О ТРИГОНОМЕТРИСКИМ ЗБИРОВИМА

Т е з а

МИОДРАГА ТОМИЋА (Београд)

I. У в о д

1. Предмет овог рада је испитивање и проучавање три гоно метриских редова и полинома облика

$$\Sigma C_\nu e^{\nu\theta i}, \tag{I, 1}$$

односно

$$\Sigma C_\nu \sin \nu\theta, \tag{I, 2}$$

$$\Sigma C_\nu \cos \nu\theta, \tag{I, 3}$$

под претпоставком да су им коефицијенти C_ν позитивни и монотони, односно вишеструко монотони, тј. под претпоставком да је испуњен један или више услова облика

$$C_n \geqslant 0,$$

$$\Delta C_n = C_n - C_{n+1} \geqslant 0,$$

$$\Delta^2 C_n = C_n - 2C_{n+1} + C_{n+2} \geqslant 0, \tag{I, 4}$$

. . . . . .

$$\Delta^k C_n = \sum_{\mu=1}^{k} (-1)^k \binom{k}{\mu} C_{n+\mu} \geqslant 0,$$

Како су услови за коефицијенте C_ν специјалног карактера, редови овог облика имају низ типичних особина, и услед тога били су предмет истраживања многих математичара. Нарочито у радовима L. Fejér-a [1], [2][1] и G. Szegő-a [24] наведене су целе групе проблема који се односе на ову врсту редова и полинома. Сем поменуте двојице, проблемима у вези са овом врстом редова и полинома бавили су се још F. Hausdorf [10], E. Jacobstal [11], Th. Kaluza [12], K. Knopp [14], G. Pólya [18], M. Riesz [20], W. Rogosinski [21], O. Szász [23] и други. Разлог да се тако развила

---

[1]) Бројеви у угластим заградама односе се на литературу на крају рада.

ова група проблема лежи с једне стране у томе што су редови (I, 1), односно (I, 2) и (I, 3) типични претставници за многе особине општих редова, тако да се границе у многим проблемима постижу управо овом врстом редова. Најзад, многобројни у примењеној анализи употребљавани изрази дају се претставити редовима овог облика (Fourier-ови редови за Legendre-ове полиноме и остале специјалне функције).

1. 1. Аналитички апарат за доказ ставова ове врсте битно се разликује код појединих ставова. За сваки нов став се мора прибећи другом поступку, тако да се често губи њихова прегледност. Овде покушавам да дам једну општу, јединствену методу којом се велики део тих ставова може обухватити, стари ставови проширити и добити нови. Ова метода носи геометриско обележје и њена суштина састоји се у томе *да се свакој страни једне полигоналне линије — чија су темена* $C_\nu e^{\nu\theta i}$ *— придода један круг који има ту особину да садржи наредни или се поклапа са њиме.* За систем кругова $K_n(r_n, C_n)$ такве особине да сваки од њих садржи све наредне, тј. $K_n \subseteq K_{n-1}$ казаћемо да чини *монотон скуп кругова.* Напоменимо да је појам монотоне конвергенције комплесног низа бројева који су увели Fejér и Szegő [8], садржан у појму монотон скуп кругова.

Очевидно скуп кругова је монотон ако постоји неједначина

$$|C_{n-1} - C_n| \leqslant |r_{n-1} - r_n|.$$

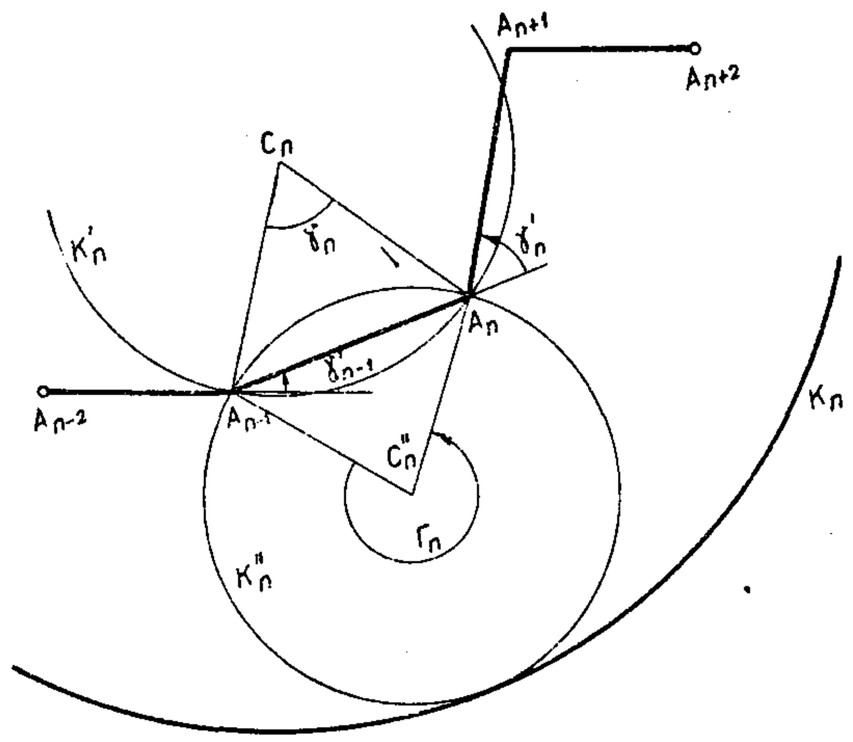
Јасно је да ће крајња тачка полигоналне линије $\Sigma C_\nu e^{\nu\theta i}$ лежати тада у свим овим круговима. Ова геометриска метода није везана само за збирове облика $\Sigma C_\nu e^{\nu\theta i}$, већ се може применити и за неке општије тригонометриске збирове облика

$$\Sigma a_\nu \exp(2\pi\alpha_\nu i)$$

као што смо то у раду [16] J. Карамата и ја показали. Исто тако та метода доводи до извесних резултата и за специјалне класе Dirichlet-ових редова као што ћемо то на једном другом месту показати. Потпуности ради извешћу овде тај општи принцип у тачки 1. 2., док ћу у тачки 1. 3. навести његову специјализацију на теореме типа Kuzmin-Landau [16], коју смо дали у наведеном раду [16]. У тачки 1. 4. навешћу тај геометриски поступак за специјалне тригонометриске збирове Popken-овог [19] типа који се могу пренети на извесне Dirichlet-ове редове. Најзад у 1. 5. изложићу тај поступак специјално за Taylor-ове редове $\Sigma C_\nu e^{\nu\theta i}$. Први пут тај геометриски принцип изложио сам у моме раду [28] и при-

менио га на теорију алгебарских полинома, о чијој примени овде неће бити речи.

1. 2. Уочимо полигоналну линију $A_0 A_1 A_2 \ldots$. Свакој страни те полигоналне линије можемо једнозначно асоцирати круг K_n, чије се средиште C_n налази на левој страни симетрале оријентисане дужи $\overline{A_{n-1} A_n}$ (тј. гледајући тачку A_n из A_{n-1}), и из кога се та страна види под углом γ_n $(0 < \gamma_n \leqslant \pi)$ (в. сл. 1).



Сл. 1

Полупречник r_n овог круга одредимо тако да круг K_n додирује круг k_n'', чији се центар c_n'' налази на симетрали дужи $\overline{A_{n-1} A_n}$, и из кога се та дуж види под углом Γ_n, где је $2\pi \geqslant \Gamma_n \geqslant \gamma_n$. Центар круга k_n'' налази се лево или десно од оријентисане дужи $\overline{A_{n-1} A_n}$, према томе да ли је $\Gamma_n \gtrless \pi$. Када се Γ_n своди на γ_n (тј. када је $\Gamma_n = \gamma_n$), тада круг k_n'' прелази у k_n'.

Средиште круга K_n дато је са

$$C_n = s_{n-1} + \frac{(s_n - s_{n-1}) \exp(-\gamma_n i/2)}{2 \sin \gamma_n/2}\, i$$

где су s_n и s_{n-1} комплексни бројеви који одговарају тачкама A_n и A_{n-1}. Полупречник r_n круга K_n дат је са

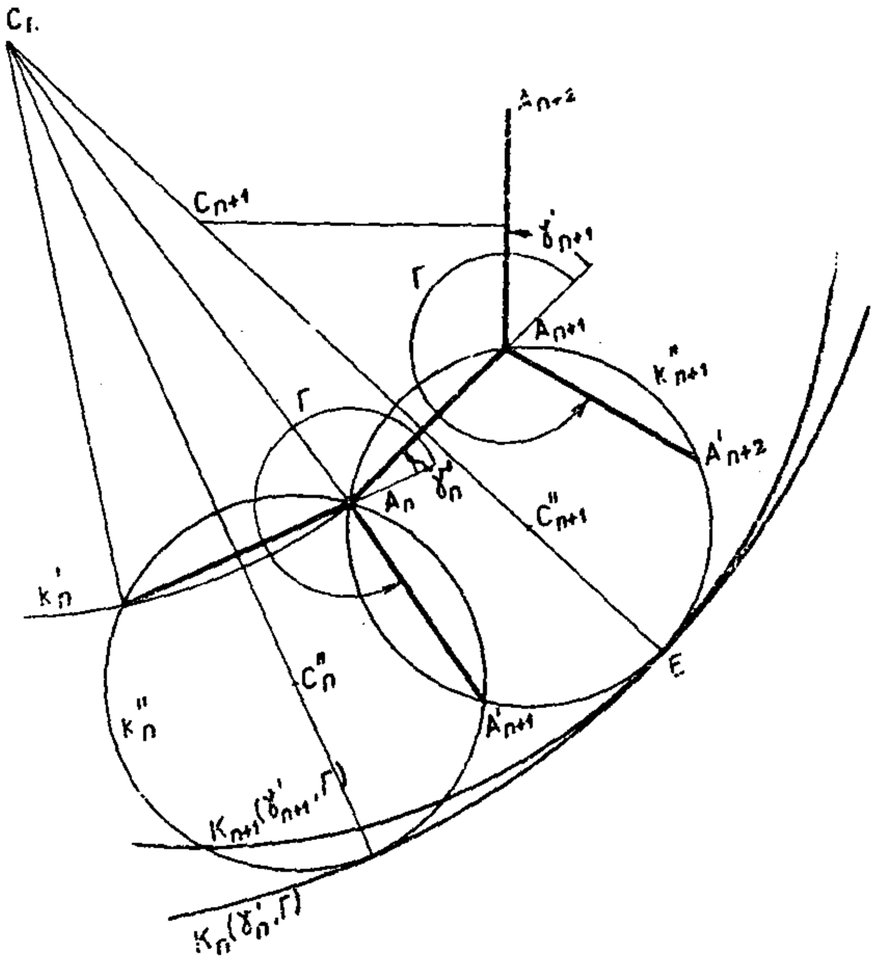
$$r_n = \frac{|s_n - s_{n-1}|}{2}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\gamma_n}{2} + \frac{1 - \cos\Gamma_n/2}{\sin \gamma_n/2}\right\}. \qquad \text{(I, 5)}$$

Према томе, полигоналном линијом $A_0 A_1 A_2 \ldots$ и низовима углова γ_n и Γ_n низ кругова $K_n = K_n(\overline{A_{n-1} A_n},\ \gamma_n,\ \Gamma_n)$ потпуно је одређен. Испитаћемо неке услове под којима овај скуп кругова постаје монотон у смислу наведеном у тачки 1. 1.

1. 3. Узмимо да су све стране полигоналне линије наведене у тачки 1. 2. једнаке међу собом, да су сви спољњи углови γ_n' монотони и да је $\Gamma_n = \Gamma$, тј.

$$\begin{aligned} &\overline{A_{n-1} A_n} = \overline{A_{n+1} A_n} \\ &0 < \gamma_{n'} < \gamma'_{n+1} \leqslant \Gamma < 2\pi \end{aligned} \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad \text{(I, 6)}$$

За круг k_n' (в. сл. 2) узмимо описан круг око троугла $A_{n-1}\,A_n\,A_{n+1}$. Његово средиште C_n је на пресеку симетрала страна $\overline{A_{n-1}\,A_n}$ и



Сл. 2

$\overline{A_n\,A_{n+1}}$. Због услова (I, 6) угао γ_n једнак је са γ_n' (в. сл. 2). За круг k_n'' узмимо описани круг над троуглом $A_{n-1}\,A_n\,A'_{n+1}$. Круг $K_n(\gamma_n', \Gamma)$ има према 1.2. средиште у C_n и додирује круг k_n''. Полупречник круга K_n дат је стога са

$$r_n = \frac{\overline{A_{n-1}\,A_n}}{2}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\gamma_n'}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\Gamma}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Gamma}{2}\right\} =$$

$$= \frac{\overline{A_{n-1}\,A_n}}{2}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\gamma_n'}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Gamma}{4}\right\}. \qquad (I, 7)$$

Ако на исти начин одредимо странама $\overline{A_n\,A_{n+1}}$, $\overline{A_{n+1}\,A_{n+2}}$ кругове k'_{n+1} и k''_{n+1}, тада круг $K_{n+1}(\gamma'_{n+1}, \Gamma)$ има за средиште C_{n+1}, а за полупречник

$$r_{n+1} = \frac{\overline{A_n\,A_{n+1}}}{2}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\gamma'_{n+1}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Gamma}{4}\right\}.$$

Средиште C_{n+1} је у пресеку симетрала страна $\overline{A_n\,A_{n+1}}$ и $\overline{A_{n+1}\,A_{n+2}}$. Кад се γ'_{n+1} мења од γ_n' до Γ, средиште C_{n+1} креће се дуж симетрале стране $A_n\,A_{n+1}$, од C_n до C_{n+1}. Круг $K_{n+1}(\gamma'_{n+1}, \Gamma)$ додирује круг $K_n(\gamma_n', \Gamma)$ у тачки E (в. сл. 2) и налази се цео у овом

последњем кругу пошто је због $\gamma'_{n+1} \geqslant \gamma_n'$ очевидно и $r_{n+1} \leqslant r_n$ (в. (I, 7)). Ако се услов (I, 6) замени са

$$\overline{A_{n-1}A_n} \geqslant \overline{A_nA_{n+1}}$$

и задрже све остале дефиниције кругова k_n' и k_n'', тада су полупречници r_n и r_{n+1} кругова $K_n(\gamma_n', \Gamma)$ и $K_{n+1}(\gamma'_{n+1}, \Gamma)$ дати са

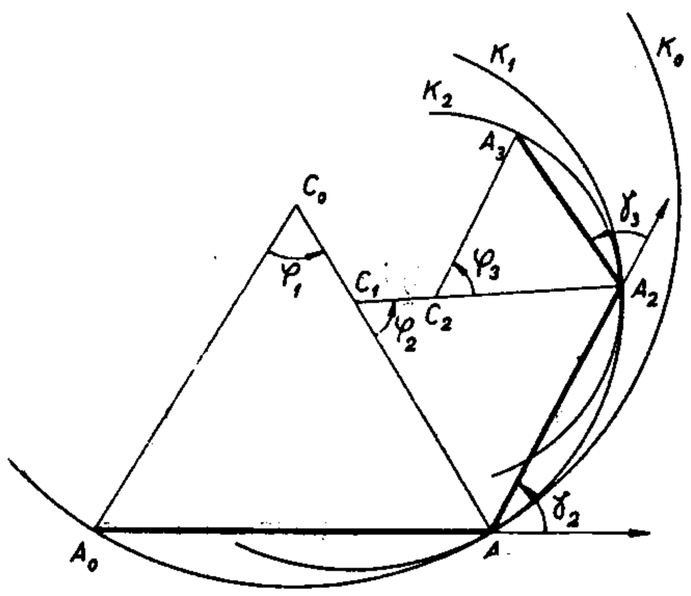
$$r_n = \frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{2}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\gamma_n'}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Gamma}{4}\right\},$$

$$r_{n+1} = \frac{\overline{A_nA_{n+1}}}{2}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\gamma'_{n+1}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Gamma}{4}\right\}.$$

У овом последњем случају уопште је $r_{n+1} < r_n$ и тада круг $K_n(\gamma_n', \Gamma)$ садржи и не додирује круг $K_{n+1}(\gamma'_{n+1}, \Gamma)$.

