Зборник радова Математичкої института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

# TENZOR DEFORMACIJE U NEKIM RELATIVISTIČKIM METRIKAMA

*Dragi Radojević*

U ovom radu ispitivaćemo tenzor deformacije u Ajnštajnovom, Švarcšildovom i modifikovanom Desiterovom kosmološkom modelu. Tenzor deformacije definiše se kao [1]

$$\tau_{\alpha\beta}=h_{\alpha}^{\rho}h_{\beta}^{\varphi}\mathscr{L}_{\xi}g_{\rho\varphi}, \tag{1}$$

gde je $h_{\alpha}^{\rho}$ tenzor projektor, $g_{\alpha\beta}$ je metrički tenzor posmatranog prostora, $\xi_{\alpha}$ je jedinični vektor vremenskog tipa, a $\mathscr{L}_{\xi}$ označava Liov izvod. Pošto je $\xi_{\alpha}$ vektor vremenskog tipa možemo da izaberemo koordinatni sistem u kojem će $\xi_{\alpha}$ biti jedinični vektor vremenske ose.

Cilj ovog rada je da se utvrdi polje deformacije posmatrača koji se kreće radijalno. Stoga $\xi_{\alpha}$ ima sledeći oblik

$$\xi_{\alpha}=\{\xi_1,\ 0,\ 0,\ \xi_4\}.$$

Za koordinatne transformacije $x^{\alpha}\to\overline{x}^{\alpha}$ pretpostavićemo da su oblika

$$\begin{aligned}
\overline{x}^1&=\overline{r}=\psi(r,\ t)=\psi(x^1,\ x^4),\\
\overline{x}^2&=\overline{\theta}=\theta=x^2,\\
\overline{x}^3&=\overline{\varphi}=\varphi=x^3,\\
\overline{x}^4&=\overline{t}=t+\mu(r)=x^4+\mu(x^1).
\end{aligned} \tag{2}$$

Tada komponente vektora $\xi_{\alpha}$ mogu da se izraze kao

$$\begin{aligned}
\xi_1&=\frac{\dfrac{\partial\overline{t}}{\partial r}}{\sqrt{-g^{11}\left(\dfrac{\partial\overline{t}}{\partial r}\right)^2-g^{44}\left(\dfrac{\partial\overline{t}}{\partial t}\right)^2}}=\frac{\dot{\mu}}{\sqrt{-g^{11}\dot{\mu}^2-g^{44}}},\\
\xi_4&=\frac{\dfrac{\partial\overline{t}}{\partial t}}{\sqrt{-g^{11}\left(\dfrac{\partial\overline{t}}{\partial r}\right)^2-g^{44}\left(\dfrac{\partial\overline{t}}{\partial t}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{-g^{11}\dot{\mu}-g^{44}}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Novi sistem koordinata takođe je ortogonalan i važi

$$g^{\alpha\beta}\xi_\alpha \frac{\partial\psi}{\partial x^\beta}=0. \tag{4}$$

Četvorobrzina datog posmatrača imaće komponente

$$u_i=0, \quad u_4=1. \qquad (i=1,2,3)$$

Odredićemo prvo komponente tenzora $\tau_{\alpha\beta}$ iz definicije (1). (Metrike posmatranih modela su dijagonalne). Dobijamo sledeće komponente tenzora $\tau_{\alpha\beta}$ različite od nule

$$\begin{aligned}\tau_{11}&=2\frac{\partial\xi_1}{\partial x^1}-g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\xi_1,\\ \tau_{22}&=g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\xi_1,\\ \tau_{33}&=g^{11}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\xi_1.\end{aligned} \tag{5}$$

Mešovite komponente tenzora deformacije mogu da se izraze kao

$$\tau^\alpha_\beta=g^{\alpha\varphi}\tau_{\varphi\beta}. \tag{6}$$

Tenzor deformacije ispitivaćemo upravo u ovom obliku.

