Зборник радова Математичкоi институтa, Нова серија, књ. 4 (12) 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

O ODREĐIVANJU FREKVENCIJA GLAVNIH OBLIKA OSCILOVANJA ELASTIČNIH SISTEMA SA KONAČNIM BROJEM STEPENI SLOBODE METODOM SUKCESIVNIH APROKSIMACIJA

Ljubodrag Radosavljević

Uvod. Metoda sukcesivnih aproksimacija za određivanje frekvencija glavnih oblika oscilovanja za tzv. sisteme sa koncentrisanim masama, tj. za sisteme čija aproksimativna funkcija za kinetičku energiju sadrži samo kvadrate generalisanih brzina, izložena je, osim na drugim mestima, i u knjizi S. P. Timoshenko-a i D. H. Young-a [1]. Metoda potiče od L. Vianello-a [2], koji ju je upotrebio za određivanje kritičnih tereta za podupirače. Njena primena za sračunavanje frekvencija pri torzionim oscilacijama vratila opširno je izložena u knjizi C. B. Biezeno-a i R. Grammel-a [3].

U ovom radu autor je uopštio primenu ove metode na bilokoje oscilatorne sisteme, tj. i na sisteme čija aproksimativna funkcija za kinetičku energiju nije kanonskog oblika, odnosno koja pored kvadrata generalisanih brzina, sad drži i članove koji se množe proizvodom generalisanih brzina $\dot{q}_j \dot{q}_k (j, k=1, 2, \ldots, s)$, gde je s broj stepeni slobode sistema.

Iz rezultata dobijenih u ovom radu, kao poseban slučaj, dobijaju se svi rezultati za sisteme sa koncentrisanim masama.

Osnovne jednačine elastostatike i elastodinamike. Neka se elastični sistem nalazi u ravnoteži pod dejstvom spoljašnjih i unutrašnjih sila. Neka je položaj ravnoteže sistema određen generalisanim koordinatama: $q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_s$, koje su različite od nule, i koje su male veličine. Generalisane spoljašnje sile obeležimo sa: $Q_1^s\ Q_2^s, \ldots, Q_j^s, \ldots, Q_s^s$.

Osnovne jednačine elastostatike direktnog oblika glase

$$Q_j^s = \sum_{k=1}^{s} c_{jk} q_k, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{1}$$

ili

$$\{Q_j^s\} = \|c_{jk}\| \{q_j\}, \qquad (j, k=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{1'}$$

gde je: $\{Q_j^s\}$ — matrica kolona generalisanih spoljašnjih sila,
$\|c_{jk}\|$ — simetrična kvadratna matrica koeficijenata krutosti, i
$\{q_j\}$ — matrica kolona generalisanih koordinata.

Osnovne jednačine elastostatike inverznog oblika glase

$$q_j = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{jk} Q_k^s, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{2}$$

ili

$$\{q_j\} = \|\alpha_{jk}\| \{Q_j^s\}, \qquad (j, k=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{2'}$$

gde je $\|\alpha_{jk}\|$ — simetrična kvadratna matrica uticajnih koeficijenata.

Osnovne jednačine elastostatike (1) i (1'), odnosno (2) i (2'), prelaze u osnovne jednačine elastodinamike ako spoljašnje sile zamenimo inercijalnim silama.

Obeležimo generalisane inercijalne sile sa: $Q_1^{in}, Q_2^{in}, \ldots, Q_j^{in}, \ldots, Q_s^{in}$.

Osnovne jednačine elastodinamike direktnog oblika glase

$$Q_j^{in} = \sum_{k=1}^{s} c_{jk} q_k, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{3}$$

ili

$$\{Q_j^{in}\} = \|c_{jk}\| \{q_j\}, \qquad (j, k=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{3'}$$

gde je $\{Q_j^{in}\}$ — matrica kolona generalisanih inercijalnih sila.