Примена и последице овог скупа монотоних кругова изложене су у раду [16].

1.4. Један нарочито подесан за примену систем монотоних кругова може се добити на овај начин. Над дужи $\overline{A_0A_1}$ (в. сл. 3) конструишимо равнокрак троугао $A_0C_0A_1$ са произвољним углом на врху φ_1 $(0 < \varphi_1 < \pi)$. Затим над сваком страном $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... равнокраке троугле чији су углови на врховима $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$.



Сл. 3

Означимо спољње углове полигоналне линије $A_0A_1A_2\ldots$ са $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$ Углове $\varphi_2, \varphi_3 \ldots$ одредимо тако да се темена $C_1C_2, \ldots$ налазе на дужима $\overline{C_0A_1}$, $\overline{C_1A_2}, \ldots$ $\overline{C_nA_{n+1}}, \ldots$. Због овог услова, $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ одређени су помоћу φ_1 и γ_ν, $\nu = 2, 3 \ldots$ преко релација

$$\frac{\varphi_{\nu-1} + \varphi_\nu}{2} = \gamma_\nu, \qquad \nu = 2, 3, \ldots \tag{I, 8}$$

Узмимо тачке $C_0, C_1, C_2, \ldots$ за средишта низа кругова K_n. Овај низ кругова K_n биће очевидно монотон ако је испуњена релација

$$r_{\nu-1} \geqslant r_\nu, \qquad \nu = 2, 3, \ldots \tag{I, 9}$$

и где је r_ν према сл. 3 дато са

$$r_\nu = \frac{\overline{A_{\nu-1}A_\nu}}{2\sin\varphi_\nu/2}.$$

Према томе, услов (I, 9) постаје

$$\frac{\overline{A_{\nu-2}A_{\nu-1}}}{2\sin\varphi_{\nu-1}/2} \geqslant \frac{\overline{A_{\nu-1}A_\nu}}{2\sin\varphi_\nu/2}. \qquad (I, 10)$$

Специјално, овај услов биће испуњен ако је

$$\overline{A_{\nu-2}A_{\nu-1}} \geqslant \overline{A_{\nu-1}A_\nu},$$

$$\varphi_{\nu-1} \leqslant \varphi_\nu, \qquad \nu = 2, 3, \ldots \qquad (I, 11)$$

$$\gamma_\nu \leqslant \pi.$$

Из (I, 8) добивамо

$$\varphi_\nu = 2\gamma_\nu - \varphi_{\nu-1} = 2(\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1} + \ldots + (-1)^\nu \gamma_2) - (-1)^\nu \varphi_1, \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

Отуда је,

$$\varphi_\nu - \varphi_{\nu-1} = 2(\gamma_\nu - 2\gamma_{\nu-1} + 2\gamma_{\nu-2} - \ldots + 2(-1)^\nu \gamma_2) + (-1)^\nu \gamma_1 =$$

$$= 2\left\{\Delta^2\gamma_\nu + \Delta^2\gamma_{\nu-2} + \ldots \begin{matrix} +(\gamma_2 - \varphi_1), & \nu \text{ парно} \\ +(\gamma_3 - 2\gamma_2 + \varphi_1), & \nu \text{ непарно} \end{matrix}\right\}.$$

Специјално, ови услови су задовољени ако је

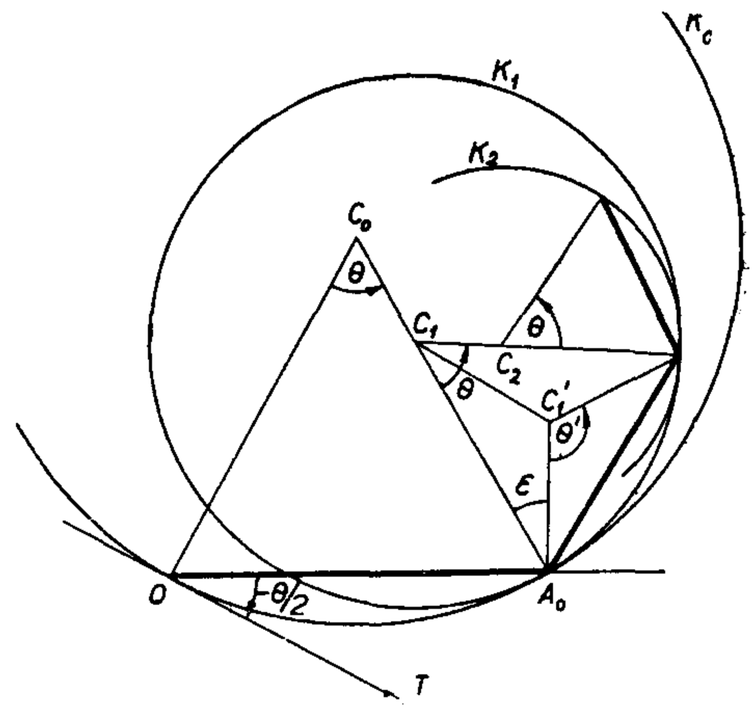
$$\gamma_\nu - 2\gamma_{\nu+1} + \gamma_{\nu+2} \geqslant 0, \quad \nu = 4, 5, \ldots$$
$$\gamma_2 - \varphi_1 \geqslant 0, \quad \gamma_3 - 2\gamma_2 + \varphi_1 \geqslant 0, \qquad (I, 12)$$

тако да, у овом случају, за монотонију система кругова K_n асоцираних полигоналној линији $A_0 A_1 \ldots$, чији су спољњи углови $\gamma_\nu < \pi$, $\nu = 1, 2, 3 \ldots$, потребан је поред услова монотоније страна $\overline{A_{\nu-1}A_\nu}$, $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ и услов који треба да задовоље спољњи углови γ_ν. Овај последњи услов изражен је преко других диференција од γ_ν (I, 12). Овај случај је специјалан случај општег, наведеног у тачки 1. 2., где је очевидно $\varphi_n = \gamma_n = \Gamma$ и где је стога $k_n' \equiv k_n'' = K_n$. Једну примену овог случаја на специјалне Dirichlet-ове редове облика $\Sigma a_\nu \exp\{\lambda_\nu i\}$ даћемо у једном раду на другом месту.

1.5. Уочимо такву полигоналну линију $A_0 A_1 \ldots$ чији су сви спољњи углови једнаки θ (в. сл. 4) и овој линији асоцирајмо такав

низ кругова K_n да се дужи $\overline{A_{n-1}A_n}$ виде из средишта тих кругова K_n под истим углом θ. Испитајмо под којим је условом тако одређен низ кругова K_n монотон. Напоменимо пре свега чињеницу да се средиште C_n круга K_n налази на полупречнику $\overline{C_{n-1}A_{n-1}}$ претходног круга K_{n-1} (в. сл. 4). Ако би, на пр., средиште круга K_1 било у C_1' тада је

$$\frac{\theta'}{2}=\frac{\theta}{2}+\varepsilon>\frac{\theta}{2},$$



Сл. 4

противно претпоставци да се дуж $\overline{A_0A_1}$ види из C_1' под углом $\theta'=\theta$. Из ове чињенице следи одмах и услов да овакав низ кругова K_n асоциран полигоналној линији са једнаким спољњим угловима θ буде монотон: *потребно је да низ полупречника буде монотон,* тј.

$$\overline{C_0A_0}\geqslant\overline{C_1A_1}\geqslant\ldots\overline{C_nA_n}\geqslant\ldots.$$

Овај се услов, с обзиром да је према сл. 4,

$$\overline{C_nA_n}=\frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{2\sin\theta/2},\qquad\theta\neq0,$$

своди на

$$\overline{A_0A_1}\geqslant\overline{A_1A_2}\geqslant\ldots\overline{A_{n-1}A_n}\geqslant\ldots, \tag{I, 13}$$

тј. на услов *да је низ страна полигоналне линије* $A_0A_1A_2\ldots$ *монотон.* Очевидно, овај монотони низ кругова је специјалан случај претходног, када је

$$\gamma_n=\Gamma_n=\theta.$$

Из овако дефинисаног низа монотоних кругова K_n следе особине које вреде без обзира да ли је низ K_n коначан или бесконачан:

1° *Круг* K_n *садржи круг* K_{n+1} ($K_n\supseteq K_{n+1}$). *Према томе, дужи* $\overline{A_nA_{n+1}}$, $\overline{A_{n+1}A_{n+2}},\ldots$ *се све налазе у кругу* K_n. *Специјално сва темена полигоналне линије* $A_0A_1A_2\ldots$ *налазе се у или на кругу* K_0.

2° *Тангента ма у ком темену* A_n *на круг* K_n, *који кроз то теме пролази, полови спољни угао* θ *полигоналне линије* (в. сл. 4).

Низ тачака $A_0, A_1, \ldots$ су темена једне полигоналне спирале (в. сл. 4). Ову полигоналну спиралу, чије стране монотоно опадају и чији су сви спољњи углови једнаки θ, зваћемо укратко θ-*спи-*

ралом. Овај рад има за циљ да из ових елементарних геометриских особина θ-спирале покаже како непосредно следе аналитичке особине редова са монотоним коефицијентима.

1. 5. 1. Један монотон низ кругова K_n код кога разлике узастопних полупречника образују монотон низ, тј. сами полупречници образују двоструко монотон низ

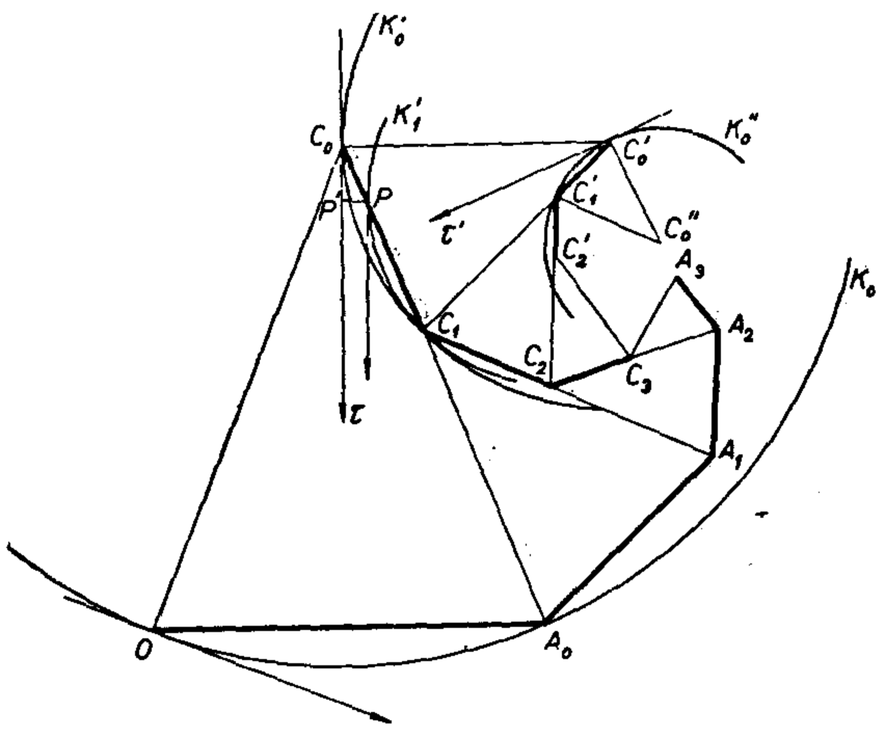
$$r_{n-1} - r_n \geqslant r_n - r_{n+1}$$

односно

$$r_{n-1} - 2r_n + r_{n+1} \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots,$$

назваћемо *монотон и конвексан низ кругова* K_n *(двоструко монотон низ* K_n*).*

Овде ћемо испитати под којим је условима монотон низ K_n асоциран једној θ-спирали из претходног одељка двоструко монотон, тј. какве нове геометриске особине карактеришу ту θ-спиралу.



Сл. 5

Посматрајмо полигоналну линију састављену од средишта

$$C_0\, C_1\, C_2 \ldots$$

кругова K_n (в. сл. 5). За овако дефинисан монотон низ кругова K_n средиште C_n налази се на полупречнику $C_{n-1}\, A_{n-1}$ круга K_{n-1}. Стога ће низ K_n бити двоструко монотон ако је поред услова (I, 13) задовољен и услов

$$\overline{C_0 C_1} \geqslant \overline{C_1 C_2} \geqslant \ldots \quad \overline{C_{n-1} C_n} \geqslant \ldots .$$

Пошто је,

$$\overline{C_{n-1} C_n} = r_{n-1} - r_n = \frac{\overline{A_{n-1} A_n} - \overline{A_n A_{n+1}}}{2 \sin \theta/2},$$

то последњи услов прелази у

$$\overline{A_0 A_1} - \overline{A_1 A_2} \geqslant \overline{A_1 A_2} - \overline{A_2 A_3} \geqslant \ldots \overline{A_{n-1} A_n} - \overline{A_n A_{n+1}} \geqslant \ldots . \quad \text{(I, 14)}$$

Низ кругова K_n *асоциран једној полигоналној θ-спирали* $A_0 A_1 A_2 \ldots$ *двоструко је монотон ако је низ страна* $\overline{A_0 A_1}$, $\overline{A_1 A_2} \ldots$ *те спирале двоструко монотон.*

Према (I, 14) и низ средишта $C_0, C_1, \ldots$ образује једну θ-спиралу. Тој θ_1-спирали $C_0 C_1 C_2 \ldots$ може се асоцирати нов монотон низ кругова K_n' (в. сл. 5). Све особине првобитне θ-спирале $A_0 A_1 A_2 \ldots$ преносе се и на θ_1-спиралу центара $C_0 C_1 C_2 \ldots$; тако, на пример, особина **2°** постаје

2' *Тангента у тачки C_n на круг K_n', који кроз то теме пролази, полови спољњи угао θ_1-спирале $C_0 C_1 \ldots$. Према томе, та тангента је и симетрала дужи $\overline{A_{n-1} A_n}$; стога круг K_n' лежи десно од те симетрале. Специјално, сви кругови K_n' леже десно од симетрале дужи $\overline{A_0 A_1}$* (в. сл. 5).

