Зборник радова Математичкої института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

DINAMIČKA ANALIZA SISTEMA KRUTIH TELA POVEZANIH ZGLOBOVIMA I VISOKOELASTIČNIM VEZAMA PRIMENOM RAČUNARA

Dejan Popović

Uvod

Poslednjih godina velika pažnja se posvećuje numeričkoj analizi sistema krutih tela [1, 2, 3, 4]. Ova analiza je baza sinteze aktivnih mehanizama, tj. manipulatora namenjenih industrijskoj robotici i rehabilitaciji invalida (proteze i ortoze). Mnoge metode za računarsku simulaciju su razvijene i bazirane na metodama opštih teorema, Lagranževim jednačinama, Njutv-Ojlerovoj jednačini, Apelovoj jednačini, Hamiltonovim jednačinama [5, 6, 7]. Za sintezu ortoza za donje ekstremitete, bazirane na principima samopodešavanja i raspodeljenog prenosa sile sa spoljnog skeleta na čoveka [4], bilo je pogodno načiniti specifičan algoritam za računarsku simulaciju.

Mehanički model sistema koji je od interesa je dvostruki kinematički lanac povezan (sfernim) cilindričnim zglobovima, sa translacionim kinematičkim parovima pete klase koji su međusobno povezani visko-elastičnim vezama prvog reda (Sl. 1). Posebno je bilo pogodno da algoritam omogući računarsku analizu u slučaju kada je jedan lanac u delovima koji nisu povezani, osim visko-elastičnim vezama, i da uz ograničenja obuhvati i otvorene i zatvorene strukture. Ovaj mehanički model je nazvan biomehanizmom SFMO [4].

Dinamika biomehanizma SFMO

Jednačine kretanja svakog člana se mogu napisati primenom metoda opštih teorema, u slučaju ravnog kretanja

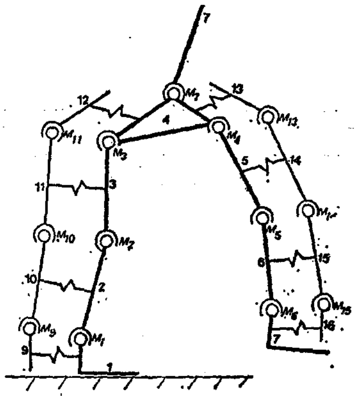
$$F_i = m_i \ddot{q}_i, \qquad Mc_i = Jc_i \ddot{\theta},$$

gde je $q = x, y, \theta$ je ugao u odnosu na x osu, u $x0y$ ravni, Jc moment inercije u odnosu na težišnu Cz osu, F_i zbir sila na član u pravcu q_i, T moment sprega u odnosu na težišnu Cz osu. U matričnom obliku za slobodan član je

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & & \underset{\sim}{O} \\ & m & \\ \underset{\sim}{O} & & J_C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{vmatrix} \Rightarrow |F| = |M| \, |\ddot{q}|.$$

U matričnom obliku za sistem n nepovezanih tela dobija se matrična jednačina reda $3n$

$$\begin{vmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1 & & \underset{\sim}{O} \\ & M_2 & \\ \underset{\sim}{O} & & M_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{q}_1 \\ \\ \ddot{q}_n \end{vmatrix} \Rightarrow |F| = |M| \, |\ddot{q}|. \tag{1}$$

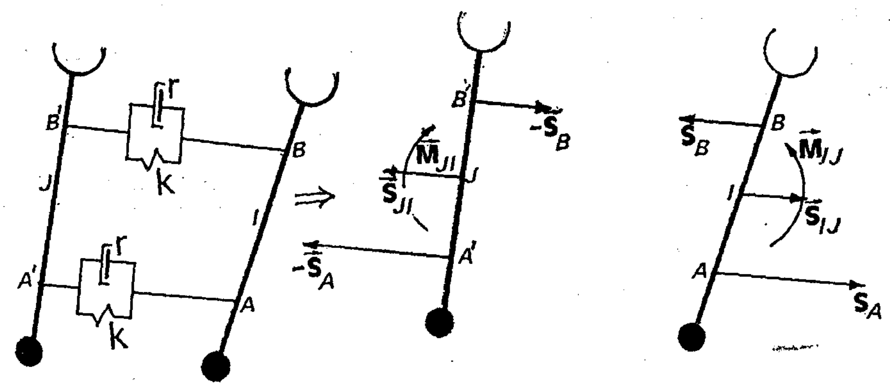


Sl. 1. Dvostruki kinematički lanac sa visoko-elastičnim vezama

U ovoj matričnoj jednačini vektor $|F|$ potiče od spoljnih sila i visko-elastičnih veza. Biće razmotreni članovi koji su posledica visko-elastičnih sila (Sl. 2). Ekvivalentno dejstvo se matematički izražava sa