Osnovne jednačine elastodinamike inverznog oblika glase

$$q_j = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{jk} Q_k^{in}, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{4}$$

ili

$$\{q_j\} = \|\alpha_{jk}\| \{Q_j^{in}\}. \qquad (j, k=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{4'}$$

Za slučaj malih oscilacija sistema generalisane inercijalne sile jednake su

$$Q_j^{in} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} = -\sum_{k=1}^{s} a_{jk} \ddot{q}_k, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{5}$$

gde je: E_k — aproksimativna funkcija za kinetičku energiju sistema, a a_{jk} $(j, k= =1, 2, \ldots, s)$ koeficijenti inercije sistema koji poseduju svojstvo simetrije.

Kada se (5) smeni u (3) i (3'), odnosno u (4) i (4'), dobijaju se diferencijalne jednačine malih oscilacija sistema najpre direktnog oblika

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{6}$$

ili

$$\|a_{jk}\| \{\ddot{q}_j\} + \|c_{jk}\| \{q_j\} = \{0\}, \qquad (j, k=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{6'}$$

gde je: $\|a_{jk}\|$ — simetrična kvadratna matrica koeficijenata inercije sistema, a $\{\ddot{q}_j\}$ — matrica kolona generalisanih ubrzanja, a zatim inverznog oblika

$$q_j + \sum_{k=1}^{s} e_{jk}\ddot{q}_k = 0, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{7}$$

ili

$$\{q_j\} + \| e_{jk} \| \{\ddot{q}_j\} = \{0\}, \tag{7'}$$

gde je sa $\|e_{jk}\|$ obeležena sledeća nesimetrična kvadratna matrica

$$\|e_{jk}\| = \|\alpha_{jk}\| \, \|a_{jk}\|, \qquad (j, k = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{8}$$

čiji su elementi jednaki

$$e_{jr} = \sum_{r=1}^{s} \alpha_{jr}\, a_{rk}. \qquad (j, k = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{9}$$

Određivanje frekvencije prvog glavnog oblika oscilovanja. Neka se pri oscilovanju sistema generalisane koordinate menjaju saglasno zakonima

$$q_j = A_j \cos(\omega t - \alpha), \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{10}$$

gde su: A_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ i ω dve klase nepoznatih konstanti.

Kako je

$$\ddot{q}_j = -A_j\, \omega^2 \cos(\omega t - \alpha), \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{11}$$

kada (10) i (11) smenimo u (7) u razvijenom obliku dobiće se

$$\begin{aligned}
A_1 &= \omega^2 (e_{11} A_1 + e_{12} A_2 + e_{13} A_3 + \cdots + e_{1s} A_s) \\
A_2 &= \omega^2 (e_{21} A_1 + e_{22} A_2 + e_{23} A_3 + \cdots + e_{2s} A_s) \\
&\text{— — — — — — — — — — — —} \\
A_j &= \omega^2 (e_{j1} A_1 + e_{j2} A_2 + e_{j3} A_3 + \cdots + e_{js} A) \\
&\text{— — — — — — — — — — — —} \\
A_s &= \omega^2 (e_{s1} A_1 + e_{s2} A_2 + e_{s3} A_3 + \cdots + e_{ss} A_s).
\end{aligned} \tag{12}$$

Kada bi se izjednačila sa nulom eliminanta sistema jednačina (12) dobila bi se frekventna jednačina za oscilovanje razmatranog sistema iz koje bi se mogle potpuno tačno odrediti frekvencije svih glavnih oblika oscilovanja razmatranog sistema.

Međutim, za približno određivanje ovih frekvencija nećemo izvoditi frekventnu jednačinu, niti ćemo je rešavati, već ćemo direktno raditi sa sistemom jednačina (12), koji će poslužiti kao bazični sistem jednačina za razvijanje ove metode.

U sistemu jednačina (12) postoje dve klase nepoznatih, i to: klasa nepoznatih ω^2 i klasa nepoznatih: $A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_s$. Kako je pokazano i dokazano u [3], za sisteme sa koncentrisanim masama, mogućno je iz sistema jednačina (12), postupkom koji je u daljem izložen, odrediti najpre najmanju vrednost za nepoznatu ω^2, a zatim i sve ostale — do najveće vrednosti.