1. 5. 2. Појам вишеструке монотоније може се неограничено проширити на систем кругова K_n.

- *Ако је за један монотон низ кругова K_n низ његових полупречника r_n монотон реда k, за систем кругова K_n кажемо исто тако да је монотон реда k.* Низ полупречника задовољава, дакле, услове

$$\Delta^\nu r_n = \binom{\nu}{0} r_n - \binom{\nu}{1} r_{n+1} + \cdots + (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu} r_{n+\nu} \geqslant 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, k \quad \text{(I, 15)}$$

У специјалном случају који посматрамо, монотон низ кругова K_n асоциран једној θ-спирали $A_0 A_1 A_2 \ldots$ биће монотон реда k ако средишта $C_n^{(k)}$ кругова $K_n^{(k-1)}$ образују једну θ-спиралу. Ова разматрања изводе се индукцијом. У претходном одељку дефинисани двоструко монотони низ кругова K_n биће троструко монотон ако је низ кругова K_n' двоструко монотон. Средишта $C_0', C_1', \ldots$ кругова K_n' образују исто тако једну θ-спиралу. Однос ове θ_2-спирале $C_0' C_1' \ldots$ према θ_1-спирали $C_0 C_1 \ldots$ исти је као и однос θ_1-спирале $C_0 C_1 \ldots$ према првобитној θ-спирали $A_0 A_1 \ldots$. Све особине између θ-спирале $A_0 A_1 \ldots$ и θ_1-спирале $C_0 C_1 \ldots$, преносе се и на θ_1-спиралу $C_0 C_1 \ldots$ и θ_2-спиралу $C_0' C_1' \ldots$. Према томе, θ_2-спирали $C_0' C_1' \ldots$ одговара монотон низ кругова $K_0'', K_1'', \ldots$.

Тангента у C_0' на круг K_0'' симетрала је дужи $\overline{C_0 C_1}$. Сви кругови K_n'' су десно од те симетрале.

Најзад, за један монотон низ кругова K_n, чији је низ полупречника r_n тотално монотон, тј. код кога су неједначине (I, 15) испуњене за свако $\nu = 1, 2, \ldots$ казаћемо да чини *тотално монотон низ кругова K_n*. Ако је низ кругова K_n асоциран једној θ-спирали тотално монотон, тада постоји бесконачан низ скупова кругова $K_n, K_n', \ldots$ који се асоцирају θ-спиралама образованим од средишта претходног низа кругова.

Особине напред наведене преносе се индукцијом и на ове бесконачне скупове кругова. Код тотално монотоног низа кругова поред θ-спирала средишта $C_0, C_1, \ldots$ итд., уочимо још Θ-спирале, где је Θ_0-спирала дефинисана са $A_0 C_0 C_0' \ldots$, Θ_1-спирала са $A_1 C_1 C_1' \ldots$, итд. (в. сл. 5).

Напоменимо, најзад, да θ-спирала претставља геометриску интерпретацију Abel-овог збира првог, другог, . . ., n-тог реда. Θ-спирала би одговарала Euler-овој трансформацији.

II. Тригонометриски полиноми и редови са монотоним коефицијентима

2. 1. Коначан или бесконачан тригонометриски збир

$$\sum_{\nu} a_\nu e^{\nu\theta i}, \tag{II, 1}$$

односно његове компоненте

$$\sum_{\nu} a_\nu \sin \nu\theta, \tag{II, 2}$$

и

$$\sum_{\nu} a_\nu \cos \nu\theta, \tag{II, 3}$$

чији су сви коефицијенти позитивни и монотони, тј.

$$a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots > 0, \tag{II, 4}$$

био је предмет знатног броја истраживања. Нарочито су се овим питањем бавили L. Fejér [1], [2], [3], G. Pólya [18], G. Szegő [24], [25], и други.

Особине тих тригонометриских израза, који налазе примену у многим гранама анализе, теорије функција и теорије Fourier-ових редова могу се протумачити као проста последица особина монотоних кругова наведених у 1. 5. Као што смо у уводу навели, та интерпретација у исти мах сједињује диспаратне методе употребљене за доказ тих ставова, даје могућност за њихово проширење, као и нове ставове. Овде ћемо навести само неколико типичних резултата који се односе на тригонометриске изразе облика (II, 1) односно (II, 2) и (II, 3), чији су коефицијенти монотони, тј. задовољавају услов (II, 4).

2. 2. Нека су z_ν комплексни бројеви што одговарају теменима A_ν полигоналне θ-спирале дефинисане у 1. 5., тј.

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i}, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Спољни угао θ-спирале дат је са

$$arc\ (z_{n+1}-z_n)=arc\,(z_n-z_{n-1})+\theta\,.$$

Систем кругова K_n је монотон (в. сл. 6) ако је

$$r_{n-1}=\frac{a_{n-1}}{2\sin\theta/2}\geqslant\frac{a_n}{2\sin\theta/2}=r_n\,,\quad n=1,2,\ldots$$

тј.

$$a_{n-1}\geqslant a_n,\quad n=1,2,\ldots$$

Као непосредну примену ове интерпретације изведимо став:

Кад коефицијенти a_ν *збира*

$$S_{\alpha,\beta}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\sin(\alpha\nu+\beta)\,x$$

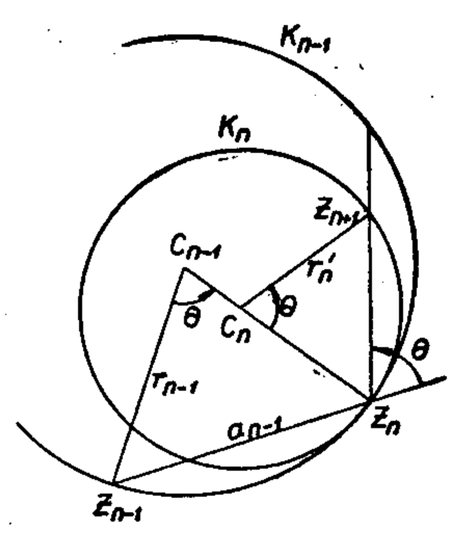
опадају, тј.

$$a_\nu\geqslant a_{\nu+1},\quad \nu=0,1,2,\ldots$$

тада је

$$-\frac{a_0\sin^2(\beta-\alpha/2)\,x/2}{\sin\alpha\,x/2}\leqslant S_{\alpha,\beta}\leqslant$$

$$\leqslant a_0\frac{\cos^2(\beta-\alpha/2)\,x/2}{\sin\alpha\,x/2}\quad\text{(II, 5)}$$



Сл. 6

за $0<x<\pi$ *ма какви били* α *и* β.

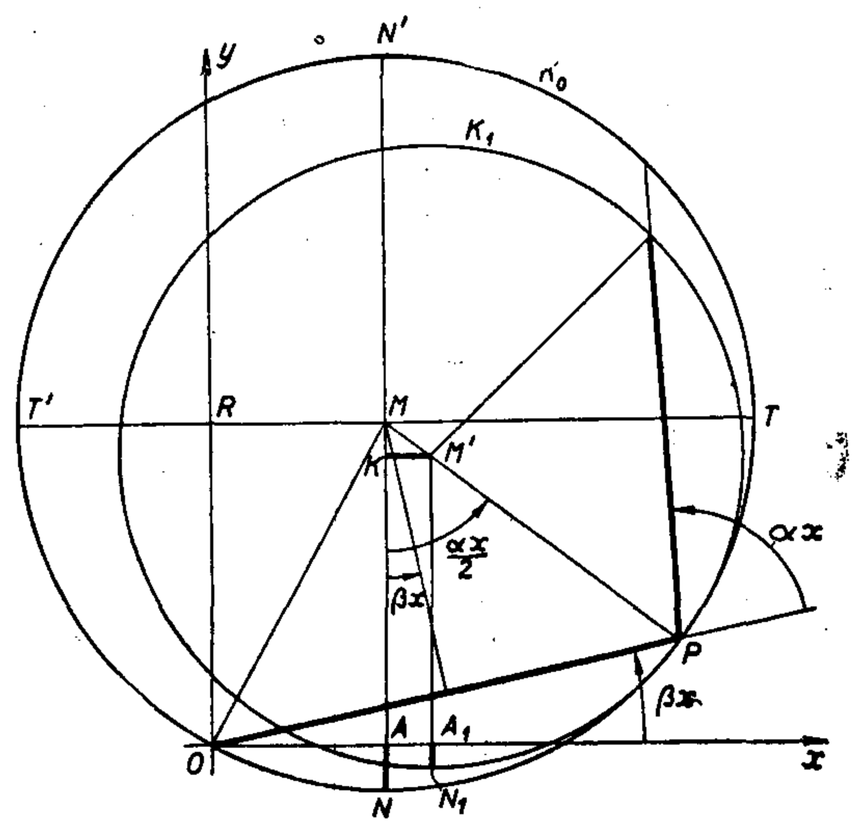
Доказ. Према својству **1⁰** одељка 1. 5. тачка

$$z_\nu=\sum_\nu a_\nu e^{\alpha\nu xi}$$

садржана је у систему кругова K_n, према томе и у K_0. Цела слика је окренута на угао βx. Отуда, из слике 7 видимо да је

$$S_{\alpha,\beta}=\mathbf{Im}\left\{e^{\beta xi}\sum_\nu a_\nu e^{\alpha\nu xi}\right\}=$$

$$=\sum_\nu a_\nu\sin(\alpha\nu+\beta)\,x\geqslant-\overline{AN}.$$



Сл. 7

Из слике 7 је такође очевидно

$$\overline{AN}=\overline{MN}-\overline{AM}=\frac{a_0}{2\sin\frac{\alpha x}{2}}-\frac{a_0}{2\sin\alpha x/2}\cos(\alpha\,x/2-\beta\,x)=$$

$$=\frac{a_0}{\sin\alpha x/2}\sin^2(\beta-\alpha/2)\,x/2\,.$$

На исти начин добивамо (в. сл. 7)

$$S_{\alpha,\beta} < \overline{AM} + \overline{MN'} = \overline{AM} + \overline{MN} =$$

$$= \frac{a_0}{2 \sin \alpha x/2} + \frac{a_0}{2 \sin \alpha x/2} \cos (\alpha x/2 - \beta x) =$$

$$= \frac{a_0}{\sin \alpha x/2} \cos^2 (\beta - \alpha/2)\, x/2 \,.$$

Ако претпоставимо да је $a_0 > a_1$, тада из слике 7 добивамо

$$S_{\alpha,\beta} \geqslant -A_1 N_1 = M' N_1 - A_1 M' = M' P - A_1 M' \,,$$

где је

$$\overline{M'P} = \frac{a_1}{2 \sin \alpha x/2}$$

и

$$\overline{A_1 M'} = \overline{AM} - \overline{MK} =$$

$$= \frac{a_0}{2 \sin \alpha x/2} \cos (\alpha x/2 - \beta x) - \overline{MM'} \cos (\alpha x/2 + \beta x) \,.$$

У овом случају, $a_0 > a_1$, чак је

$$S_{\alpha,\beta} > a_0 \sin \beta x - \frac{a_1}{\sin \alpha x/2} \sin^2 (\alpha x/2 + \beta x) \,.$$

Исто тако, према слици 7, за реални део

$$C_{\alpha,\beta} = \mathbf{Re} \left\{ e^{\beta x i} \sum_{\nu} a_\nu e^{\alpha \nu x i} \right\} = \sum_{\nu} a_\nu \cos (\alpha \nu + \beta) x$$

важе ове неједначине

$$-(\overline{MT'} - \overline{RM}) \leqslant C_{\alpha,\beta} \leqslant (\overline{RM} + \overline{MT}) \,.$$

Како је

$$\overline{RM} = \overline{OA} = \frac{a_0}{2 \sin \alpha x/2} \sin (\alpha x/2 - \beta x) \,,$$

то последње неједначине прелазе у

$$-\frac{a_0}{2 \sin \alpha x/2} [1 - \sin (\alpha x/2 - \beta x)] \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha,\beta} \leqslant \frac{a_0}{2 \sin \alpha x/2} [1 + \sin (\alpha x/2 - \beta x)] \,. \quad \text{(II, 6)}$$

2. 3. У раду [1] L. Fejér је дао став који исказује чињеницу да чим су коефицијенти једног синусног реда $s(\theta) = \Sigma a_\nu \sin \nu \theta$ монотони, у сваком размаку $(0, \varepsilon)$ са произвољним ε постоје места где је $s(\theta)$ позитивно. На овој интерпретацији основано,

уопштење Fejér-овог става које смо дали J. Карамата и ја [15] гласи:

Ако су у изразу

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\theta$$

коефицијенти a_ν *монотони и такви да је израз*

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu - \frac{(2n+1)^2}{8} a_{n+1} \qquad (II, 7)$$

позитиван од неког k, $n \geqslant k$, *тада постоје два позитивна броја* η *и* ε *независна од* n, *таква да је*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\theta \leqslant \eta,$$

за све $n \geqslant k$ *и* $0 \leqslant \theta < \varepsilon$.

Услов (II, 7) биће испуњен, на пример, када

$$a_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

или када

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1)(a_\nu - a_{\nu+1}) \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Из овог става извешћемо овај став:

Тригонометриски синусни ред са монотоно опадајућим коефицијентима a_ν, *који задовољавају услов*

a) $$a_n = O(1/n)$$

униформно је ограничен у $(0, \pi)$;

b) $$a_n = o(1/n)$$

униформно је конвергентан у $(0, \pi)$.

