ldots\ldots g_{r1}\}\cdot\{h_{11}\}=\{a_{21}\ a_{31}\ldots\ldots a_{r1}\}.$$

Како је h_{11} сад познато, налазимо

$$g_{21}=\frac{a_{21}}{h_{11}}=0.3394\overline{02},\qquad g_{31}=\frac{a_{31}}{h_{11}}=-0.5821\overline{20},\qquad g_{41}=\frac{a_{41}}{h_{11}}=0.2923\overline{81}$$

За чланове друге врсте другог фактора имаћемо

$$\begin{Bmatrix} a_{22}\\ a_{23}\\ a_{24}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} g_{21}\\ g_{22}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} h_{21} & h_{31} & h_{41}\\ h_{22} & h_{32} & h_{42}\end{Bmatrix},$$

значи

$$\begin{Bmatrix} 5.2101\overline{00}\\ 1.4998\overline{00}\\ -1.1104\overline{00}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0.3394\overline{02}\\ 1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} 2.1356\overline{00} & -3.7362\overline{00} & 1.8666\overline{00}\\ h_{22} & h_{32} & h_{42}\end{Bmatrix},$$

то јест

$$h_{22}=\ \ 4.4852\overline{73},$$
$$h_{32}=\ \ 2.7678\overline{74},$$
$$h_{42}=-1.7439\overline{28}.$$

За чланове другe врсте првог фaктора имаћемо

$$\{a_{32}\ \ a_{42}\}=\left\{\begin{matrix} g_{31} & g_{41} \\ g_{32} & g_{42} \end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix} h_{21} \\ h_{22} \end{matrix}\right\},$$

значи

$$\{1.5220\overline{00}\quad -1.1234\overline{00}\}=\left\{\begin{matrix} -0.5821\overline{20} & 0.2923\overline{81} \\ g_{32} & g_{42} \end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix} 2.1356\overline{00} \\ 4.4852\overline{73} \end{matrix}\right\},$$

то јест

$$g_{32}=\ \ 0.6165\overline{01},$$
$$g_{42}=-0.3896\overline{77}.$$

За чланове трећe врсте другог фактора имамо

$$\left\{\begin{matrix} a_{33} \\ a_{34} \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix} h_{31} & h_{41} \\ h_{32} & h_{42} \\ h_{33} & h_{43} \end{matrix}\right\},$$

значи

$$\left\{\begin{matrix} 7.6421\overline{00} \\ 1.2460\overline{00} \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} -0.5821\overline{20} \\ 0.6165\overline{01} \\ 1 \end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix} -3.7362\overline{00} & 1.8666\overline{00} \\ 2.7678\overline{74} & -1.7439\overline{28} \\ h_{33} & h_{43} \end{matrix}\right\},$$

то јест

$$h_{33}=3.7607\overline{86},$$
$$h_{43}=3.4077\overline{18}.$$

За члан трећe врсте првог фактора имамо

$$\{a_{43}\}=\left\{\begin{matrix} g_{41} \\ g_{42} \\ g_{43} \end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix} h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{matrix}\right\},$$

то јест

$$\{1.2324\overline{00}\}=\left\{\begin{matrix} 0.2923\overline{81} \\ -0.3896\overline{77} \\ g_{43} \end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix} -3.7362\overline{00} \\ 2.7678\overline{74} \\ 3.7607\overline{86} \end{matrix}\right\},\quad \text{дакле}\quad g_{43}=0.9049\overline{63}.$$

И, напослетку, за члан четврте врсте другог фактора имаћемо

$$\{a_{44}\}=\left\{\begin{matrix} g_{41} \\ g_{42} \\ g_{43} \\ g_{44} \end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix} h_{41} \\ h_{42} \\ h_{43} \\ h_{44} \end{matrix}\right\},\quad \text{или}\quad 8.3312\overline{00}=\left\{\begin{matrix} 0.2923\overline{81} \\ -0.3896\overline{77} \\ 0.9049\overline{63} \\ 1 \end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix} 1.8666\overline{00} \\ -1.7439\overline{28} \\ 3.4077\overline{18} \\ h_{44} \end{matrix}\right\},$$

дакле

$$h_{44}=4.0220\overline{14}.$$

Тако смо добили

$$\left\{\begin{matrix} 6.4375 & 2.1849 & -3.7474 & 1.8220 \\ 2.1356 & 5.2101 & 1.5220 & -1.1234 \\ -3.7362 & 1.4998 & 7.6421 & 1.2324 \\ 1.8666 & -1.1104 & 1.2460 & 8.3312 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 1 & 0.3394\overline{02} & -0.5821\overline{20} & 0.2923\overline{81} \\ 0 & 1 & 0.6165\overline{01} & -0.3896\overline{77} \\ 0 & 0 & 1 & 0.9049\overline{63} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{\begin{matrix} 6.4375\overline{00} & 2.1356\overline{00} & -3.7362\overline{00} & 1.8666\overline{00} \\ 0 & 4.4852\overline{73} & 2.7678\overline{74} & -1.7439\overline{28} \\ 0 & 0 & 3.7607\overline{86} & 3.4077\overline{18} \\ 0 & 0 & 0 & 4.0220\overline{14} \end{matrix}\right\}.$$