Korišćenjem jednačina (12) odredimo najpre približno frekvenciju najnižeg (osnovnog) oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji, kao i krivu prvog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji.

Pretpostavimo oblik krive prvog glavnog oblika oscilovanja. Neka je ona određena nizom pretpostavljenih vrednosti

$$(A_1)_0^{(1)},\ (A_2)_0^{(1)},\ (A_3)_0^{(1)}, \dots,\ (A_s)_0^{(1)}. \tag{13}$$

Ako pretpostavljene vrednosti (13) smenimo u desne strane jednačina (12) dobićemo prve aproksimacije za amplitudna pomeranja pri prvom glavnom obliku oscilovanja: $(A_1)_1^{(1)}$, $(A_2)_1^{(1)}, \dots, (A_j)_1^{(1)}, \dots, (A_s)_1^{(1)}$, odnosno niz vrednosti koje određuju krivu prvog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji

$$(A_j)_0^{(1)} \approx \omega_1^2 \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_0^{(1)}. \qquad (j=1, 2, 3, \dots, s) \tag{14}$$

Ako najpre za najgrublje aproksimiranje pretpostavimo da je kriva prvog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji približno jednaka pretpostavljenoj krivoj prvog glavnog oblika oscilovanja, odnosno ako pretpostavimo da je

$$(A_j)_1^{(1)} \approx (A_j)_0^{(1)}, \qquad (j=1, 2, 3, \dots, s) \tag{15}$$

onda jednačine (14) prelaze u

$$(A_j)_0^{(1)} \approx \omega_{1j}^2 \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_0^{(1)}. \qquad (j=1, 2, 3, \dots, s) \tag{16}$$

Iz jednačina (16) dobićemo onoliko različitih prvih aproksimacija za ω_1^2 koliki je broj jednačina (16), odnosno koliki je broj stepeni slobode kretanja sistema. Iz jednačina (16) sledi da je j različitih vrednosti za ω_1^2 u prvoj aproksimaciji određeno izrazima

$$(\omega_{1j}^2)_1 = \frac{(A_j)_0^{(1)}}{\sum\limits_{k=1}^{s} e_{jk} (A)_0^{(1)}}. \qquad (j=1, 2, 3, \dots, s) \tag{17}$$

Sve tako dobivene aproksimacije za $(\omega_{1j}^2)_1$, biće više ili manje različite, i da bismo dobili bolju aproksimaciju, treba izvršiti njihovo osrednjavanje, tj. treba odrediti njihovu prosečnu (srednju) vrednost.

U tom cilju pomnožimo svaku od jednačina (16) sa $(A_j)_1^{(1)} (j=1, 2, \dots, s)$ respektivno.

Kada saberemo sve tako dobivene jednačine biće

$$\sum_{j=1}^{s} (A_j)_0^{(1)} (A_j)_1^{(1)} \approx (\overline{\omega_1^2})_1 \sum_{j=1}^{s} (A_j)_1^{(1)} \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_0^{(1)}, \tag{18}$$

gde je sa $(\overline{\omega_1^2})_1$ obeležena srednja (prosečna) vrednost frekvencije prvog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji. Iz (18) dobija se

$$(\overline{\omega_1^2})_1 = \frac{\sum_{j=1}^{s} (A_j)_0^1 (A_j)_1^{(1)}}{\sum_{j=1}^{s} (A_j)_1^{(1)} \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_0^{(1)}}. \tag{19}$$

Ako u jednačinama (14) umesto ω^2 smenimo vrednost za $(\overline{\omega_1^2})_1$, određenu izrazom (19) izračunaćemo niz vrednosti

$$(A_1)_1^{(1)},\ (A_2)_1^{(1)},\ (A_3)_1^{(1)}, \ldots, (A_s)_1^{(1)}, \tag{20}$$

koje određuju krivu prvog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji. Time bi svi računi koji se odnose na prvi glavni oblik oscilovanja u prvoj aproksimaciji bili završeni.