$$\begin{vmatrix} X_{vEi} \\ Y_{vEi} \\ M_{vEi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & & \underset{\sim}{O} \\ & k_i & \\ \underset{\sim}{O} & & k_i' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_i & & \underset{\sim}{O} \\ & r_i & \\ \underset{\sim}{O} & & r_i' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{vmatrix} \Rightarrow |F_i| = |K| + |q| + |R| \, |\dot{q}|,$$

gde su k_i koeficijenti krutosti, a r_i koeficijenti prigušenja, $|K|$ odnosno $|R|$ matrice krutosti i prigušenja. Odgovarajuća jednačina postoji za član j sa negativnim znakom.



Sl. 2. Dekompozicija visoko-elastičnog para članova

Zamenjujući ove članove u jednačinu (1) dobija se

$$\begin{vmatrix} G_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ G_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & M_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{vmatrix} + \begin{array}{c} \quad i \qquad\quad j \\ \begin{vmatrix} K_i & \\ & -K_i \end{vmatrix} \end{array} \begin{vmatrix} \\ i \\ j \\ \\ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_n \end{vmatrix} + \begin{array}{c} \quad i \qquad\quad j \\ \begin{vmatrix} R_i & \\ & -R_i \end{vmatrix} \end{array} \begin{vmatrix} \\ i \\ j \\ \\ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{vmatrix}, \tag{2}$$

gde su matrice G_i posledica dejstva gravitacione sile, drugih spoljnih sila na član i momenta sprega koji deluje na član.

Konačno, činjenica da su pojedini članovi međusobno spregnuti cilindričnim zglobovima redukuje dimenzije sistema. Postojanje zglobova unosi ograničenja po položaju (geometrijska ograničenja). Postojanje svakog zgloba dovodi do smanjenja broja stepena slobode za dva.

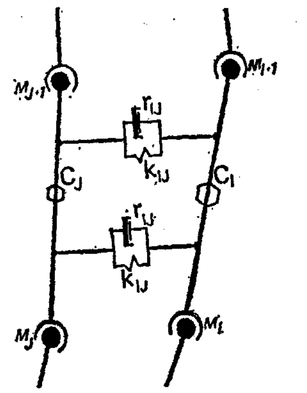
Ograničenja su oblika (Sl. 3)

$$\vec{rc}_i = \vec{rc}_j + lc_i \vec{r}_{oi} + dc_j \vec{r}_{oj}, \tag{3}$$

odnosno u sklarnom obliku

$$xc_j = xc_i + lc_i \cos\theta_i + dc_j \cos\theta_j,$$
$$yc_j = yc_i + lc_i \sin\theta_i + dc_j \sin\theta_j.$$

Ove geometrijske jednačine treba koristiti i da bi se unutrašnje sile, reakcije u zglobovima, eliminisale iz vektora $[G_1, \ldots, G_n]^T$. Ovom eliminacijom se sistem reda $3n$ redukuje na dimenzije $N \varepsilon]n, 3n]$ nepoznatih uglova tj. položaja. Postoji n uglova i $N-n$ koordinata centara mase. Iz jednačina treba eliminisati zavisna pomeranja.



Sl. 3. Susedni članovi kinematičkih lanaca spojeni cilindričnim zglobom

Prvo će biti prikazan algoritam za eliminaciju koordinata položaja u slučaju jednog neprekidnog lanca. Geometrijska ograničenja (3) se mogu prikazati u obliku

$$\begin{vmatrix} i & j \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ C_i & C_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vdots \\ L_i \\ D_j \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \Delta r_j \\ \vdots \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

gde su matrice

$$C_i = \begin{vmatrix} 1 & \underset{\sim}{0} \\ & 1 \\ \underset{\sim}{0} & 0 \end{vmatrix}, \qquad C_j = \begin{vmatrix} -1 & \underset{\sim}{0} \\ & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad L_i = \begin{vmatrix} l_i \cos\theta_i \\ \\ l_i \sin\theta_i \\ \theta_i \end{vmatrix},$$

$$D_j = \begin{vmatrix} d_j \cos\theta_j \\ d_j \sin\theta_j \\ \theta_j \end{vmatrix}, \qquad \Delta r_j = \begin{vmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \\ \theta_j \end{vmatrix},$$

Jednačina (4) se može napisati u obliku

$$|C|\,|q| + |\Delta r| = 0, \tag{5}$$

gde je matrica C $n \times 3n$, $|q|$ reda $3n$, i matrica $|\Delta r|$ reda n.

