Зборник радова Математичког института. Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l' Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

NEIZOTERMNO STRUJANJE ZAGREJANE TEČNOSTI

Mane Šašić

Uvod

Zagrejana tečnost odaje toplotu okolini za vreme strujanja i zbog toga joj temperatura opada nizvodno. Viskoznost joj se povećava u smeru strujanja i koeficijent trenja nije više konstantan duž cevovoda. Određivanje pada pritiska usled trenja veoma je složeno, naročito kad se radi o turbulentnom strujanju pri niskim temperaturama okoline. Literatura nudi obrasce za izračunavanje pada pritiska usled trenja pri promenljivoj temperaturi tečnosti, ali samo za ona strujanja kod kojih koeficijent trenja zavisi jedino od Reynolds-ovog broja. To su laminarna strujanja i turbulentna strujanja u hidraulički glatkim cevima. Za neizotermna turbulentna strujanja, kod kojih koeficijent trenja zavisi i od Re broja i od relativne hrapavosti cevovoda (oblast iznad prave koja u dijagramu λ-Re označava Blasius-o zakon trenja), ili samo od relativne hrapavosti cevovoda (oblast izrazito turbulentnog strujanja), postojeća literatura ne daje obrasce za određivanje pada pritiska usled trenja čak ni u najprostijim slučajevima kad se može uzeti da je proračunska temperatura okoline jednaka nuli. Cilj ovog rada je da se prouče baš ovi poslednji slučajevi neizotermnih strujanja zagrejane tečnosti.

Pomoćne veličine

Izjednačenjem količine toplote koju zagrejana tečnost predaje cevovodu za vreme strujanja i one koja istovremeno prolazi kroz cevovod na okolinu, dobija se zakon promene temperature tečnosti duž cevovoda

$$t = t_a + (t_1 - t_a)\, e^{-ax}; \quad ax = \frac{kD_m \pi x}{G c_n}. \tag{1}$$

Ovde je t_a (°C) temperatura okoline, t_1 (°C) srednja temperatura tečnosti u početnom poprečnom preseku cevovoda, k (J/m^2 sK) koeficijent prolaza toplote kroz cevovod, D_m (m) njegov srednji prečnik, G (kg/s) maseni protok tečnosti i c_n (J/kg K) njena specifična toplota. Za $x=l$ iz obrazsca (1) dobija se $t=t_2$, temperatura tečnosti na kraju cevovoda. Pod srednjom temperaturom tečnosti duž cevovoda podrazumevaće se vrednost

$$t_m = \frac{1}{l}\int_0^l t\, dx = t_a + (t_1 - t_a)\frac{1-e^{-al}}{al}. \tag{2}$$

Promena kinematičke viskoznosti tečnosti od njene temperature prikazuje se u obliku

$$\nu = c/t^m \tag{3}$$

U njemu se konstante c i m određuju merenjem viskoznosti na dvema temperaturama koje treba da budu između temperatura t_1 i t_2. Takođe se korišćenjem toplotnog bilansa i obrasca (3) može doći do odnosa kinematičkih viskoznosti ν_z u blizini zida cevovoda i njene srednje vrednosti ν u odgovarajućem poprečnom preseku cevovoda

$$\frac{\nu_z}{\nu}=\left(\frac{t}{t_z}\right)^m\approx\left(\frac{\alpha_i D_i}{\alpha_i D_i-kD_m}\right)^m. \tag{4}$$

Ovde je α_i (J/m^{2}sK) koeficijent prelaza toplote sa tečnosti na cevovod i D_i (m) unutrašnji prečnik cevovoda.

Postavka i rešenje problema.

Diferencijalna jednačina koja određuje pad pritiska usled trenja za vreme strujanja zagrejane tečnosti u cevovodu kružnog preseka glasi

$$-dp=\frac{\lambda\rho v^2}{2D_i}\left(\frac{\nu_z}{\nu}\right)^b dx=\frac{8\rho\lambda q^2}{\pi^2 D_i^5}\left(\frac{\nu_z}{\nu}\right)^b dx. \tag{5}$$

U ovoj jednačini je ρ (kg/m^3) gustina tečnosti na srednjoj temperaturi (2), λ koeficijent trenja, v(m/s) srednja brzina strujanja, q (m^3/s) zapreminski protok, $0{,}14>b>$ $>0{,}10$ koeficijent koji uzima u obzir deformaciju profila brzine zbog promenljive temperature (veće vrednosti odgovaraju strujanjima kod kojih λ zavisi i od Re broja i od relativne hrapavosti cevovoda, a manje vrednosti strujanjima kod kojih λ uglavnom zavisi od relativne hrapavosti cevovoda). Može se kao srednja vrednost uzimati $b=0{,}12$.