Ako se želi veća tačnost, odnosno ako je potrebno da se izračuna druga aproksimacija za ω_1^2 onda se čitav ciklus izvršenih računa ponavlja, s tom razlikom što se računi ne započinju pretpostavljenim vrednostima (13) za krivu prvog glavnog oblika oscilovanja, već izračunatim vrednostima (20) za krivu prvog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji. Sada bi se računi započeli jednačinama

$$(A_j)_2^{(1)} = \omega_1^2 \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_1^{(1)}, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, s). \tag{21}$$

Niz vrednosti (21) za $(A_j)_2^{(1)}$ određuje krivu prvog oblika oscilovanja u drugoj aproksimaciji.

Istim postupkom kao u predhodnoj prvoj aproksimaciji mogu se odrediti kako j različitih vrednosti za ω_1^2 u drugoj aproksimaciji, tako i osrednjena vrednost za ω_1^2 u drugoj aproksimaciji. Ove vrednosti su određene izrazima

$$(\omega_{1j}^2)_2 = \frac{(A_j)_1^{(1)}}{\sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_1^{(1)}}, \qquad (\overline{\omega_1^2})_2 = \frac{\sum_{j=1}^{s} (A_j)_1^{(1)} (A_j)_2^{(1)}}{\sum_{j=1}^{s} (A_j)_2^{(1)} \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_1^{(1)}}. \tag{22}$$

$$(j = 1, 2, 3, \ldots, s)$$

Kada se u jednačine (21) umesto ω_1^2 smeni vrednost za $(\overline{\omega_1^2})_2$ određena drugim od izraza (22) dobiće se niz vrednosti

$$(A_1)_2^{(1)},\ (A_2)_2^{(1)},\ (A_3)_2^{(1)}, \ldots, (A_s)_2^{(1)} \tag{23}$$

koje određuju krivu prvog glavnog oblika oscilovanja u drugoj aproksimaciji. Time bi svi računi koji se odnose na prvi glavni oblik oscilovanja u drugoj aproksimaciji bili završeni.

Kada je to potrebno, ponavljajući izloženi postupak navedenim redosledom, može se odrediti frekvencija prvog glavnog oblika oscilovanja, a takođe i kriva prvog glavnog oblika oscilovanja, u daljoj trećoj, četvrtoj, petoj, ... aproksimaciji.

Određivanje frekvencija viših glavnih oblika oscilovanja. Neka je kriva drugog glavnog oblika oscilovanja određena sledećim nizom pretpostavljenih vrednosti

$$(A_1)_0^{(2)},\ (A_2)_0^{(2)},\ (A_3)_0^{(2)}, \ldots,\ (A_s)_0^{(2)}. \tag{24}$$

Efikasnost metode sukcesivnih aproksimacija za približno određivanje frekvencija viših oblika oscilovanja zavisi od stepena tačnosti pretpostavljene krive nekog višeg glavnog oblika oscilovanja sa kojom se započinju računi pri odgovarajućem višem glavnom obliku oscilovanja. Ove krive viših oblika oscilovanja biće utoliko bolje pretpostavljene ukoliko budu manje sadržale u sebi krive svih nižih oblika oscilovanja.

Za drugi glavni oblik oscilovanja to znači da niz vrednosti (24) treba osloboditi učešća krive prvog glavnog oblika oscilovanja, tako da će onda pretpostavljena korigovana kriva drugog glavnog oblika oscilovanja biti određena nizom vrednosti

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}_1)_0^{(2)} &= (A_1)_0^{(2)} - c_1 A_1^{(1)} \\
(\tilde{A}_2)_0^{(2)} &= (A_2)_0^{(2)} - c_1 A_2^{(1)} \\
&\text{— — — — — —} \\
(\tilde{A}_s)_0^{(2)} &= (A_s)_0^{(2)} - c_1 A_s^{(1)}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Slično tome, ako krivu trećeg glavnog oblika oscilovanja pretpostavimo nizom vrednosti

$$(A_1)_0^{(3)},\ (A_2)_0^{(3)},\ (A_3)_0^{(3)}, \ldots,\ (A_s)_0^{(s)}, \tag{26}$$

onda nju treba osloboditi učešća krivih prvog i drugog glavnog oblika oscilovanja. Tako će pretpostavljena korigovana kriva trećeg glavnog oblika oscilovanja biti određena nizom vrednosti