Posmatrajmo prvo tenzor deformacije u Ajnštajnovoj metrici koja može da se napiše kao [2]

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)-dt^2.$$

Komponente tenzora deformacije koje su različite od nule, izračunavaju se iz formula (5) i (6)

$$\begin{aligned}\tau^1_1&=2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\left[\frac{\partial\xi_1}{\partial r}-\frac{r\xi_1}{R^2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)}\right]\\ \tau^2_2&=\frac{2}{r}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\xi_1,\\ \tau^3_3&=\frac{2}{r}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\xi_1.\end{aligned}$$

Dobili smo da je $\tau^2_2=\tau^3_3$.

U ovom radu ispitaćemo samo slučaj kada je

$$\tau^2_2=\tau^3_3=E=\text{const}. \tag{7}$$

Iz tog uslova dobijamo jednačinu za određivanje funkcije $\mu$ koje se pojavljuje u transformacijama (2)

$$\dot{\mu}=\frac{E}{2}\frac{r}{\sqrt{\left(1-A\frac{r^2}{R^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)}},\qquad A=1-\frac{E^2R^2}{4}>0.$$

Rešenje ove jednačine glasi

$$\mu=\frac{-E^2R^2}{2\sqrt{A}}\ln\left\{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}+\sqrt{\frac{1}{A}-\frac{r^2}{R^2}}\right\}.$$

Ovo znači da postoje koordinatne transformacije koje obezbeđuju realizovanje uslova (7). Sada ima smisla računati i komponentu $\tau_1^1$

$$\tau_1^1=\frac{E}{1-\frac{r^2}{R^2}}.$$

Dobijamo da je i ta komponenta pozitivna. U Ajnštajnovoj metrici deformacija je pozitivna ali nije ista u svim pravcima.

Razmotrimo sada tenzor deformacije u Švarcšilodovoj metrici. Ova metrika može da se napiše u obliku [3]

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)-\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2.$$

U ovom slučaju dobijamo sledeće komponente tenzora deformacije koje su različite od nule, koristeći ponovo (5) i (6)

$$\tau_1^1=2\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left[\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{\frac{m}{r^2}\xi_1}{1-\frac{2m}{r}}\right],$$

$$\tau_2^2=\frac{2}{r}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\xi_1,$$

$$\tau_3^3=\frac{2}{r}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\xi_1.$$

I u ovom slučaju je $\tau_2^2=\tau_3^3$. Postavićemo ponovo uslov

$$\tau_2^2=\tau_3^3=S=\text{const.} \tag{8}$$

Ovaj uslov daje sledeću jednačinu za $\mu$

$$\dot{\mu}=\frac{r\sqrt{r}}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)\sqrt{r^3+\frac{4}{S^2}r-\frac{8m}{S^2}}}.$$

Rešenje ove jednačine izražava se preko eliptičkih funkcija. Međutim, mi ćemo ovde posvetiti pažnju oblasti koja se nalazi oko Švarcšilodovog »horizonta«, odnosno odredićemo približno rešenje pod uslovom da je

$$2m-\varepsilon<r<2m+\varepsilon,$$

gde je $\varepsilon$ mala veličina. U toj oblasti član $r^3$ je dominantan u izrazu pod korenom u imeniocu. Aproksimacija u kojoj ćemo zanemariti ostale članove dozvoljava pojednostavljenje i tako možemo da dobijemo

$$\dot{\mu}=\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}.$$

U oblasti neposredno ispod »horizonta«, gde je $r=2m-\varepsilon$ dobija se rešenje

$$\mu=r-2m+2m\,ln\,(2m-r).$$

Izvan singulariteta, iznad horizonta, gde je $r=2m+\varepsilon$ dobija se rešenje

$$\mu=r-2m+2m\,ln\,(r-2m).$$

Tim rešenjem zadovoljen je uslov (8). Komponenta $\tau_1^1$ dobija vrednost

$$\tau_1^1=S\frac{1-\frac{3m}{r}}{1-\frac{2m}{r}}.$$

U Švarcšilodovoj metrici deformacija je pozitivna u oblasti gde je $r\in(0,2m)\cup(3m,+\infty)$ a negativna kada $r\in(2m,3m)$.