Jednačina (5) se može napisati u obliku

$$|C_{x,y}\;\; C_\theta| \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \theta \end{vmatrix} + |\Delta r| = 0 \to \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = -|C_{x,y}^{-1}|\,|C_\theta|\,|\dot{\theta}| - |C_{x,y}|\,|\Delta r|. \tag{6}$$

U jednačini (6) je $\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|$ matrica položaja težišta, $|\theta|$ matrica uglova, $|C_{x,y}|$ i $|C_\theta|$ matrice dobijene iz matrice $|C|$. Sada je očigledno

$$|q| = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -|C_{x,y}^{-1} & C_\theta| \\ I & \end{vmatrix} |\theta| + \begin{vmatrix} -|C_{x,y}|\,|\Delta r| \\ 0 \end{vmatrix} = |C_1|\,|\theta| + |C_2|. \tag{7}$$

Analogno prethodno prikazanom se dobija

$$|\dot{q}| = |C_1'|\,|\theta|, \quad |\ddot{q}| = |C_1''|\,|\theta|. \tag{8}$$

Eliminacija unutrašnjih sila je najjednostavnija primenom D'Alemberovog diferencijalnog principa. Unutrašnje sile, tj. sile reakcija u zglobovima moraju da zadovolje jednačinu

$$|G^{un}|\,|\Delta q| = 0 \to |G^{un}|\,|C_1'|\,|\dot{q}| = 0. \tag{9}$$

Iz jednačine (9) sledi

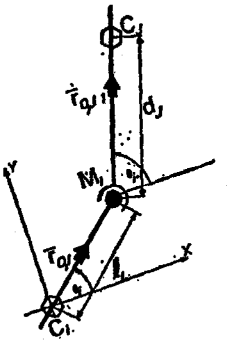
$$|C_1'|^T\,|G^{un}| = 0 \Rightarrow |C_1'|^T\,|G| = |C_1'|^T\,|G^{sp}|,$$

gde je

$$|G^{sp}|_i = \begin{vmatrix} 0 & \underset{\sim}{O} \\ & -m_i g \\ \underset{\sim}{O} & T_i \end{vmatrix}, \tag{10}$$

Koristeći ove uslove dobija se matrična jednačina pogodna za numeričku integraciju u Košijevoj formi

$$\begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \tilde{O} & I \\ A & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta \\ \omega \end{vmatrix} + |H|, \qquad (11)$$



Sl. 4. Biomehanički model sistema čovek-SFMO

gde je $\begin{vmatrix} \theta \\ \omega \end{vmatrix}$ vektor dimenzije $2n$, $\omega_i = \dot{\theta}_i$, i matrice

$$|A|_{nxn} = (|C_1'|^T |M| |C_1|)^{-1} (|C_1'|^T |K| |C_1|),$$
$$|B|_{nxn} = (|C_1'|^T |M| |C_1|)^{-1} (|C_1'|^T |R| |C_1'|),$$
$$|H|_{2n\times 1} = (|C_1'|^T |M| |C_1|)^{-1} (|C_1'|^T |G|).$$

Problem, odnosno algoritam se ne menja i ako se radi o prekidnom lancu, ali tada matrica $\begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{vmatrix}$ sadrži i $2(N-n)$ članova koordinata položaja i brzina centara mase po jednog člana u svakom neprekidnom delu kinematičkog lanca (osim jednog).

Primer: Odrediti pogonske momente spregova u zglobovima aktivne samopodešavajuće modularne ortoze (Sl. 4). i kretanje elemenata ortoze.

U ovom konkretnom slučaju, mehanička struktura se sastoji od 3 kinematička lanca, od kojih je jedan u neprekidnom dodiru sa podlogom, a druga dva su viskoelastično vezana (svaki segment sa odgovarajućim segmentom biološkog sistema) i nemaju kontakta sa podlogom.

Računarska simulacija se može prikazati dijagramom, prikazanim na slici 5.