Za posmatrane oblasti turbulentnog strujanja, najprihvatljiviji obrazac za koeficijent trenja je obrazac Altšula

$$\lambda=0{,}1\left(\frac{1{,}46\,\delta}{D_i}+\frac{100}{Re}\right)^{0{,}25}, \tag{6}$$

u kome je δ apsolutna hrapavost cevovoda (ona je kod ovih strujanja uvek veća od debljine graničnog sloja). Vidi se da obrazac (6) prelazi u obrazac Blasius-a kad $\delta\to 0$ (tj. kad debljina graničnog sloja postane veća od apsolutne hrapavosti), koji važi za hidraulički glatke cevi. Prema [1] može se u pogonskim uslovima uzeti da je

$$\frac{t_a}{t}=\frac{1}{2}\left(\frac{t_a}{t_1}+\frac{t_a}{t_2}\right)=\text{const.}=B, \tag{7}$$

pa se iz (1) dobija odnos temperatura [2]

$$\frac{t_1}{t}=B+(1-B)\,e^{ax}, \tag{8}$$

i, zatim, iz (3) vrednost viskoznosti na temperaturama t i t_1

$$\nu=\nu_1\,[B+(1-B)\,e^{ax}]^m. \tag{9}$$

Najzad, kad se u Re broju viskoznost ν zameni izrazom (9), iz (6) sleduje

$$\lambda=0{,}1\,\{k_1+k_2\,[B+(1-B)\,e^{ax}]^m\}^{0{,}25}, \tag{10}$$

gde su

$$k_1=\frac{1{,}46\,\delta}{D_i};\quad k_2=\frac{25\,D_i\,\pi\nu_1}{q}. \tag{11}$$

Zamenom (4) i (10) u diferencijalnu jednačinu (5), dobija se posleintegriranja

$$\Delta p = \frac{0{,}8\,\rho\,q^2}{\pi^2 D_i^5}\left(\frac{\alpha_i D_i}{\alpha_i D_i - kD_m}\right)^{mb} \cdot J, \tag{12}$$

gde je vrednost integrala

$$J = \int_0^l \{k_1 + k_2\,[B + (1-B)\,e^{ax}]^m\}^{0{,}25}\,dx. \tag{13}$$

Tačno rešenje integrala (13) može da se dobije samo kad je $B=0$ tj. kad se može uzeti da je proračunska temperatura okoline jednaka nuli ($t_a=0°C$). U tom slučaju je (sa oznakom: $k_1/k_2=c_0$)

$$J = \frac{4\,k_2^{0{,}25}}{ma}\Bigg\{(c_0 + e^{mal})^{0{,}25} - (c_0+1)^{0{,}25} + \frac{c_0^{0{,}25}}{4}\ln\frac{(c_0+e^{mal})^{0{,}25} - c_0^{0{,}25}}{(c_0+e^{mal})^{0{,}25} + c_0^{0{,}25}}\,\frac{(c_0+1)^{0{,}25}+c_0^{0{,}25}}{(c_0+1)^{0{,}25}+c_0^{0{,}25}} - \frac{c_0^{0{,}25}}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{c_0+e^{mal}}{c_0}\right)^{0{,}25} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{c_0+1}{c_0}\right)^{0{,}25}\right]\Bigg\}. \tag{14}$$

Nije teško pokazati da je

$$\lim_{k_1\to 0} J = k_2^{0{,}25}\,\frac{e^{0{,}25\,mal}-1}{0{,}25\,ma},$$

i da obrazac (12) zajedno sa (13) tada prelazi u poznati obrazac [3] koji određuje pad pritiska usled trenja za vreme neizotermnog strujanja zagrejane tečnosti u hidraulički glatkim cevima (Blasius-ov zakon trenja)

$$\Delta p = 0{,}241\,\frac{\rho\nu_1^{0{,}25}\,q^{1{,}75}\,l}{D_i^{4{,}75}}\left(\frac{\alpha_i D_i}{\alpha_i D_i - kD_m}\right)^{mb}\frac{e^{0{,}25\,mal}-1}{0{,}25\,mal},$$

u kome je $b=\frac{1}{7}\approx 0{,}14$. Kad je $B\neq 0$ tj. kad se mora uzeti u proračunima $t_a\neq 0°C$ (a to su, ustvari, i češći slučajevi u praksi), tada se može naći samo približno ali dovoljno tačno rešenje integrala (13). Postupak je sledeći. Najpre se pomoću smene $y=\ln[B+(1-B)\,e^{ax}]$, integral (13) svede na sledeći oblik

$$J = \sum_{n=0}^{s}\frac{B^n}{a}\int_{y_1}^{y_2}(k_1 + k_2\,e^{my})^{0{,}25}\,e^{-ny}\,dy, \tag{15}$$