Докажимо тврђење под *b)*, пошто је доказ идентичан за тврђење под *a)*, кад се у њему замени o са O. Познато је да тригонометриски ред униформно конвергира у сваком отвореном размаку $(+0, \pi - 0)$ ако су његови коефицијенти монотони. Према томе је довољно да покажемо да је ред униформно конвергентан у тачкама 0 и π. Према 1.5. особина 1^0, тачка

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i}$$

налази се у кругу K_{k+1} за $n \geqslant k$. Изразимо да се пројекција те тачке s_n на имагинарну осу налази између пројекција круга K_{k+1} на ту осу, па добивамо неједначину (C_{k+1} је центар круга K_{k+1})

$$\mathbf{Im}(s_n) \leqslant \mathbf{Im}(C_{k+1}) + \frac{1}{2} a_{k+1} \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2},$$

односно

$$\mathbf{Im}\,[s(\theta)] \leqslant \mathbf{Im}\,(s_k) + \frac{a_{k+1}}{2}\,\frac{\cos(2k+1)\,\theta/2}{\sin\theta/2} + \frac{a_{k+1}}{2}\,\frac{1}{\sin\theta/2},$$

или

$$\mathbf{Im}\,[s(\theta)] \leqslant \mathbf{Im}\,(s_k) + \frac{a_{k+1}}{2}\,\frac{\cos(2k+1)\,\theta/2}{\sin\theta/2} - \frac{a_{k+1}}{2\sin\theta/2} + \frac{a_{k+1}}{\sin\theta/2} =$$

$$= \mathbf{Im}\,(s_k) - a_{k+1}\,\frac{\sin^2(2k+1)\,\theta/4}{\sin\theta/2} + \frac{a_{k+1}}{\sin\theta/2}.$$

Према томе, за $n \geqslant k$ је

$$s(\theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin\nu\theta \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \sin\nu\theta - a_{k+1}\,\frac{\sin^2(2k+1)\,\theta/4}{\sin\theta/2} + \frac{a_{k+1}}{\sin\theta/2} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \sin\nu\theta + \frac{a_{k+1}}{\sin\theta/2}\cos^2(2k+1)\,\theta/4 \leqslant$$

$$\leqslant \theta \cdot \sum_{\nu=1}^{k} \nu a_\nu + \frac{a_{k+1}}{\sin\theta/2} =$$

$$= k\theta\,\frac{\sum_{\nu=1}^{k} \nu a_\nu}{k} + \frac{1}{(k+1)\sin\theta/2}(k+1)\,a_{k+1}.$$

Ако узмемо $k = [1/\theta]$ и пустимо да $\theta \to 0$, добивамо наведени став. Да се услов $o(1/n)$ у случају *b)* не може заменити условом $O(1/n)$ показује ред

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

који, као што је познато, није униформно конвергентан у тачки $x=0$, али, као што се види из дела *b)* овог става, он је униформно ограничен за све $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

2.4. За испитивање распореда нула тригонометриских полинома, као и тригонометриских редова Fejér [1] је показао да основну улогу игра овај Szegő-ов став:

Косинусни полином

$$C_0 + C_1\cos\theta + C_2\cos 2\theta + \cdots + C_n\cos n\theta, \qquad \text{(II, 8)}$$

где је

$$0 < C_0 < C_1 < \cdots < C_n,$$

има, у размаку $(0, 2\pi)$, $2n$ *међусобно различитих нула* t_k, $k = 1, 2, \ldots 2n$ *за које важи*

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+1/2} < t_k < \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+1/2}, \quad k = 1, 2, \ldots 2n, \qquad \text{(II, 9)}$$

Ови ставови о распореду нула су исто тако непосредна примена интерпретације дате у 1. 5. Тако, на пример, наведени став добивамо ако ставимо

$$2\,e^{n\theta i}\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \cos \nu\theta = \sum_{\nu=0}^{n} C_{n-\nu}\, e^{\nu\theta i} + e^{2n\theta i}\sum_{\nu=0}^{n} C_{n-\nu}\, e^{-\nu\theta i}$$

и означимо

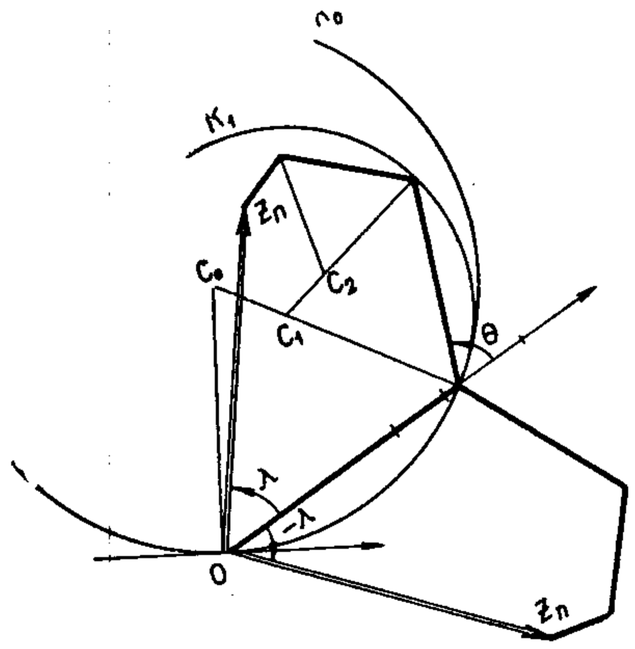
$$z_n = \sum_{\nu=0}^{n} C_{n-\nu}\, e^{\nu\theta i};$$

тада последњи израз постаје

$$2\,e^{n\theta i}\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \cos \nu\theta = z_n + e^{2n\theta i}\,\bar{z}_n\,. \qquad \text{(II, 10)}$$

За свако $\theta > \varepsilon$, тачка претстављена комплексним бројем z_n налази се на θ-спирали, чији крај пада у круг K_n. Тачка $\bar{z}_n$ се, према томе, налази на θ-спирали симетричној са првобитном према реалној оси (в. сл. 8). Како је $z_n(\theta) \neq 0$, то (II, 10) постаје нула само ако z_n дође у смер супротан са

$$e^{2n\theta i}\,\bar{z}_n.$$



Сл. 8

Нека је λ аргумент од z_n, тада вектор $\bar{z}_n e^{2n\theta i}$ пада у смер супротан од z_n кад год је

$$2n\theta = 2\lambda - \pi + 2k\pi.$$

Како је према особини **2⁰** § 1. 5. увек

$$-\theta/2 < \lambda < \pi - \theta/2\,,$$

то за неку вредност θ која се налази у размацима одређеним неједначинама

$$-\theta - \pi + 2k\pi < 2n\theta < 2\pi - \theta + 2k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$\bar{z}_n e^{2n\theta i}$ доћи ће у смер супротан од z_n, тј. $\Sigma C_\nu \cos \nu\theta$ постаје нула. Отуда следи да је свако такво t_k одређено размаком

$$\frac{k-1/2}{n+1/2}\pi\,, \quad \frac{k+1/2}{n+1/2}\pi\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

2. 4. 1. Овим поступком може се доказати и овај став (Fejér [1]):

Ако коефицијенти реда

$$s(\theta) = b_{n+1}\sin(n+1)\theta + b_{n+2}\sin(n+2)\theta + \cdots, \qquad \text{(II, 11)}$$

образују моноτон нула-низ, τада непрекидна функција $s(\theta)$ *има у сваком од размака*

$$(m-1)\frac{\pi}{n+1/2}, \quad m\frac{\pi}{n+1/2}, \quad m=1,2,\ldots n \qquad \text{(II,12)}$$

најмање једну нулу.

У овом случају $s(\theta)$ да се написати у облику

$$2i\cdot s(\theta)=e^{(n+1)\theta i}\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu e^{\nu\theta i}-e^{-(n+1)\theta i}\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu e^{-\nu\theta i}.$$

Ако ставимо

$$z(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu e^{\nu\theta i}, \quad c_\nu=b_{n+\nu+1}, \quad \nu=1,2,\ldots,$$

тада последњи израз постаје

$$2i\cdot s(\theta)\,e^{(n+1)\theta i}=e^{2(n+1)\theta i}\cdot z(\theta)-\bar{z}(\theta). \qquad \text{(II, 13)}$$

На истом принципу као у претходном одељку добивамо размак (II, 12) у коме се мора налазити бар једна нула функције.

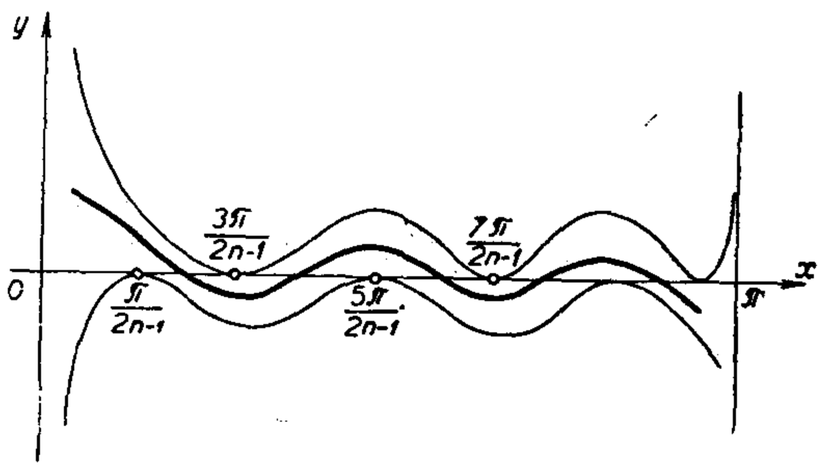
Последњи став о распореду нула је исто тако и непосредна последица основне неједначине (II, 5), изведене у тачки 2. 2. која се односи на синусни збир са монотоним коефицијентима. Ако се у тој неједначини стави

$$a_\nu=b_{n+\nu+1}, \quad \nu=0,1,2,\ldots, \quad \alpha=1, \quad \beta=n+1,$$

тада се та неједначина може написати у облику

$$-\frac{b_{n+1}\sin^2(n-1/2)\,\theta/2}{\sin\theta/2}<s(\theta)<\frac{b_{n+1}\cos^2(n-1/2)\,\theta/2}{\sin\theta/2}.$$

$s(\theta)$ као непрекидна функција ограничена је двема непрекидним функцијама датим последњим неједначинама, према томе мора да има бар једну нулу између двеју нула леве и десне границе ове неједначине (в. сл. 9).



Сл. 9

Ако се у последњим неједначинама (II, 6) одељка 2. 2. стави

$$\alpha=1, \ \beta=n+1, \ a_\nu=b_{n+\nu+1}, \quad \nu=0,1,2,\ldots,$$

те неједначине прелазе у

$$-\frac{b_{n+1}}{2\sin x/2}[1-\sin(n-1/2)\,x]\leqslant C_{1,n+1}\leqslant\frac{b_{n+1}}{2\sin x/2}[1+\sin(n-1/2)\,x].$$

Како се и овде непрекидна функција

$$C_{1,n+1}=c(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1}\cos(n+\nu+1)\theta$$

налази између двеју непрекидних функција које додирују X-осу, то се између нула тих граничних функција мора наћи бар једна нула функције $C_{1,n+1}$, тј. функција $C_{1,n+1}$ има бар једну нулу у сваком од размака

$$\frac{k-1/2}{n+1/2}\pi, \quad \frac{k+1/2}{n+1/2}\pi, \quad k=1,2,\ldots,n,$$

2.4.2. Као што смо напоменули раније, овај геометриски поступак доводи и до низа нових уопштења. У овом правцу наведимо само овај резултат. Нека коефицијенти реда (II, 11) образују монотон нула-низ и нека је $b_{n+1}<b_{n+2}$ (где је искључено $b_{n+1}=b_{n+2}$); тада се размаци (II, 12) могу прецизирати у:

$$(k-\Lambda_2)\frac{\pi}{n+1-\Lambda_2/2}, \quad k\frac{\pi}{n+1-\Lambda_1/2}, \quad k=1,2,\ldots n,$$

где је $0<\Lambda_2<1$, $0<\Lambda_1<1$ дато са (II, 14) и (II, 15), тј. *у случају* $b_{n+1}<b_{n+2}$ *непрекидна функција* $s(\theta)$ *у* $\varepsilon<\theta<\pi-\varepsilon$ *има нуле у раздвојеним размацима.*

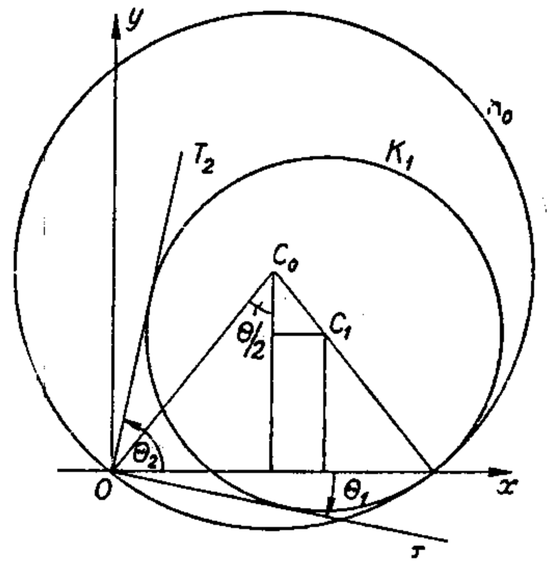
Према (II, 12) је

$$2i\cdot s(\theta)e^{(n+1)\theta i}=e^{2(n+1)\theta i}z(\theta)-\overline{z}(\theta)$$

са

$$z(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu e^{\nu\theta i}, \quad c_\nu=b_{n+\nu+1}, \quad \nu=0,1,2,\ldots$$

Као и у претходном параграфу треба одредити $\arg z(\theta)=\Theta(\theta)$. Ради овога напоменимо само да се $z(\theta)$ налази у систему кругова $K_0, K_1, \ldots$ и да сада због $c_0<c_1$ ($c_0\neq c_1$) круг K_1 лежи увек у K_0 (в. сл. 10). Према томе, $s(\theta)$ може бити нула само ако је $-\Theta_1\leqslant\Theta(\theta)\leqslant\Theta_2$ (в. сл. 10). Један елементаран рачун даје (пошто круг K_0 има центар C_1 са координатама $C_1\left(c_0-c_1/2, \frac{c_1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)$) за углове правих $\overline{OT_1}$ и $\overline{OT_2}$ (сл. 10)



Сл. 10

$$\operatorname{tg}\Theta_1=-\sin\frac{\theta}{2}\,\frac{c_1}{2\sqrt{c_0^2-c_0c_1}+(2c_0-c_1)\cos\theta/2},$$

$$\operatorname{tg}\Theta_2=\sin\frac{\theta}{2}\,\frac{c_1}{2\sqrt{c_0^2-c_0c_1}-(2c_0-c_1)\cos\theta/2}.$$

Ако се, на пример, стави

$$-\operatorname{tg}\Theta_1=\frac{c_1\sin\theta/2}{2\sqrt{c_0^2-c_0c_1}+(2c_0-c_1)\cos\theta/2}=\operatorname{tg}\lambda(\theta)\cdot\frac{\theta}{2}\qquad(\text{II, 13})$$

као и

$$\alpha_1=2\sqrt{c_0^2-c_0c_1},\quad \beta=2c_0-c_1,$$

тада је $\lambda(\theta)$ одређено са

$$\lambda(\theta)=\frac{2}{\theta}\operatorname{arctg}\frac{c_1\sin\theta/2}{\alpha_1+\beta_1\cos\theta/2}\leqslant\frac{2}{\theta}\operatorname{arctg}\frac{c_1\sin\theta/2}{\beta_1\cos\theta/2}=$$

$$=\frac{2}{\theta}\operatorname{arctg}\left(\frac{c_1}{\beta_1}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)<\frac{2}{\theta}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=\frac{2}{\theta}\cdot\frac{\theta}{2}=1,$$

где претпоследња неједначина следи због $c_1/\beta_1=c_1/(2c_0-c_1)<1$ што се своди на $c_0-c_1<0$. Дакле, $\lambda(\theta)$ је увек <1, за све $0<\theta<\pi$. Лако је видети да је и $\lambda(0)<1$ и $\lambda(\pi)<1$. Према томе ако се означи

$$\Lambda_1(c_0,c_1)=\operatorname*{Max}_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}\left\{\frac{2}{\theta}\operatorname{arctg}\frac{c_1\sin\theta/2}{\alpha_1+\beta_1\cos\theta/2}\right\}<1,\qquad(\text{II, 14})$$

биће према (II, 13)

$$\Theta_1<\Lambda_1\cdot\frac{\theta}{2}\quad\text{где је}\quad\Lambda_1<1.$$

На исти начин добива се да је

$$\Theta_2<\Lambda_2(\pi-\theta/2)\quad\text{са}\quad\Lambda_2<1,$$

где је

$$\Lambda_2(c_0,c_1)=\operatorname*{Max}_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}\left\{\frac{2}{2\pi-\theta}\operatorname{arctg}\frac{c_1\sin\theta/2}{\alpha_1-\beta_1\cos\theta/2}\right\}<1.\qquad(\text{II, 15})$$

Сада је према слици 10

$$-\Lambda_1\frac{\theta}{2}<-\Theta_1\leqslant\Theta(\theta)\leqslant\Theta_2<\Lambda_2\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right).$$

Отуда следи да се нуле функције $s(\theta)$ налазе у размацима

$$(k-\Lambda_2)\frac{\pi}{n+1-\Lambda_2/2},\quad k\frac{\pi}{n+1-\Lambda_1/2},\quad k=1,2,\ldots n,\qquad(\text{II, 16})$$

и како су ови размаци садржани у

$$(k-1)\frac{\pi}{n+1/2},\quad k\frac{\pi}{n+1/2},$$

то се отуда добива наведени резултат као и чињеница да постоје размаци око тачака $(k-1)\pi/(n+1/2)$, $k=1,2,\ldots n$ у коме нема нула

функција $s(\theta)$ ако је $b_{n+1} < b_{n+2}$. У овом резултату садржан је и резултат наведен у тачки 2. 3. да синусни ред или полином нема нула у близини $\theta=0$ ако му коефицијенти теже нули.