Na kraju posmatrajmo tenzor deformacije i u modifikovanoj Desiterovoj metrici [4], koja može da se napiše u obliku

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)-\left(\frac{a+R\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{a+R}\right)^2dt^2.$$

Koristeći još jednom (5) i (6) dobijamo sledeće komponente tenzora deformacije koje su različite od nule

$$\tau_1^1=2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\left[\frac{\partial\xi_1}{\partial r}-\frac{r}{R^2}\frac{\xi_1}{1-\frac{r^2}{R^2}}\right],$$

$$\tau_2^2=\frac{2}{r}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\xi_1,$$

$$\tau_3^3=\frac{2}{r}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\xi_1.$$

I u ovoj metrici komponente $\tau_2^2$ i $\tau_3^3$ su jednake. Postupićemo kao i u prethodna dva primera. Postavićemo uslov.

$$\tau_2^2 = \tau_3^3 = k = \text{const.} \tag{9}$$

Jednačina koja određuje funkciju $\mu$ glasi

$$\dot{\mu} = \frac{k(a+R)r}{\left(a+R\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)\sqrt{\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\left[4\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)+k^2r^2\right]}}.$$

Iz te jednačine dobija se

$$\mu = \frac{-kR(a+R)}{\sqrt{A^2a^2+k^2R^4}} \ln \frac{A\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}+\sqrt{4\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)+k^2r^2}+\frac{Aa}{R}-\sqrt{\left(\frac{Aa}{R}\right)^2+(kR)^2}}{A\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}+\sqrt{4\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)+k^2r^2}+\frac{Aa}{R}-\sqrt{\left(\frac{Aa}{R}\right)^2+(kR)^2}},$$

$$A = \sqrt{4-k^2R^2}, \qquad 0 < kR < 2.$$

Tako smo dobili transformacije koje zadovoljavaju uslov (9). Sada možemo da odredimo i komponentu $\tau_1^1$

$$\tau_1^1 = \frac{k}{1-\frac{r^2}{R^2}}.$$

Komponenta $\tau_1^1$ je pozitivna. Deformacija je i u ovom slučaju pozitivna ali nije izotropna, odnosno nije ista u svim pravcima.

## Literatura


[1] Lukačević I., *On relative deformation and vorticity in relativistic kinematics*; Publ. Inst. Math. N. S. **19** (33), 1975.

[2] Tolman R. C., *Relativity, thermodynamics and cosmology*; Oxford; Clarendon Press, 1950.

[3] McVittie G. C., *General relativity and cosmology*; The University of Illinois Press, Urbana, 1965.

[4] Мальцев В. К. — Марков М. А., *К вопросу о сингулярности в модели Де Ситтера*; Труд. физ. инст. Лебедева, Т. **96**, 1977.


## LE TENSEUR DE DEFORMATION DANS CERTAINES METRIQUES RELATIVISTES

### Résumé


On considère ici le tenseur de déformation dans les métriques d'Einstein, de Schwarzschild et dans la métrique modifiée de De Sitter. Le tenseur de déformation

est défini par

$$\tau_{\alpha\beta} = h_\alpha^\rho h_\beta^\varphi \mathscr{L}_\xi g_{\rho\varphi},$$

ou $h_\alpha^\rho$ est le tenseur projecteur, $g_{\rho\varphi}$ est le tenseur métrique, $\xi_\alpha$ est le vecteur orienté dans le temps et $\mathscr{L}_\xi$ est la dérivation de Lie par rapport à $\xi_\alpha$.

On obtient, dans les métriques considerées, la déformation positive, mais pas isotrope, i. e. elle n'est pas égale dans toutes les directions.

Dragi Radojević,
Matematički Institut
Knez Mihailova 35
11000 Beograd