Ако сад, према обрасцу (A), за израчунавање квоцијента, израчунамо елементе краковијана

$$\mathbf{q} = \mathbf{l} : \mathbf{h},$$

добићемо

$$\left\{\begin{matrix} 4.6351 \\ 5.2131 \\ 5.8665 \\ 4.1322 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 6.4375\overline{00} & 2.1356\overline{00} & -3.7362\overline{00} & 1.8666\overline{00} \\ 0 & 4.4852\overline{73} & 2.7678\overline{74} & -1.7439\overline{28} \\ 0 & 0 & 3.7607\overline{86} & 3.4077\overline{18} \\ 0 & 0 & 0 & 4.0220\overline{14} \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 0.7200\overline{16} \\ 0.8194\overline{45} \\ 1.6721\overline{05} \\ -0.3681\overline{88} \end{matrix}\right\}.$$

Извршимо ли сад још дељење нађеног квоцијента, **g**, транспонованим првим горњим троуглим фактором, добивамо

$$\left\{\begin{matrix} 0.7200\overline{16} \\ 0.8194\overline{45} \\ 1.6721\overline{25} \\ -0.3681\overline{88} \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3394\overline{02} & 1 & 0 & 0 \\ -0.5821\overline{20} & 0.6165\overline{01} & 1 & 0 \\ 0.2923\overline{81} & -0.3896\overline{77} & 0.9049\overline{63} & 1 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 2.1851\overline{76} \\ -0.5603\overline{12} \\ 2.0053\overline{22} \\ -0.3681\overline{88} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\},$$

то јест тражена решења датог система једначина.

Унесемо ли нађене вредности непознатих у дати систем једначина, добивамо за разлике између левих и десних странâ једначинâ, у јединицама четврте децимале:

$$-0.02, \quad +0.02, \quad +0.04, \quad +0.03.$$

*

При овом излагању, а нарочито при избору примера за примену методе решавања система линеарних једначина, имали смо у виду питање које теоретичаре и не интересује уопште, а које је, међутим, за калкулаторе најважније, питање, наиме, да ли и у коликој мери примена краковијанске шеме — смањује нумерички рад? При том нисмо губили из вида ни чињеницу да нумерички рад зависи и од средстава и апаратуре којима се за то располаже. То нас је и навело да, прво, изаберемо пример на коме ће се ово моћи показати и, друго, да га детаљно обрадимо, како би се јасно могло видети шта се постиже краковијанском шемом.

Претпостављамо, и мора се претпоставити, да калкулатор располаже машином за рачунање. Узмимо да располаже електричном. У том случају би се могло поставити питање, рецимо код ове врсте проблема, која од трију метода — елиминације, матрична или краковијанска — води решењима са најмањим бројем нумеричких операција?

Банахјевич је упоређивао методу елиминације и краковијанску (или декомпозиције, како је он назива). И показао је да је, у случају система од четири једначине, однос операција 30 : 16, дакле 2 : 1 — у корист краковијанске шеме.

Што се тиче матричне и краковијанске шеме — оне ми се чине, у овом погледу, то јест у погледу броја нумеричких операција, адекватне. Али поборници краковијана (S. Arend [5]), мада не одричу опште предности матрица, заступају гледиште да „множење ступаца ступцима, изгледа, боље одговара психологији калкулатора". У сваком случају, у астрономским рачунима краковијанска шема нашла је широку примену.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *T. Banachiewicz* — Was sind die Formeln neuer Art?; Acta Astronomica, Ser. c. t. I, 1929, p. 63—69.

[2] *T. Banachiewicz* — Zur Berechnung der Determinanten, wie auch der Inversen, und zur darauf kasierten Auflösung der Systeme linearer Gleichungen; Acta Astronomica, Ser. c. t. III, 1937, p. 41—67.

[3] *T. Banachiewicz* — Résolution d'un système l'équations linéaires algébriques par division; L'Enseignement mathématique; XXXIX, 1942—1950, Nos 1—2—3, p. 34—45.

[4] *S. Arend* — Cracoviens rotationnels. Leur utilisation dans les transformations fondamentales de coordonnées astronomiques, dans la théorie de la lunette méridienne et dans celle du théodolite; Bull. Astr. de l'Obs. royal de Belgique, Vol. IV, № 4, p. 64—70.

[5] *S. Arend* — Voies nouvelles dans le calcul scientifique, Ciel et Terre, 1941, *51*, № 12, p. 497—513.

[6] *W. E. Milne* – Numerical Calculus, 1949, Princeton University Press.

RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ALGÉBRIQUES À L'AIDE DES CRACOVIENS

Par V. V. Michkovitch

Après un exposé des définitions et règles fondamentales du calcul avec des cracoviens, on a développé la méthode de résolution d'un système d'équations linéaires à l'aide des cracoviens et appliqué cette dernière à un exemple numérique.