III. Тригонометриски полиноми и редови са двоструко и вишеструко монотоним коефицијентима

3. 1. У одељку 1. 5. 1. добили смо као услов да један низ кругова K_n асоциран једној θ-спирали буде двоструко монотон, потребно је да низ страна те θ-спирале буде двоструко монотон.

Нека су A_n темена θ-спирале, дата комплексним бројевима

$$s_{n-1} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i}, \quad s_{-1} = A_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \text{(III, 1)}$$

и претпоставимо да су a_ν двоструко монотони, тј.

$$\begin{aligned} \Delta a_\nu &= a_{\nu-1} - a_\nu \geqslant 0, \\ \Delta^2 a_\nu &= a_{\nu-1} - 2a_\nu + a_{\nu+1} \geqslant 0, \end{aligned} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \qquad \text{(III, 2)}$$

У овом случају (в. сл. 5), поред монотоног система кругова $K_0, K_1, \ldots$ асоцираних θ-спирали $0 s_0 s_1 \ldots$ имамо и монотон систем кругова $K_0', K_1' \ldots$ асоциран θ_1-спирали средишта првих кругова $C_0, C_1, \ldots$ (1. 5. 1.).

Особина **2′** одељка 1. 5. 1. да се извести и рачунски. Полупречник r_q' круга K_q', $q = 1, 2, \ldots$, дат је са (в. сл. 5)

$$\begin{aligned} r_q' = C_q' C_q &= (C_q A_{q+1} - C_{q+1} A_{q+2})/2 \sin\theta/2 = \\ &= \frac{a_{q-1} - a_q}{4} \operatorname{cosec}^2 \theta/2, \end{aligned} \qquad \text{(III, 3)}$$

а центар C_q' круга K_q' са

$$\begin{aligned} C_q' &= C_q + r_q' \exp\left[(q-1)\theta + \theta/2 + \pi/2 + \pi + \pi/2 + \theta/2\right] i = \\ &= C_q + r_q' e^{q\theta i}. \end{aligned} \qquad \text{(III, 4)}$$

Из последњег израза се види да је дуж $\overline{C_q' C_q}$ паралелна дужи $\overline{A_{q-1} A_q}$; према томе, тангента у тачки C_q на круг K_q' нормална је на дужи $\overline{A_{q-1} A_q}$. Ако у обрасцу (III, 4) (в. сл. 5) изразимо C_q као

$$C_q = \sum_{\nu=0}^{q-1} a_\nu \exp[\nu\theta i] + i \frac{a_q}{2} \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} \exp\left[\frac{2q-1}{2} \theta i\right] \qquad \text{(III, 5)}$$

а r_q' са (III, 3), добићемо дефинитивно

$$C_q' = s_{q-1} + i\frac{a_q}{2}\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}\exp\left[(2q-1)\frac{\theta i}{2}\right] +$$

$$+\frac{a_{q-1}-a_q}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}\exp[q\theta i]. \qquad \text{(III, 5')}$$

3. 1. 1. У случају двоструко монотоног низа коефицијената a_ν (услов (III, 2)) тачка s_n налази се у или на кругу K_q', кад је $q \leqslant n$. Ако пројектујемо овај круг на реалну осу и изразимо да се између његових пројекција налази пројекција тачке s_n, добићемо неједначине

$$\mathbf{Re}\,(C_q') - r_q \leqslant \mathbf{Re}\,(s_n) \leqslant \mathbf{Re}\,(C_q') + r_q.$$

Према (III, 3) и (III, 5') биће

$$\mathbf{Re}\,(s_{q-1}) - \frac{a_q}{2}\frac{\sin(2q-1)\theta/2}{\sin\theta/2} + \frac{a_{q-1}-a_q}{4}\frac{\cos q\theta}{\sin^2\theta/2} -$$

$$-\frac{a_{q-1}-a_q}{4}\frac{1}{\sin^2\theta/2} \leqslant \mathbf{Re}\,(s_n),$$

$$\mathbf{Re}\,(s_n) \leqslant \mathbf{Re}\,(s_{q-1}) - \frac{a_q}{2}\frac{\sin(2q-1)\theta/2}{\sin\theta/2} +$$

$$+\frac{a_{q-1}-a_q}{4}\frac{\cos q\theta}{\sin^2\theta/2} + \frac{a_{q-1}-a_q}{4}\frac{1}{\sin^2\theta/2},$$

односно

$$-\frac{a_q}{2}\frac{\sin(2q-1)\theta/2}{\sin\theta/2} - \frac{a_{q-1}-a_q}{4}\frac{\sin^2 q\theta/2}{\sin^2\theta/2} \leqslant \mathbf{Re}\,(s_n - s_{q-1}),$$

$$\mathbf{Re}\,(s_n - s_{q-1}) \leqslant \frac{a_q}{2}\frac{\sin(2q-1)\theta/2}{\sin\theta/2} + \frac{a_{q-1}-a_q}{4}\frac{\cos^2 q\theta/2}{\sin^2\theta/2},$$

где треба ставити

$$\mathbf{Re}\,(s_n - s_{q-1}) = \mathbf{Re}\left(\sum_{\nu=q}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i}\right) = \sum_{\nu=q}^{n} a_\nu \cos\nu\theta.$$

Отуда добивамо следећи став [15]:

Кад низ коефицијената a_ν задовољава услове

$$\Delta a_\nu \geqslant 0, \quad \nu = q,\ q+1,\ \ldots,\ n,\ n+1, n+2,$$

$$\Delta^2 a_\nu \geqslant 0, \quad a_{n+1} = a_{n+2} = 0,$$

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧКОГ ИНСТИТУТА

тада ставивши

$$2\,w_q(2x) = a_q \frac{\sin^2(q-1)x}{\sin^2 x} - a_{q-1}\frac{\sin^2 qx}{\sin^2 x},$$

$$2\,W_q(2x) = a_{q-1}\frac{\cos^2 qx}{\sin^2 x} - a_q \frac{\cos^2(q-1)x}{\sin^2 x},$$

и

$$C_{q,n}(\theta) = \sum_{\nu=q}^{n} a_\nu \cos\nu\theta,$$

добићемо

$$w_q(\theta) \leqslant C_{q,n}(\theta) \leqslant W_q(\theta) \quad за \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

3. 2. Посматрајмо косинусни ред

$$c(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu\theta, \tag{III, 6}$$

чији коефицијенти задовољавају услов двоструке монотоније, тј.:

$$\Delta a_\nu = a_\nu - a_{\nu+1} \geqslant 0,$$
$$\Delta^2 a_\nu = a_\nu - 2a_{\nu+1} + a_{\nu+2} \geqslant 0, \qquad \nu = 0, 1, 2 \ldots \tag{III, 6'}$$

За тај ред важи овај Fejér-ов став [1]:

$c(\theta)$ у целом размаку $0 < \theta < 2\pi$ не узима негативне вредности. Ако је

$$a_0 - 2a_1 + a_2 > 0,$$

тада је

$$c(\theta) \geqslant \frac{a_0 - 2a_1 + a_2}{2}. \tag{III, 7}$$

Овај став је последица интерпретације збира

$$S(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\nu\theta i},$$

дате у 1. 5. 1. Према слици 5, $S(\theta)$ се, због услова двоструке монотоније налази у сваком кругу K_n', па је због особине **2'** тога одељка десно од тангенте $C_0\tau$, тј.

$$c(\theta) = \mathbf{Re}\,[S(\theta)] > \frac{a_0}{2},$$

и отуда већ следи позитивитет од $c(\theta)$. Како $S(\theta)$ лежи и у K_1', тј. десно од тангенте у тачки P на круг K_1', то отуда добивамо и неједнакост (III, 7), јер је (в. сл. 5)

$$c(\theta) \geqslant \overline{P'P} = \left(\frac{a_0 - a_1}{2\sin\theta/2} - \frac{a_1 - a_2}{2\sin\theta/2}\right)\sin\theta/2 = \frac{a_0 - 2a_1 + a_2}{2}.$$

3. 2. 1. Косинусни полином

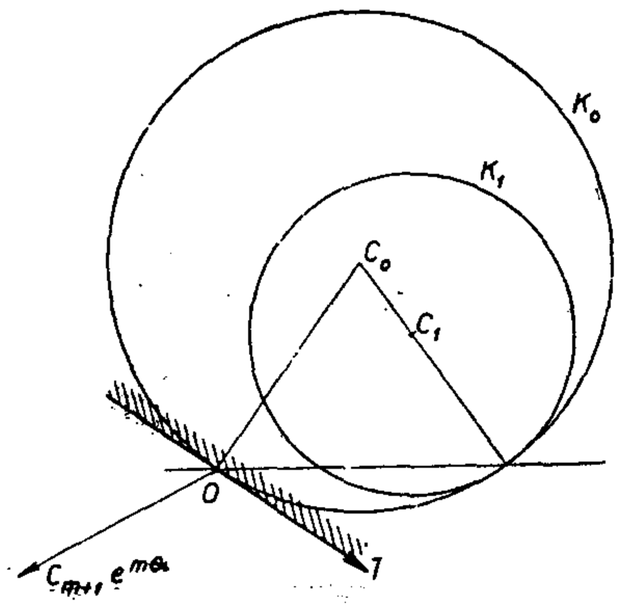
$$C_m(\theta) = \frac{c_0}{2} + c_1 \cos\theta + c_2 \cos 2\theta + \ldots + c_m \cos m\theta, \quad \text{(III, 8)}$$

чији коефицијенти монотоно опадају и задовољавају услов

$$c_\nu - 2c_{\nu+1} + c_{\nu+2} \geqslant 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m-2,$$

не спада у резултат наведен у претходном одељку, пошто овде не мора бити испуњен услов $c_{m-1} - 2c_m \geqslant 0$. За полином (III, 8) могу се сада навести раздвојени размаци у којима он не може имати нула. $C_m(\theta)$ да се написати у облику

$$2C_m(\theta) = 2e^{-\theta i/2} \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \cos\frac{2\nu-1}{2}\theta + \sum_{\nu=0}^{m} (c_\nu - c_{\nu+1}) e^{\nu\theta i} + c_{m+1} e^{m\theta i},$$



Сл. 11

Према 1. 5. 1. први члан десне стране се налази на тангенти круга K_0 (особина 2⁰) а други у систему кругова $K_0, K_1, \ldots$ (в. сл. 11). $C_m(\theta)$ не може бити нула ако се $c_{m+1} e^{m\theta i}$ налази испод OT, тј. за

$$2k\pi - \theta/2 \leqslant m\theta \leqslant \pi - \theta/2 + 2k\pi.$$

Отуда у размацима

$$\frac{2k\pi}{m+1/2} \leqslant \theta \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{m+1/2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, [m/2],$$

$C_m(\theta)$ не може бити нула. Тако, на пример, $C_m(\theta)$ нема нула у размаку $(0, \pi/(m+1/2))$.

3. 2. 2. Позитивитет једног косинусног полинома облика

$$T_n(\varphi) = \frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cos\varphi + \ldots + \lambda_n \cos n\varphi \quad \text{(III, 9)}$$

долази до изражаја у неким проблемима анализе. Тако, на пример, класичан је Fejér-ов став о аритметичким срединама делимичних збирова Fourier-овог реда. Ту се ради о позитивитету полинома облика

$$1 + 2\sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \cos\nu\varphi = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin n\varphi/2}{\sin\varphi/2}\right)^2 \geqslant 0.$$

Из позитивитета полинома (III, 9) следи, на пример, одмах горња граница апсолутне вредности од

$$L_n = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu c_\nu$$

за реално λ_ν, а где су c_ν коефицијенти потенцијалног реда функције $f(z)$. То следи непосредно из обрасца

$$L_n = \lim_{r\to 1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\varphi i})\, T_n(\varphi)\, d\varphi .$$

W. Rogosinski и G. Szegő [22], [27], добили су низ ставова о особинама делимичних збирова Taylor-ових редова полазећи од неједначине

$$C_n(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \nu\theta}{\nu+1} \geqslant 0 \quad \text{за свако } n. \qquad \text{(III, 10)}$$

Ова неједначина као и она дата у 3. 3. 1. може се доказати поступком који се оснива на особинама θ-спирале, а исто тако може се тим поступком добити позитивитет и других косинусних и синусних полинома. Према претходном одељку (III, 10) нема нула у $(0, \pi/(n+{}^1/_2)$, Ако се означи

$$C(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu\theta}{\nu+1},$$

то се због

$$\frac{1}{\nu+1} = \int_0^1 t^\nu\, dt$$

$C(\theta)$ може написати у облику

$$C(\theta) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{1-t^2}{1-2t\cos\theta+t^2}\, dt. \qquad \text{(III, 11)}$$

Из (III, 11) следи не само да је $C(\theta) \geqslant 0$ већ због $\partial C/\partial\theta \leqslant 0$ да $C(\theta)$ монотоно опада у целом интервалу $(0, \pi)$.