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}_1)_0^{(3)} &= (A_1)_0^{(3)} - c_1 A_1^{(1)} - c_2 A_1^{(2)} \\
(\tilde{A}^2)_0^{(3)} &= (A_2)_0^{(3)} - c_1 A_2^{(1)} - c_2 A_2^{(2)} \\
&\text{— — — — — — — —} \\
(\tilde{A}_s)_0^{(3)} &= (A_s)_0^{(3)} - c_1 A_s^{(1)} - c_2 A_s^{(2)}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Slično ovome bi se postupilo i za sve ostale više oblike oscilovanja: četvrti peti, šesti, ...

Brojevi: c_1, c_2, c_3, ... koji određuju učešće krivih nižih oblika oscilovanja u pretpostavljenim korigovanim krivama viših oblika oscilovanja mogu se odrediti na sledeći način.

Bilo koja geometrijska konfiguracija sistema može se razložiti po glavnim oblicima oscilacija sistema. Ako je ta geometrijska konfiguracija pri nekom višem glavnom obliku oscilovanja određena nizom vrednosti

$$(A_1)_0^{(p)},\ (A_2)_0^{(p)},\ (A_3)_0^{(p)}, \ldots,\ (A_s)_0^{(p)}, \tag{28}$$

gde je $p=2, 3, 4, 5, \ldots s$, onda možemo pisati

$$
\begin{aligned}
(A_1)_0^{(p)} &= c_1 A_1^{(1)} + c_2 A_1^{(2)} + c_3 A_1^{(3)} + \cdots \\
(A_2)_0^{(p)} &= c_1 A_2^{(1)} + c_2 A_2^{(2)} + c_3 A_2^{(s)} + \cdots \\
&- - - - - - - - - - \\
(A_s)_0^{(p)} &= c_1 A_s^{(1)} + c_2 A_s^{(2)} + c_3 A_s^{(3)} + \cdots
\end{aligned}
\tag{29}
$$

U diferencijalnim jednačinama malih oscilacija sistema (6) i (6′), odnosno (7) i (7′) geometrijska konfiguracija sistema bila je određena skupom generalisanih koordinata: $q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_s$. Neka sada geometriska konfiguracija sistema bude određena novim skupom generalisanih koordinata: $p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots, p_s$, koji je sa prethodnim skupom generalisanih koordinata vezan linearnom transformacijom oblika

$$
\begin{aligned}
p_1 &= q_1 + k_{12} q_2 + k_{13} q_3 + \cdots + k_{1s} q_s \\
p_2 &= \qquad\quad q_2 + k_{23} q_3 + \cdots + k_{2s} q_s \\
&- - - - - - - - - - \\
p_s &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad q_s .
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Sada će se aproksimativna funkcija za kinetičku energiju sistema svesti na kanonski oblik [4], tj. sadržaće samo kvadrate generalisanih brzina

$$
E_k \approx \frac{1}{2}(a_1 \dot{p}_1^2 + a_2 \dot{p}_2^2 + \cdots + a_s \dot{p}_s^2) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s} a_j \dot{p}_j^2,
\tag{31}
$$

gde su a_j $(j=1, 2, \ldots, s)$ novi koeficijenti inercije sistema.

Iz (30) proizlazi da je

$$
\begin{aligned}
q_1 &= p_1 + k'_{12} p_2 + k'_{13} p_3 + \cdots + k'_{1s} p_s \\
q_2 &= \qquad\quad p_2 + k'_{23} p_3 + \cdots + k'_{2s} p_s \\
&- - - - - - - - - - \\
q_s &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p_s .
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Korišćenjem veza (32) umesto starih koeficijenata krutosti c_{jk} $(j, k=1, 2, \ldots, \ldots, s)$ možemo sračunati nove koeficijente krutosti r_{jk} $(j, k=1, 2, \ldots, s)$.