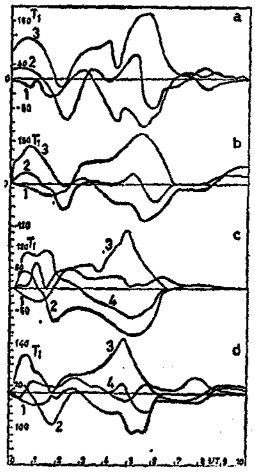
Ovaj biomehanizam sa 16 segmenata je analiziran u cilju sinteze ortoze za rehabilitaciju lokomocije subjekata sa funkcionalnim oštećenjima donjih ekstremiteta. Na osnovu rezultata računarske simulacije, u ovom radu se prezentira nekoliko (Sl. 6), dolazi se do veličine maksimalnih naprezanja u spoljnom i unutrašnjem tj. artificijelnom i biološkom skeletu, veličine pritisaka i sila na kontaktu ortoza biološki sistem, veličine pogonskih spregova u zglobovima ortoze, i omogućena je sinteza upravljanja.

Ulazni podaci su parametri segmenata kinematičkih lanaca (mase, momenti inercije, dužine, položaji težišta), parametri krutosti i prigušenja visko-elastičnih veza, položaj cilindričnih zglobova (oznaka segmenata sa položajnim ograničenjima).

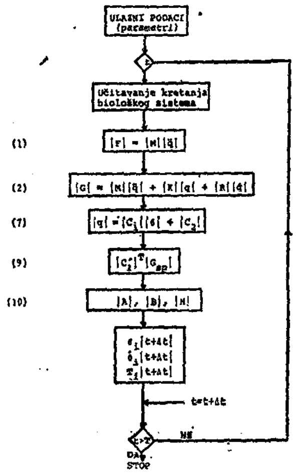
Kretanje biološkog dela sistema (model čoveka) se zadaje kao tablica veličina uglova ekvidistantno u vremenu (za segmente 1 do 8).

Ostali blokovi su realizovani u FORTRANU i realizuju matematički algoritam prikazan u radu. Numerička integracija je obavljena primenom Runge-Cutta metode IV reda.

Na osnovu dobijenih rezultata izvršeno je projektovanje ortoze [4]. Rezultati su upoređenisa rezultatima analiza obavljenih drugim metodama [4] i slaganje je zadovoljavajuće.



Sl. 5.



Sl. 6.

Literatura

[1] Hatze H., *A Complete Set of Control Equations for the Human Musculoskeletal Sustem*, Journal of Biomechanics, (1977), pp. 899—807.

[2] Aleshinsky S. — Zatziorsky V., *Human Locomotion in Space Aaalyzed Biomechanically Through a Multi-link Chain Model*, Journal of Biomechanics, **11** (1978) pp. 101—108.

[3] Langrana N. — Bartel D., *An Automated Method for Dunamic Analysis of Spatial Linkages for Biomechanical Applications*, Trans. ASME, **B-97**, (1975), pp. 566—574.

[4] Popović D., *Prilog sintezi mehanizma za pomoć ljudima sa funkcionalnim oštećenjima donjih ekstremiteta*, Doktorska disertacija, ETF, Beograd, (1981).

[5] Vukobratović M. — Potkonjak V., *Dinamika manipulacionih robota i aktivnih prostornih mehanizama*, Institut „M. Pupin", Beograd, (1980), Monografija.

[6] Ito K. et all., *Computer aided dynamic analysis of multilink systems*, Res. Rept. of Auto. Cont. Lab. Nagoya Univ. Vol. **27** (1980), pp. 9—30.

[7] Dilon R. S. — Hemami H., *Automated Equation Generation and its Application to Problems in Control*, **15** th JACC, (1974), pp. 575—580.

[8] Huston R. et all., *Dynamics of Multirigid — Body Systems*, Trans. ASME, of Adplied Mechanisms, **45**, (1978), pp. 889—894.

DYNAMICAL ANALYSIS OF JOINT MECHANISM WITH PIN JOINTS AND VISCO-ELASTIC CONNECTIONS

Abstract

Dynamical analysis of the rigid body system for rehabilitation assistive devices synthesis i. e. medical robotics purposes is rewieved in this paper. The complexity of the mathematical model and necessity of the parameter modifications requires the general algoritham for numerical simulation. Here presented computing method involves the analysis of motion of the rigid body system connected with the pin joints and with first order visko-elastic link interactions.

Dr Dejan Popović, Elektrotehnički fakultet, 11000 Beograd