а) Посматрајмо, најпре, θ у размаку $\pi/(n+1/2) \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Најмања вредност од $C(\theta)$ у том размаку је за $\theta = \pi/2$ и износи према (III, 11)

$$C(\pi/2) = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} - 1 > 0{\cdot}5. \qquad \text{(III, 12)}$$

Израз

$$R_n(\theta)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\cos\nu\theta}{\nu+1} \qquad \text{(III, 13)}$$

можемо с обзиром да се

$$S_n(\theta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{(n+\nu)\theta i}}{n+\nu+1}$$

налази у кругу K_0, и да је $R_n=\mathbf{Re}\{S_n(\theta)\}$ оценити са

$$R_n(\theta)\leqslant\frac{1}{2(n+1)}\left[1+\frac{1}{\sin\theta/2}\right], \qquad \text{(в. сл. 5).} \qquad \text{(III, 14)}$$

Из

$$1-x<\frac{\sin\pi x}{\pi x}$$

следи

$$\frac{1}{\sin\theta/2}<\frac{4\pi}{\theta(2\pi-\theta)}.$$

Последњи израз монотоно опада, и (III, 14) се може оценити са

$$R_n(\theta)\leqslant\frac{1}{2(n+1)}\left[1+\frac{4\pi}{\pi/(n+1)\cdot[2\pi-\pi/3]}\right]=\frac{1}{2(n+1)}+\frac{4}{5\pi}\leqslant\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

Због (III, 12) следи сада позитивитет од $C_n(\theta)$ у $\pi/(n+1/2)<\theta<\pi/2$ а за $n>2$, водећи рачуна да је

$$C_n(\theta)=C(\theta)-R_n(\theta). \qquad \text{(III, 15)}$$

b) Нека је $\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi$. Како $C(\theta)$ монотоно опада, то је

$$C(\theta)\geqslant\lg 2-1/2=0\cdot 1935\ldots \qquad \text{(III, 16)}$$

Ако сада мајорирамо $R_n(\theta)$ користећи чињеницу да се $S_n(\theta)$ налази у кругу K_0' који је десно од $C_0\tau$ (в. сл. 5), добићемо

$$R_n(\theta)\leqslant\frac{1}{2(n+1)}+2r_0', \qquad \text{(III, 17)}$$

где је r_0' полупречник круга K_0' и који је дат са (III, 3):

$$r_0'=\frac{1}{4(n+1)(n+2)\sin^2\theta/2}.$$

Ако ове вредности заменимо у израз (III, 17), добијамо

$$R_n(\theta)\leqslant\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)(n+2)(\sqrt{2}/2)^2}=\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

тј. за $n\geqslant 3$ је

$$R_n(\theta)\leqslant\frac{1}{8}+\frac{1}{20}=0.175$$

и због (III, 16) следи позитивитет од $C_n(\theta)$ у $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$ према (III, 15) за $n \geqslant 3$.

Најзад за $n < 3$, $C_0(\theta)$ и $C_1(\theta)$ су очевидно позитивни, а

$$C_2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 2\theta > 0$$

пошто је његова најмања вредност за $\cos\theta = -3/8$ и износи $7/96 > 0$.

3. 3. Нека је дат синусни полином

$$s(\theta) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\theta, \qquad \text{(III, 18)}$$

чији коефицијенти задовољавају услове (III, 6′). Применом двоструког Abel-овог збира он прелази у

$$s(\theta) = \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu - 2a_{\nu+1} + a_{\nu+2}) S_\nu(\theta), \quad a_{n+1} = a_{n+2} = 0, \qquad \text{(III, 19)}$$

где је

$$S_\nu(\theta) = \nu \sin\theta + (\nu - 1)\sin 2\theta + \cdots + \sin\nu\theta. \qquad \text{(III, 19′)}$$

Сви тригонометриски полиноми $S_\nu(\theta)$ *су позитивни у* $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ (Lukács [3]). Да бисмо показали позитивитет полинома $S_\nu(\theta)$, приметимо да су њихови коефицијенти двоструко монотони. Збир

$$\sum_{k=0}^{n} (\nu + 1 - k)\, e^{k\theta i} \qquad \text{(III, 19″)}$$

налази се зато у систему кругова $K_0'; K_1', \ldots K_\nu'$, који се овде сви поклапају, јер је $\overline{C_0 C_1} = \overline{C_1 C_2} = \cdots = \overline{C_{\nu-1} C_\nu} = 1$. У овом случају може се директно израчунати $S_\nu(\theta)$, одакле се види његов позитивитет. Како је сада, тј. у случају (III, 19′) $\overline{C_{\nu-1} C_\nu} = r_\nu$, где је r_ν полупречник K_ν-тог круга, са центром у C_ν, то се тачка $A_{\nu-1}$, која претставља комплексан број дат са (III, 19″) налази и на кругу K_0. Из те чињенице, следи према сл. 5

$$S_\nu = \mathbf{Im}\left[\sum_{k=0}^{\nu} (\nu + 1 - k)\, e^{k\theta i}\right] = \mathbf{Im}\,[\overrightarrow{OC_0'}] + \mathbf{Im}\,[r_0'\, e^{(\pi - n\theta)i}],$$

где r_0' означава полупречник круга K_0', тј. $r_0' = (\sin^2\theta/2)^{-1}$ (в. III. 3). Како је

$$\mathbf{Im}\,[\overrightarrow{OC_0'}] = \mathbf{Im}\,[OC_0] = \frac{a_0' \cos\theta/2}{2\sin\theta/2} = \frac{(\nu+1)\cos\theta/2}{2\sin\theta/2},$$

то последња једнакост даје

$$S_\nu(\theta) = \frac{(\nu+1)}{2\sin\theta/2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\sin\nu\theta}{4\sin^2\theta/2} = \frac{(\nu+1)\sin\theta - \sin\nu\theta}{4\sin^2\theta/2} \geqslant 0.$$

Из $S_\nu(\theta) \geqslant 0$ и (III, 19) следи *позитивитет синусног полинома* (III, 18) *чији су коефицијенти двоструко монотони.*

3. 3. 1. Као повод за испитивање позитивитета синусних редова поред осталог послужила је и Fejér-ова хипотеза из 1910 год. да је

$$s_n(\theta)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu\theta}{\nu}>0,\ \text{за}\ n=1,2,\ldots,\ \text{и}\ 0<\theta<\pi, \qquad \text{(III, 20)}$$

коју су доцније доказали D. Jackson [11], Th. Gronwall [9], E. Landau [17] и сам Fejér [3]. Неједначина (III, 20) није садржана у претходном ставу пошто низ

$$a_\nu=1/\nu,\quad \nu=1,2,\ldots,n\quad \text{и}\quad a_{n+1}=0,$$

није конвексан. За доказ горње неједначине приметимо прво да је

$$s_n(\theta)\geqslant 0\quad \text{за}\quad 0<\theta<\pi/n\quad \text{и}\quad \pi-\pi/n<\theta<\pi. \qquad \text{(III, 21)}$$

У последњем интервалу $s_n(\theta)>0$ пошто је

$$s_n(\pi-x)=\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\frac{\sin\nu x}{\nu}>0,\quad \theta=\pi-x,$$

при томе треба напоменути да $(\sin\nu x)/\nu$ за $0<x<\pi/n$ са растућим $\nu\leqslant n$ опада. Сада је према основној неједначини (§ 3. 1.)

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sin\nu\theta}{\nu}\right|<\frac{1}{(n+1)\sin\theta/2},\quad 0<\theta<\pi. \qquad \text{(III, 22)}$$

Из

$$\frac{\pi-\theta}{2}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu\theta}{\nu}$$

и (III, 22) следи да је

$$s_n(\theta)=\frac{\pi-\theta}{2}-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sin\nu\theta}{\nu}>\frac{\pi-\theta}{2}-\frac{1}{(n+1)\sin\theta/2}.$$

Због (III, 21) биће неједначина (III, 20) испуњена за

$$\pi/n\leqslant\theta\leqslant\pi-\pi/n$$

ако је

$$\frac{1}{2}(\pi-\theta)\sin\frac{\theta}{2}>\frac{1}{n+1},\quad \text{за}\quad \pi/n\leqslant\theta\leqslant\pi-\pi/n. \qquad \text{(III, 23)}$$

Функција $\frac{1}{2}(\pi-\theta)\sin\theta/2$ има само један максимум у $(0,\pi)$; стога ће последња неједначина (III, 23) бити испуњена ако вреди за крајеве размака (III, 23), што је случај због

$$\operatorname{tg}x>x,\quad \cos>1-\frac{x^2}{2}$$

и

$$\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}\geqslant\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}\geqslant\frac{\pi}{2n}\left(1-\frac{\pi^2}{8n^2}\right)>\frac{1}{n+1},$$

већ за $n\geqslant 2$.

Напоменимо да овај поступак дозвољава да се утврди позитивитет и других тригонометриских полинома ако се зна збир реда или горња граница збира оног реда од којих је тај полином збир првих n чланова.

3. 3. 2. За позитивитет синусног полинома могу се дати услови које треба да задовоље његови коефицијенти а који су општији од услова датих у 3. 3., тј. од двоструке монотоније његових коефицијената. Из једнакости

$$2i\cdot e^{n\theta i}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin\nu\theta = -\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n-\nu}\, e^{\nu\theta i} + e^{n\theta i}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n-\nu}\, e^{(n-\nu)\theta i},$$

види се да је полином на десној страни дељив са $e^{2\theta i}-1$, тј.

$$2i\cdot e^{n\theta i}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin\nu\theta = (e^{2\theta i}-1)\, e^{(n-1)\theta i}\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu \cos\nu\theta\,,$$

где је за непарно n

$$\begin{aligned}
2A_0 &= a_n + a_{n-2} + \cdots + a_1\\
A_1 &= a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_2\\
A_2 &= a_n + a_{n-2} + \cdots + a_3\\
&\cdots\cdots\cdots\\
A_{n-2} &= a_{n-1}\\
A_{n-1} &= a_n\,,
\end{aligned}$$

а за парно n

$$\begin{aligned}
2A_0 &= a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_1\\
A_1 &= a_n + a_{n-2} + \cdots + a_2\\
A_2 &= a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_3\\
&\cdots\cdots\cdots\\
A_{n-2} &= a_{n-1}\\
A_{n-1} &= a_n\,.
\end{aligned}$$

Како је према § 3. 2. косинусни полином $\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu \cos\nu\theta$ позитиван ако је

$$A_\nu > A_{\nu+1},$$
$$A_\nu - 2A_{\nu+1} + A_{\nu+2} \geqslant 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots n-1,\ A_n = A_{n+1} = 0,$$

то ако ове услове изразимо преко коефицијената a_ν добићемо као услов за позитивитет синусног полинома (III, 18):

$$a_{n-1} - 2a_n \geqslant 0,$$

$$a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n \geqslant 0,$$

$$(a_{n-4} - 2a_{n-3} + a_{n-2}) + (a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n) + a_n \geqslant 0,$$

$$(a_{n-5} - 2a_{n-4} + a_{n-3}) + (a_{n-3} - 2a_{n-2} + a_{n-1}) + a_{n-1} - 2a_n \geqslant 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

тј. *синусни полином је позитиван ако су збирови, парних за себе и непарних за себе, других диференција његових коефицијената позитивни.*

Из овог разматрања може се добити став о позитивитету синусног реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu\theta$. Треба само

$$\frac{1}{\sin \theta} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \sin \nu\theta$$

претворити у

$$A_0/2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \cos \nu\theta$$

и применити став о косинусном реду кад $r \to 1$. Отуда следи као специјалан случај да је *под условом двоструке монотоније коефицијената* a_n *и* $\lim a_n = 0$ *за* $n = \infty$ *синусни ред* $\Sigma a_\nu \sin \nu\theta$ *позитиван у* $0 < \theta < \pi$.

3. 4. Нека су коефицијенти $b_{n+\nu+1}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ синусног реда

$$s(\theta, n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1} \sin (n+\nu+1)\theta, \qquad \text{(III, 24)}$$

двоструко монотони са $b_{n+\nu+1} \to 0$ када $\nu \to \infty$; тада је редом (III, 24) дефинисана функција у $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$ непрекидна, пошто је ред у том размаку униформно конвергентан. Према § 2. 4. 1. (II, 13), $s(\theta, n)$ може се претставити у облику

$$2i \cdot e^{n\theta i}\, s(\theta, n) = e^{2(n+1)\theta i}\, z(\theta) + \bar{z}(\theta), \qquad \text{(III, 25)}$$

где је

$$z(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1} e^{\nu\theta i}.$$

Како су коефицијенти од $z(\theta)$ двоструко монотони, то је према § 3. 2. и § 3. 3.

$$\mathbf{Re}\,[z(\theta)] \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{Im}\,[z(\theta)] \geqslant 0,$$

па се аргумент од $z(\theta)$ налази у размаку $(0, \pi/2)$ за $0<\theta<\pi$. Ако се са $\Theta(\theta)$ означи аргумент од $z(\theta)$, то се из обрасца (III, 25) види да $s(\theta, n)$ постаје нула за неку вредност θ која је одређена једначином

$$2(n+1)\theta+\Theta(\theta)=-\Theta(\theta)+2k\pi, \quad k=1, 2, \ldots, n, \qquad \text{(III, 26)}$$

и где је $0<\Theta(\theta)<\pi/2$ (в. § 2. 4. 1.). Због тога нуле могу бити само у размацима

$$\frac{k-1/2}{n+1}\pi, \quad \frac{k}{n+1}\pi, \quad k=1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(III, 27)}$$

На тај начин се добивају не само размаци упола мањи од оних датих у § 2. 4. 1. већ се дају и размаци у којима не може бити ниједа нула. Fejér-ов резултат пак за распоред ових нула показује само да у размацима $[(k-1/2)\pi/(n+1), k\pi/(n+1)]$ мора лежати најмање једна нула од $s(\theta, n)$, и не показује да у размацима $[k\pi/(n+1), (k+1/2)\pi/(n+1)]$ уопште нема нула.

Доња граница размака (III, 27) може се померити надесно, тј. цео размак сузити, пошто је $z(\theta)$ у десној половини круга K_0, тако да је онда $\Theta(\theta)\leqslant\pi/2-\theta/4$ и размаци се сужавају у

$$\frac{k-1/2}{n+3/4}\pi\leqslant\theta_k\leqslant\frac{k}{n+1}\pi, \qquad k=1, 2, \ldots n.$$

Најзад и овде, аналого § 2. 4. 2., могу се ови размаци и даље сужавати ако се води рачуна о односима између коефицијената $b_{n+\nu+1}$.

3. 5. Нека је најзад низ коефицијената a_ν троструко монотон, тј. нека задовољава поред услова (III, 6′) § 3. 1. и услов

$$\Delta^3 a_\nu=a_\nu-3a_{\nu+1}+3a_{\nu+2}+a_{\nu+3}\geqslant 0, \qquad \nu=1, 2, \ldots \qquad \text{(III, 28)}$$

Показаћемо, примера ради, овај став [1]:

Ако су коефицијенти a_ν тригонометриског реда

$$c(\theta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\cos(2\nu-1)\theta$$

троструко монотони, тј. ако задовољавају услове (III, 2) и (III, 28), *тада је он позитиван у* $0<\theta<\pi/2$.