Prelaskom na nove generalisane koordinate diferencijalne jednačine malih oscilacija sistema (6) i (6′) preći će u

$$
a_{jj} \ddot{p}_j + \sum_{k=1}^{s} r_{jk} q_k = 0, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s)
\tag{33}
$$

ili

$$
\| a_{jj} \| \{\ddot{p}_j\} + \| r_{jk} \| \{p_j\} = \{0\},
\tag{33'}
$$

gde je: $\|a_{jj}\|$ — dijagonalna matrica novih koeficijenata inercije, a $\|r_{jk}\|$ — kvadratna matrica novih koeficijenata krutosti.

Ako bismo najpre u jednačine (29) stavili $p=2$, i ako bismo zatim svaku od ovih jednačina pomnožili respektivno sa $a_j A_j^{(1)}$, pa ako bismo zatim u jednačine (29) stavili $p=3$, i ako bismo potom svaku od tih jednačina pomnožili respektivno sa $a_j A_j^{(2)}$, koristeći pri tom i uslov ortogonalnosti glavnih oblika oscilacija po kome

$$\sum_{j=1}^{s} a_j A_j^{(p)} A_j^{(q)} = 0 \quad \text{za} \quad p \neq q, \tag{34}$$

posle relativno prostih računa dobili bismo da je

$$c_1 = \frac{\sum_{j=1}^{s} a_j (A_j)_0^{(2)} A_j^{(1)}}{\sum_{j=1}^{s} a_j [A_j^{(1)}]^2}, \qquad c_2 = \frac{\sum_{j=1}^{s} a_j (A_j)_0^{(3)} A_j^{(2)}}{\sum_{j=1}^{s} a_j [A_j^{(2)}]^2}.$$

Na sličan način mogu se izračunati i svi ostali brojevi: $c_3, c_4, c_5, \ldots$.

Primetimo da se brojevi c_1, c_2, određeni izrazima (35), mogu sračunavati u prvoj, drugoj, trećoj, ... aproksimaciji u zavisnosti od toga da li smo u izraze (35) za $A_j^{(1)}$ i $A_j^{(2)}$ $(j=1, 2, \ldots, s)$ smenili njihove vrednosti u prvoj, drugoj, trećoj .... aproksimaciji.

Kriva drugog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji biće određena nizom vrednosti

$$(A_j)_1^{(2)} = \omega_2^2 \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (\tilde{A}_k)_1^{(2)}, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{36}$$

pri čemu su u desne strane jednačina (36) za krivu drugog glavnog oblika oscilovanja smenjene vrednosti $(\tilde{A}_j)_1^{(2)}$ $(j=1, 2, \ldots, s)$, koje određuju pretpostavljenu korigovanu krivu drugog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji.

Čitav postupak dalje teče istim redosledom kao i pri određivanju frekvencije prvog (osnovnog) glavnog oblika oscilovanja.

Tako će j različitih vrednosti za ω_2^2 u prvoj aproksimaciji, i osrednjena (prosečna) vrednost za ω_2^2 u prvoj aproksimaciji biti određene izrazima

$$(\omega_{2j}^2)_1 \approx \frac{(\tilde{A}_j)_1^{(2)}}{\sum_{j=1}^{s} e_{jk} (\tilde{A})_1^{(2)}}, \qquad (\overline{\omega_2^2})_1 \approx \frac{\sum_{j=1}^{s} (\tilde{A}_j)_1^{(2)} (A_j)_1^{(2)}}{\sum_{j=1}^{s} (A_j)_1^{(2)} \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (\tilde{A}_k)_1^{(2)}}.$$

$$(j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{37}$$

Na sličan način kao i pri određivanju frekvencije prvog glavnog oblika oscilovanja, mogu se izračunati odgovarajuće vrednosti za frekvenciju drugog glavnog oblika oscilovanja ω_2^2 i u drugoj aproksimaciji, a potom, ako je to potrebno, i u daljoj trećoj, četvrtoj, ... aproksimaciji.