u kome su granice $y_1=0$; $y_2=\ln[B+(1-B)\,e^{al}]$.
Ponovnom smenom $c_0+e^{my}=z^4$, se integral (15) svodi na

$$J = \frac{4\,k_2^{0{,}25}}{a}\sum_{n=0}^{s}\frac{B^n}{m-4n}\left\{\frac{z_2}{[B+(1-B)\,e^{al}]^n} - z_1 - c_0\int_{z_1}^{z_2}(z^4-c_0)^{-\frac{m+n}{m}}\,dz\right\}, \tag{16}$$

sa ovim granicama

$$z_1 = (c_0+1)^{0{,}25};\quad z_2 = \{c_0 + [B+(1-B)\,e^{al}]^m\}^{0{,}25}. \tag{17}$$

Naime, preostali integral u izrazu (17) može da se reši u konačnom obliku samo za $n=0$. To je prvi član zbira na desnoj strani izraza (16) i on glasi

$$J_0=\frac{4\,k_2^{0,25}}{ma}\left\{(z_2-z_1)+\frac{c_0^{0,25}}{4}\ln\frac{z_1+c_0^{0,25}}{z_1-c_0^{0,25}}\cdot\frac{z_2-c_0^{0,25}}{z_2+c_0^{0,25}}-\right.$$

$$\left.-\frac{c_0^{0,25}}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{z_2^4}{c_0}\right)^{0,25}-\operatorname{arctg}\left(\frac{z_1^4}{c_0}\right)^{0,25}\right]\right\}. \tag{18}$$

Za $n=1, 2, \ldots, s$ može da se napiše samo približna vrednost preostalog integrala u izrazu (16), tako da se konačno dobija

$$J=J_0+\frac{4\,k_2^{0,25}}{a}\sum_{n=1}^{s}\frac{B^n}{m-4\,n}\left\{\frac{z_2}{[B+(1-B)\,e^{at}]^n}-z_1-\right.$$

$$\left.-c_0\frac{z_2-z_1}{6}\left[(z_1^4-c_0)^{-\frac{m+n}{m}}+(z_m^4-c_0)^{-\frac{m+n}{m}}+(z_2^4-c_0)^{-\frac{m+n}{m}}\right]\right\}, \tag{19}$$

gde je $z_m=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$. Očigledno je da je $J=J_0$ kad je $B=0$ ($t_a=0°C$) i da tada J_0 definisano izrazom (18) prelazi u (14). Dalja analiza izraza(19) pokazuje da je svaki sledeći integral J_n ($n=1, 2, \ldots, s$) posle J_0 oko 10 puta manji od prethodnog jer je $|B|<1$. Primena obrasca (19) kao sastavnog dela rešenja (12) pokazuje da je greška manja od 2% kad se uzme $J=J_0+J_1$ umesto, na primer, $J=J_0+J_1+J_2+J_3$. Ovde treba još napomenuti da će uvek biti $|B|<1$ (a ovo je potreban uslov) kad god je $|t_a|<t_1$ i $|t_a|<t_2$. Da bi rešenje (12) sa integralom (19) važilo i kad je $|B|>1$ treba umesto izraza (3) i (7) koristiti sledeće izraze za viskoznost i temperaturu

$$\nu=C_1/T^{m_1},\qquad \frac{T_a}{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{T_a}{T_1}+\frac{T_a}{T_2}\right)=\text{const.}=B_1.$$

Ovde su: $T=273+t$ i $Ta=273+t_a$. Razume se, u ovom slučaju u integralu (19) svuda treba staviti m_1 umesto m i B_1 umesto B. Sigurno je da će sad biti $]B_1]<1$, što je dovoljan uslov da izraz (19) ima sva svojstva kao i u prethodnom slučaju.

Literatura

[1] Яблонский В. С., и др., *Проектирование, эксплуатация и ремонт нефтепродуктопроводов*. „Недра" Москва 1965.

[2] Šašić, M., *Određivanje pada pritiska usled trenja pri neizotermnom laminarnom strujanju zagrejane tečnosti*, Hidraulika i pneumatika №. **10**, 1970.

[3] Vušković, I., *Transport cevima*. Skriptarnica saveza studenata Mašinskog fakulteta. Beograd 1965.

NONISOTHERMAL FLOW OF HEATED LIQUID

Summary

Taking into consideration the influence of temperature on the viscosity and the friction coefficient of liquids during nonisothermal flow in pipes, the correlation between the parameters at the beginning and at the end of flow stream is obtained for turbulent flow regime. It is possible to determine, from this correlation, the flow parameters at the beginning of pipeline if their values at the end of pipeline were known or vice versa.

Prof. Dr Mane Šašić, Mašinski fakultet, 11000 Beograd