Да бисмо добили нешто општији став (сличан оном за синусни ред у § 3. 3. 2.), пођимо од

$$c(r, \theta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu r^\nu\cos(2\nu-1)\theta, \quad r<1.$$

Користећи идентитет

$$\frac{\cos(2\nu-1)\theta}{\cos\theta} = \mp 1 \pm \cos 2\theta \mp \cos 4\theta \pm \cdots \pm \cos 2\nu\theta,$$

где горњи знаци одговарају за ν парно, а доњи за непарно, добивамо

$$\frac{c(r,\theta)}{2\cos\theta} = A_0/2 + A_1\cos 2\theta + A_2\cos 4\theta + \cdots,$$

где је

$$A_\nu = \sum_{k=\nu}^{\infty}(-1)^{k-1}\, a_k\, r^k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{III, 29}$$

Да би $c(r,\theta)/2\cos\theta$ као косинусни ред према ставу из одељка 3. 2. био позитиван за $0 < 2\theta < \pi$, тј. за $0 < \theta < \pi/2$, потребно је да буде

$$A_\nu - 2A_{\nu+1} + A_{\nu+2} \geqslant 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ако A_ν изразимо са (III, 29) добићемо као услов да су збирови непарних и парних трећих диференција позитивни, тј.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\Delta^3 a_{2\nu-1}\, r^{2\nu-1} \geqslant 0, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\Delta^3 a_{2\nu}\, r^{2\nu} \geqslant 0.$$

Аво сада пустимо да $r \to 1$, то из чињенице да $c(r,\theta) \to c(\theta)$ и да ова последња гранична функција $c(\theta)$ постоји, она је тада као гранична функција позитивних функција исто тако у $(0,\pi/2)$ позитивна. За позитивитет од $c(\theta)$ довољно је, дакле,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\Delta^3 a_{2\nu-1} \geqslant 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\Delta^3 a_{2\nu} \geqslant 0.$$

Специјално $c(\theta) \geqslant 0$ у $(0, \pi/2)$ ако је

$$\Delta^3 a_\nu \geqslant 0, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

3. 5. 1. Ако претпоставимо да су коефицијенти $b_{n+\nu+1}$. $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ синусног реда

$$s(\theta, n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1}\sin(n+\nu+1)\theta \tag{III, 30}$$

троструко монотони са $b_{n+\nu+1} \to 0$ када $\nu \to \infty$, тада се размаци његових нула, датих у § 3. 4., могу још сузити. Да бисмо добили у том случају Fejér-ове размаке

$$\frac{k-1/2}{n+1}\pi, \quad \frac{k}{n+1}\pi, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{III, 31}$$

треба према поступку наведеном у § 3. 4. одредити границе у којима лежи аргумент од

$$z(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1}\, e^{\nu\theta i}.$$

Можемо лако показати да је горња граница од

$$\Theta(\theta)=\arg z(\theta)=\pi/2-\theta/2.$$

Заиста, ако се стави

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\geqslant\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1}\sin\nu\theta}{\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1}\cos\nu\theta}=\operatorname{tg}\Theta(\theta),$$

то због $\Sigma b_{n+\nu+1}\cos\nu\theta\geqslant 0$ добивамо из ове неједначине да треба да буде

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu+1}\cos\frac{2\nu-1}{2}\theta\geqslant 0,$$

што је увек случај, према претходном одељку, ако су $b_{n+\nu+1}$ троструко монотони. Дакле,

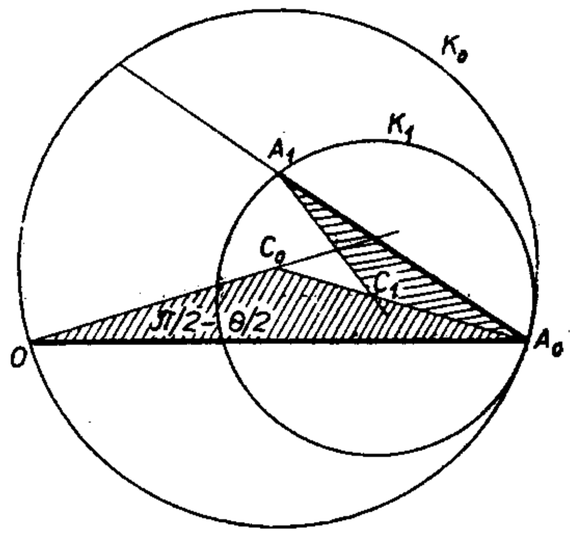
$$0<\Theta(\theta)<\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2},$$

а одатле следе, према наведеном поступку у § 3. 4. размаци (III, 31).

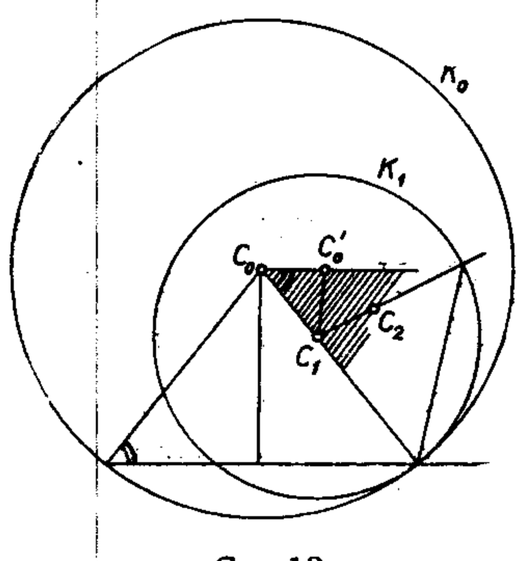
3. 6. Као што смо у уводу (§ 1. 1.) навели, овај поступак прецизира и област у којој се налази збир

$$s(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, e^{\nu\theta i}$$

под условом да коефицијенти a_ν задовољавају услове вишеструке монотоније. Наведимо два примера у том правцу. Из § 3. 5. знамо,



Сл. 12



Сл. 13

на пример, да под условом троструке монотоније од a_ν, аргумент од $s(\theta)$ налази се између 0 и $\pi/2-\theta/2$, дакле, $s(\theta)$ лежи у углу

$C_0 O A_0$ (в. сл. 12). Како $s(\theta) - a_0$ из истих разлога лежи у углу $C_0 A_0 A_1$, то отуда већ добивамо за $\pi/2 < \theta < \pi$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cos \nu\theta \right| < a_0,$$

ако су a_ν троструко монотони. Ако претпоставимо да су a_ν четвороструко монотони, тада је низ страна θ-спирале центара $C_0, C_1, \ldots$ троструко монотон. Применимо сада на овај низ страна $\overline{C_0C_1}\ \overline{C_1C_2}, \ldots$ претходно резоновање, па ћемо добити да $s(\theta)$ лежи у углу $C_0' C_0 C_1$. Како је $C_0 C_0' \perp \overline{OA}_0$ (в. § 1.5.), то $s(\theta)$ лежи испод праве $C_0 C_0'$ (в. сл. 13). Специјално, у овом случају вреди ова неједначина

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu\theta \leqslant \frac{a_1}{2} \operatorname{cotg} \theta/2,$$

која је двапут прецизнија од уобичајене за случај просто монотоних коефицијената a_ν, где, као што је познато, на десној страни стоји $a_1 \sin \theta/2$.

IV. Примена на Taylor-ове редове са вишеструко монотоним коефицијентима

4.1. У више радова Fejér и Szegő [8], [7], [1], посматрали су остатке

$$R_n(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu z^\nu, \quad n = 0, 1, 2 \ldots, \tag{IV, 1}$$

Taylor-овог реда

$$R_0(z) = f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu, \tag{IV, 2}$$

као и његове редуковане остатке, тј. изразе

$$r_n(z) = z^{-n} R_n(z), \tag{IV, 3}$$

под претпоставком да коефицијенти c_n задовољавају услове вишеструке монотоније и где је $\lim c_n = 0$, $n \to \infty$.

Ти су ставови најпре били дати за специјалне функције [6], [20]. У низу уопштења ставова ове врсте, као крајњу генерализацију Fejér и Szegő [8] дали су овај став:

Ако су коефицијенти Taylor-овог реда (IV, 2) *двоструко монотони и ако је задовољен услов*

$$\lim c_n = 0, \quad n \to \infty,$$

тада низ апсолутних вредности остатака (IV, 1), *као и низ њихових редукованих остатака* (IV, 3) *не расте, тј.*

$$|R_0(z)| \geqslant |R_1(z)| \geqslant |R_2(z)| \geqslant \cdots, \tag{I}$$

односно

$$|r_0(z)| \geqslant |r_1(z)| \geqslant |r_2(z)| \geqslant \cdots, \qquad \text{(II)}$$

и то за сваку вредност од z која се налази у или на кругу $|z|=1$, *осим за тачку* $z=1$.

Очевидно из овог става следи и неједначина

$$|R_0(z)| = |f(z)| \geqslant |R_{n+1}(z)| = |f(z) - (c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n)|,$$

тј.

$$|c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n| \leqslant 2|f(z)|. \qquad \text{(IV, 4)}$$

Неједначину (II) изводе Fejér и Szegő из неједначине (I) применом Schwarz-ове lemme која, као што је познато, гласи: *Ако је функција* $F(z)$ *регуларна у кругу* $|z|=1$, *тада из*

$$|F(z)| \leqslant M \quad за \quad |z| < 1 \quad и \quad F(0) = 0$$

следи

$$|F(z)| \leqslant M|z|, \quad за \quad |z| < 1$$

и где једнакост долази само ако је

$$F(z) = M e^{\alpha i} z.$$

Узимајући у овој lemme-и за $F(z)$ количник

$$\frac{R_\nu(z)}{R_{\nu-1}(z)}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

из (I), тј. из

$$|R_\nu(z)| \leqslant |R_{\nu-1}(z)|$$

следи

$$|R_\nu(z)| \leqslant |z \cdot R_{\nu-1}(z)|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

тј. (II). Треба, дакле, да покажемо (I) за збирове облика

$$\rho_n(\theta) = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu e^{\nu\theta i},$$

јер се ови збирови за $a_\nu = c_\nu r^\nu$ своде на (IV, 1). Довољно је показати само прву неједначину, тј.

$$|\rho_0(\theta)| \geqslant |\rho_1(\theta)|. \qquad \text{(IV, 5)}$$

Остале се добивају применом овог резултата на $\rho_n(\theta)$. Њен доказ, међутим, непосредно следи из θ-спирале. Заиста како су коефицијенти од ρ_0 двоструко монотони, то $\rho_0(\theta)$ лежи у $K_0' \ldots$, дакле, десно од тангенте у C_0 на круг K_0' (в. сл. 5), па је зато

$$\overline{O\rho_0} \geqslant \overline{\rho_0 s_0},$$

што даје неједначину (IV, 5).

Ако претпоставимо да су коефицијенти c_ν троструко монотони, добићемо даља уопштења неједначине (II). Пошто у овом случају $f(z)$ лежи десно од $C_0'\tau'$, то је

$$\overline{C_0 f(z)} \geqslant \overline{C_1 f(z)} \geqslant \overline{C_2 f(z)} \geqslant \cdots .$$

Ако ову неједначину изразимо преко θ-спирале $C_0 C_1 C_2 \ldots$, добивамо

$$|r_0(z) - r_1(z)| \geqslant |r_1(z) - r_2(z)| \geqslant \cdots . \qquad \text{(III)}$$

4. 1. 1. Ако претпоставимо да су c_ν вишеструко монотони, добићемо низ неједначина сличних са (III). Специјално, ако је c_ν четвороструко монотоно, може се добити неједначина

$$|r_{n-1}(z)| - 2|r_n(z)| + |r_{n+1}(z)| \geqslant 0 . \qquad \text{(IV)}$$

За доказ ове неједначине изведимо најпре овај помоћни став из комплексних бројева: *Ако су за три комплексна броја r_0, r_1 и r_2 реални и имагинарни делови монотони и конвексни, тада су им и модули монотони и конвексни.*

Означимо

$$\alpha_i = \mathbf{Re}(r_i), \quad \beta_i = \mathbf{Im}(r_i), \qquad i = 0, 1, 2,$$

и нека је

$$\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2, \quad \beta_0 \geqslant \beta_1 \geqslant \beta_2, \qquad \text{(IV, 6)}$$

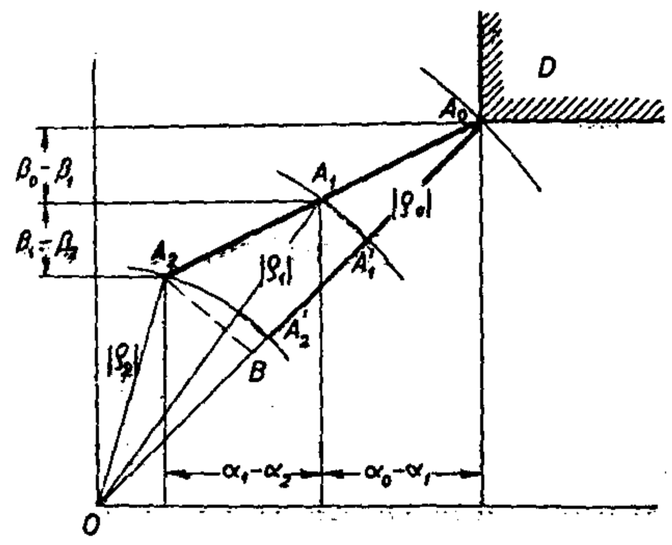
$$\alpha_0 - \alpha_1 \geqslant \alpha_1 - \alpha_2, \quad \beta_0 - \beta_1 \geqslant \beta_1 - \beta_2 .$$

Модули су сигурно монотони због (IV, 6). Ако је

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \quad \text{и} \quad \beta_0 - \beta_1 = \beta_1 - \beta_2 ,$$

тада се r_0, r_1 и r_2 налазе на једној правој (в. сл. 14), па је

$$|r_0| - 2|r_1| + |r_2| \geqq 0 .$$



Сл. 14

Ако је било

$$\alpha_0 - \alpha_1 > \alpha_1 - \alpha_2 ,$$

или

$$\beta_0 - \beta_1 > \beta_1 - \beta_2 ,$$

или оба заједно, то r_0 пада у осенчену област D (в. сл. 14), па r_0 a fortiori расте и зато је

$$|r_0| - 2|r_1| + |r_2| > 0 .$$

Да бисмо отуда извели неједначину (IV), приметимо да се, на пример,

$$\beta_0 - \beta_1 > \beta_1 - \beta_2$$

своди на

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu - 2\,c_{\nu+1} + c_{\nu+2})\sin\nu\theta \geqslant 0, \qquad \text{(IV, 7)}$$

пошто је

$$\beta_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \sin\nu\theta\,, \qquad \beta_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu+1}\sin\nu\theta\,, \quad \beta_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu+2}\sin\nu\theta.$$

Ако са α_0, α_1 и α_2 означимо одговарајуће косинусне редове, као што смо то напред навели, то слична неједначина са (IV, 7) следи према § 3. 2.