Određivanje frekvencije najvišeg glavnog oblika oscilovanja. Ako diferencijalne jednačine malih oscilacija sistema (6') pomnožimo s leva inverznom matricom koeficijenata inercije $\|a_{jk}\|^{-1}$, ove će jednačine preći u

$$\ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{s} h_{jk} q_k = 0, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{38}$$

ili

$$\{\ddot{q}_j\} + \|h_{jk}\| \{q_k\} = \{0\}, \qquad (j, k = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{38'}$$

gde je

$$\|h_{jk}\| = \|a_{jk}\|^{-1} \|c_{jk}\|, \tag{39}$$

nesimetrična kvadratna matrica novih koeficijenata krutosti.

Ako inverznu matricu koeficijenata inercije sistema obeležimo sa

$$\|\beta_{jk}\| = \|a_{jk}\|^{-1}, \tag{40}$$

onda su elementi nesimetrične kvadratne matrice (39) jednaki

$$h_{jr} = \sum_{r=1}^{s} \beta_{jr} c_{rk}, \qquad (j, k = 1, 2, 3, \ldots, s). \tag{42}$$

Jednačine slične jednačinama (12) imaće sada oblik

$$A_1 = \frac{1}{\omega^2}(h_{11} A_1 + h_{12} A_2 + h_{13} A_3 + \cdots + h_{1s} A_s)$$

$$A_2 = \frac{1}{\omega^2}(h_{21} A_1 + h_{22} A_2 + h_{23} A_3 + \cdots + h_{2s} A_s)$$

— — — — — — — — — — — — —

$$A_j = \frac{1}{\omega^2}(h_{j1} A_1 + h_{j2} A_2 + h_{j3} A_3 + \cdots + h_{js} A_s)$$

— — — — — — — — — — — — —

$$A_s = \frac{1}{\omega^2}(h_{s1} A_1 + h_{s2} A_2 + h_{s3} A_3 + \cdots + h_{ss} A_s). \tag{42}$$

Jednačine (42) po svojoj konstituciji slične su jednačinama (12), s tom razlikom što je u jednačinama (12) nepoznata bila ω^2, dok je ovde nepoznata $1/\omega^2$.

Ako se izložena metoda sukcesivnih aproksimacija za izračunavanje najniže osnovne frekvencije, koja je bila primenjena na bazični sistem jednačina (12), primeni sada na sistem jednačina (42) kao bazični sistem jednačina, onda se istim postupkom može izračunati sada najmanja vrednost za nepoznatu $1/\omega^2$, odnosno najveća vrednost za ω^2, tj. najviša frekvencija sistema ω_s^2.

Literatura

[1] Timoshenko S. P. — Young D. H., *Advanced Dynamics*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1948., pp. 297—306.

[2] Vianello L., Z. Ver. deut., Ing., vol. 42, 1898., p. 1436.

[3] Biezeno C. B. — Grammel R., *Technische Dynamik*, Berlin, 1939., pp. 155—163; 829—836.

[4] Бабаков И. М., *Теория колебании*, Москва, 1968., pp. 39—40.

ON DETERMINATION OF PRINCIPAL FREQUENCIES OF ELASTIC SYSTEMS WITH MANY DEGREES OF REEDOM BY A METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS

Summary

A well known method of successive approximations for obtaining principal frequencies of elastic systems with concertrated masses, i.e. of systems the approximative function of which for kinetic energy contains only squares of the generalized velocities has been generalized by the author in such a way as to be valid for any vibrating system, that is to hold also for those systems the approximative function of which for the system kinetic energy is not of a cannonic type, or in other words, the function that in addition to the squares of generalized velocities contains also products of various generalized velocities of the first order.

The results obtained in this paper yield, as a special case, all the results pertaining to the systems with concentrated masses.

prof. Dr. Ljubodrag Radosavljević, dipl. ing.,
11000 Beograd, 29 novembar 66/II
Yugoslavia