4. 2. Према § 4. 1. (IV, 4) следи из

$$0<\rho<1 \quad \text{и} \quad |z|\leqslant 1, \quad z\neq 1$$

и

$$\frac{1}{(1-z)^\rho} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots$$

да је

$$|\gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_n z^n| < \frac{H}{|1-z|^\rho}, \quad n = 0, 1, 2\ldots,$$

где H зависи само од ρ. На исти начин у овом биномном реду за $\rho > 1$ Szegő [24] је добио да је

$$|\gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_n z^n| < \frac{Hn^{\rho-1}}{|1-z|^\rho}, \quad n = 0, 1, 2\ldots$$

Аутор наглашава да му није пошло за руком да нађе општи став еквивалентан оном из 4. 1. у случају да коефицијенти γ_ν монотоно расту, а као што је то случај у наведеном специјалном примеру биномног реда са $\rho > 1$. У том правцу наведимо овај резултат:

Ако коефицијенти Taylor-овог реда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$$

монотоно расту и ако је поред тога низ c_n такав да постоји један цео број $k \geqslant 1$ такав да низ разлика коефицијената c_n, тј.

$$\delta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu \binom{k}{\nu} c_{n-\nu}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где је

$$c_{-k} = c_{-k+1} = \cdots = c_{-2} = c_{-1} = 0,$$

образује један опадајући низ, тј.

$$\delta_n^{(k)} > \delta_n^{(k+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

тада је

$$|c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n| < H c_n |f(z)|$$

за све

$$n = 1, 2, \ldots, \quad |z| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad z \neq 1.$$

Нека је, најпре, $z = e^{\vartheta i}$. Тада је

$$s_n(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n = e^{n\vartheta i}(c_n + c_{n-1} e^{-\vartheta i} + \cdots + c_0 e^{-n\vartheta i}). \quad \text{(IV, 8)}$$

Ставимо

$$\theta = -\vartheta, \; a_\nu = c_{n-\nu}, \; \nu = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

тада ће тачка

$$s_n = a_0 + a_1 e^{\vartheta i} + \cdots + a_n e^{n\theta i} = c_n + c_{n-1} e^{-\vartheta i} + \cdots + c_0 e^{-n\vartheta i}$$

бити у кругу K_0 чији је полупречник

$$r_0 = \frac{a_0}{2 \sin \theta/2} = \frac{c_n}{2 \sin \theta/2}.$$

Према томе је

$$|s_n| \leqslant 2 r_0,$$

односно због (IV, 8) биће

$$|c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n| \leqslant \frac{c_n}{\sin \theta/2} \leqslant \frac{2 c_n}{|1 - z|} \quad \text{са} \quad z = e^{\theta i}. \qquad \text{(IV, 9)}$$

Ова неједначина која је у ствари

$$|(1 - z) s_n(z)| \leqslant 2 c_n,$$

вреди за $z = e^{\theta i}$ и према познатом Cauchy-јевом ставу вреди и за све z круга $|z| \leqslant 1$. Ако њу помножимо са

$$|(1 - z)^{k-1} f(z)|,$$

она постаје

$$|(1 - z)^k f(z)|\,|s_n(z)| \leqslant 2 c_n |1 - z|^{k-1} |f(z)|. \qquad \text{(IV, 10)}$$

Пошто је

$$|1 - z|^{k-1} \leqslant 2^{k-1} \quad \text{за} \quad |z| \leqslant 1,$$

а у изразу

$$(1 - z)^k f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu^{(k)} z^\nu,$$

коефицијенти монотоно опадају, то по теореми Kakeya-Enestrom [28], постоји једно $m > 0$ такво да је

$$|(1-z)^k f(z)| > m \quad \text{за све} \quad |z| \leqslant 1.$$

И из (IV, 10) следи

$$|s_n(z)| < \frac{2^k}{m} c_n |f(z)|, \quad |z| \leqslant 1, \quad z \neq 1,$$

што даје наведени став, где је $H = 2^k/m$.

Наведени пример биномног реда са $\rho > 1$ садржан је у овом ставу. Из (IV, 9) следи

$$s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu z^\nu \leqslant \frac{2\gamma_n}{|1-z|} = \frac{2\gamma_n}{|1-z|^\rho} |1-z|^{\rho-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^\rho \gamma_n}{|1-z|^\rho} \leqslant \frac{(1+\varepsilon_n) 2^\rho}{\Gamma(\rho)} \cdot \frac{n^{\rho-1}}{|1-z|^\rho}, \quad \varepsilon_n > 0,$$

пошто је $\gamma_n \sim n^{\rho-1}/\Gamma(\rho)$, $n \to \infty$.

4. 3. Наведимо, најзад, да се многи од ових резултата могу проширити и на Taylor-ове редове чији коефицијенти задовољавају општије услове. У том правцу наведимо овај резултат.

Нека су, на пример, коефицијенти c_ν Taylor-овог реда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \qquad \text{(IV, 11)}$$

такви да је $c_\nu = \rho^\nu \exp(\lambda_\nu i)$, $\lambda_0 = 0$, где ρ_ν чини један монотон низ, а низ аргумената λ_ν задовољава услове

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \lambda_\nu - \lambda_{\nu-1} < \theta_1 < \pi, \\ &\lambda_\nu - 2\lambda_{\nu-1} + \lambda_{\nu-2} \geqslant 0, \qquad \nu = 3, 4 \ldots \qquad \text{(IV, 12)} \\ &\lambda_\nu - 3\lambda_{\nu-1} + 3\lambda_{\nu-2} + \lambda_{\nu-3} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Пођимо од интерпретације дате у § 1. 4. Taylor-ов ред (IV, 11) је облика

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \rho_\nu \exp[(\nu\theta + \lambda_\nu) i].$$

Да би овом збиру, према § 1. 4., могли да асоцирамо низ кругова $K_0, K_1, \ldots$ потребно је да су задовољени, на пример, услови (I, 12). Како је овде

$$\begin{aligned} \gamma_{\nu+2} &= [(\nu+1)\theta + \lambda_{\nu+1}] - [\nu\theta + \lambda_\nu] \\ &= \theta + \lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \text{(IV, 13)} \end{aligned}$$

то ће ти услови бити задовољени ако, на пример, за φ_1 узмемо

$$\theta + \lambda_1 - \lambda_2 \leqslant \varphi_1 \leqslant \theta + \lambda_1,$$

јер је тада, према (IV, 13),

$$\gamma_2 = \theta + \lambda_1,$$
$$\gamma_3 = \theta + \lambda_2 - \lambda_1,$$
$$\gamma_\nu = \theta + \lambda_{\nu-1} - \lambda_{\nu-2},$$

тако да је

$$\gamma_\nu - 2\gamma_{\nu+1} + \gamma_{\nu+2} = \lambda_{\nu-1} - 3\lambda_{\nu-2} + 3\lambda_{\nu-3} + \lambda_{\nu-4}, \quad \nu = 4, 5, \ldots$$

Према (I, 12), због услова (IV, 12), постоји систем кругова $K_0, K_1, \ldots$ ако је још $\gamma_\nu < \pi$, што се овде, због прве и друге неједначине (IV, 12), своди на $0 < \theta < \pi - \theta_1$, тако да добивамо овај резултат:

Taylor-ов ред (IV, 11), *где модули коефицијената* ρ_ν *образују један монотон нула-низ, а њихови аргументи су троструко монотони, тј. задовољавају* (IV, 12) *је униформно конвергентан и нема нула у размаку*

$$0 < \theta \leqslant \pi - \lim_{\nu \to \infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Fejér, L. — *1.* Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. — *Trans. Amer. Math. Soc.* **39**, № 1, стр. 18—59 (1936).

[2] Fejér, L. — *2.* Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten. — *Acta Lit. ac Scient.* Szeged, **2**, стр. 75—86 (1925).

[3] Fejér, L. — *3.* Einige Sätze, die sich auf das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen... — *Monatshefte für Math. und Phys.* **35**, стр. 305—344 (1928).

[4] Fejér L. — *4.* Über ein trigonometrisches Analogon eines Kakeyaschen Satzes. — *Jahresber. der deutschen Math. Ver.* **38** (1939).

[5] Fejér L. — *5.* Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel. — *Math. Zeit.* **24**, стр. 267—284 (1925).

[6] Fejér L. — *6.* Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome. — *Math Zeit.* **24**, стр. 285—298 (1925).

[7] Fejér, L. — *7.* Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge und ihre Legendre-Polynome. — *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **31**, стр. 307—316 (1936).

[8] Fejér, L. und Szegö, G. — Über die monotone Konvergenz von Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. — *Práce Mat. Fyz.*, стр. 15—25 (1935).

[9] Gronwall, T. H. — Über die Gibssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen. — *Math. Ann.* **72**, стр. 228—243 (1912).

[10] Hausdorff, F. — Momentprobleme für ein endliches Intervall. — *Math. Zeit.* **16**, стр. 220—248 (1923).

[11] Jackson, D. — Über eine trigonometrische Summe. — *Rend. Circ. Math. Palermo*, **32** (1911).

[12] Jacobsthal, E. — Mittelwertsbildung und Reihentransformation. — *Math. Zeit.* **6**, стр. 110—117 (1920).

[13] Kaluza, Th. — Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen — *Math. Zeit.* **28**, стр. 161—170 (1928).

[14] Knopp, K. — Mehrfach monotone Zahlenfolgen. — *Math. Zeit.* **22**, стр. 75—85 (1925).

[15] Karamata, J. et Tomić, M. — *1.* Considérations géométriques relatives aux polynomes et séries trigonométriques. — *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe des sciences* **2**, стр. 155—175 (1948).

[16] Karamata, J. et Tomić, M. — *2.* Sur l'inégalité de Kusmin-Landau relative aux sommes trigonométriques et son application à la somme de Gauss. — *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe des sciences* **3**, стр. 207—218 (1950).

[17] Landau, E. — Über eine trigonometrische Ungleichung. — *Math. Zeit.* **35**, стр. 36 (1933).

[18] Polya, G. — Über die Nullstellen gewisser ganzen Funktionen. — *Math. Zeit* **2**, стр. 352—383 (1918).

[19] Popken, J. — Über eine trigonometrische Summe. — *Konigklike Akademie Van Wet. te Amsterdam* **35** (5), стр. 3—15 (1932).

[20] Riesez, M. — Sur la sommation des séries de Fourier. — *Acta. Lit. ac Scient.* Szeged., **1**, стр. 104—113 (1923).

[21] Rogosinski, — Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten. — *Math. Zeit.* **17**, стр. 260—276 (1923).

[22] Rogosinski, W. und Szegö, G. — Über die Abschnitte der Potenzreihen, die in einem Kreise beschränkt bleiben. — *Math. Zeit.* **28**, стр. 73—94 (1928).

[23] Szász, O. — Über Potenzreihen, die im Einheitskreise beschränkte Funktionen darstellen. — *Math. Zeit.* **8**, стр. 222—236 (1920).

[24] Szegö, G. — *1.* Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome. — *Math. Zeit.* **25**, стр. 172—187 (1926).

[25] Szegö, G. — *2.* Inequalities for the zeros of Legendre Polynomials and related functions. — *Trans. Amer. Math. Soc.* **39**, стр. 1—17 (1936).

[26] Szegö, G. — *3.* Zur Theorie der Legendreschen Polynome. — *Jahresber. deutscher Math. Ver.* **40**, стр. 163—166 (1931).

[27] Ssegö, G. — *4.* Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein. — *Schriften der Königsberger Gelehr. Gesell., naturwiss. Klasse* **4**, стр. 59—70 (1928).

[28] Tomić, M. — *1.* Généralisations et démonstrations géométriques de certains théorèmes de Fejér et Kakeya. — *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe des sciences* **2**, стр. 146—156 (1948).

[29] Tomić, M. — *2.* Einige Sätze über die Positivität der trigonometrischen Polynome. — *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe des sciences* **4** (у штампи).

SUR LES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES À COEFFICIENTS MONOTONES

par M. Tomić (Beograd)

L'auteur donne un exposé des résultats cités sous [15], [16], [28], [29], ainsi que de certains résultats nouveaux. Tous ces résultats découlent d'un même principe géométrique simple, à savoir: Étant

donnée une ligne polygonale (v. fig. 1), à chaque côté de cette dernière on associe un cercle K_n, dont le centre C_n se trouve à gauche de cette ligne (au sens de A_{n-1} vers A_n), et duquel on voit ce côté sous l'angle γ_n $(0 \leqslant \gamma_n \leqslant \pi)$. Le rayon du cercle K_n est déterminé par la circonstance que ce dernier doit contenir un nouveau cercle, k_n'', dont le centre c_n'' se trouve sur la bissectrice du côté $\overline{A_{n-1}A_n}$, au point d'où l'on voit ce côté, sous l'angle Γ_n $(2\pi \geqslant \Gamma_n \geqslant \gamma_n)$. *On cherche alors les conditions pour qu'on ait* $K_n \supseteq K_{n+1}$.

Dans le cas particulier où $\Gamma_n = \Gamma_{n+1}$, on s'est servi de ce principe géométrique simple pour démontrer les théorèmes de la note [16]. Ici on donne les résultats semblables à ceux de la note [15]. À titre d'exemple citons en quelques uns.

a) On obtient d'une manière générale les intervalles de Fejér [1] dans lesquels se trouvent les zéros des séries trigonométriques de la forme (II, 11). En particulier, sous les conditions $b_{n+1} < b_{n+2}$ $(b_{n+1} \neq b_{n+2})$, les coefficients b_{n+i} étant simplement monotones, on obtient les intervalles séparés (II, 16) qui contiennent les zéros de ces séries, et en dehors desquels il n'existent point de zéros (§ 2. 4. 2.).

b) La série trigonométrique $\Sigma a_\nu \sin \nu\theta$ dont les coefficients sont simplement monotones avec $a_n = O(1/n)$ est uniformément bornée dans $0 \leqslant \theta \leqslant \varepsilon$ (§ 2. 3.).

c) On tire la positivité du polynôme de Fejér $\Sigma(\sin \nu\theta)/\nu$ (§ 3. 3. 1.), ainsi que de celui de Rogosinski - Szegő $\Sigma \cos \nu\theta/(\nu_{+1})$ (§ 3. 2. 2.), en même temps que la possibilité d'une extension de ces résultats.

d) Si les coefficients a_ν sont quatre-fois monotones on a, par exemple,

$$\Sigma\, a_\nu \sin \nu\theta \leqslant \frac{a_1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}, \quad (\S\ 9.\ 6.).$$

e) De $\Delta^k c_\nu \geqslant 0$, $k = 0, 1, 2, 3$ résulte l'inégalité III (§ 4. 1.), où r_n est donné par (IV, 3).

f) Si les coefficients c_ν de la série de Taylor $\Sigma c_\nu e^{\nu\theta i}$, avec $c_\nu = \rho_\nu e^{\lambda_\nu i}$, satisfont aux conditions $\rho_\nu \leqslant \rho_{\nu+1}$ et (IV, 12), on obtient les résultats semblables à ceux relatifs aux séries trigonométriques à coefficients positifs et monotones; par exemple: cette série est uniformément convergente dans l'intervalle

$$0 < \theta \leqslant \pi - \lim_{\nu \to 8} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}),$$

et n'y a point de zéros (§ 4. 3.).