

О НЕКИМ КАРАКТЕРИСТИКАМА ПОЛИНОМА ЧЕБИШЕВА

Блајој С. Појов

1. Посматрајмо полиноме Чебишева прве врсте $T_n(x)$ и друге врсте $U_n(x)$. Познато је да они могу бити одређени генератрисним релацијама

$$(1 - xt)(1 - 2xt + t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n,$$

односно

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n.$$

Нека је

$$F_k(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^k(x) t^n, \quad (1)$$

и

$$G_k(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^k(x) t^n, \quad k \geq 1. \quad (2)$$

Циљ овога рада је да изрази функцију $F_k(x, t)$ и $G_k(x, t)$ у експлицитном облику. Генератрисне функције за полиноме $T_{nk}(x)$ и $U_{nk}(x)$ чији индекси су вишеструки бројеви, биће изведене такође.

2. Експлицитни облици полинома $T_n(x)$ и $U_n(x)$ су дати изрази

$$2 T_n(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n, \quad (3)$$

и

$$2(x^2 - 1)^{1/2} U_n(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}. \quad (4)$$

Елементарном трансформацијом ових полинома добијамо познате релације

$$\begin{aligned} T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) &= 2 T_n(x) T_m(x), \\ U_{n+m}(x) + U_{n-m}(x) &= 2 U_n(x) U_m(x), \quad n \geq m. \end{aligned} \quad (5)$$

Идентитет

$$r_1^{kn} + r_2^{kn} = \sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r \frac{k}{k-r} C_{k-r}^r (r_1^n + r_2^n)^{k-2r} (r_1 r_2)^{rn}, \quad \omega = [k/2],$$

за $r_{1/2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$, нам даје релацију

$$T_{kn}(x) = \sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r \frac{k}{k-r} C_{k-r}^r 2^{k-2r-1} T_n^{k-2r}(x), \quad k \geq 1. \quad (6)$$

Узимајући у обзир

$$T_{n+1}(x) \pm \sqrt{x^2 - 1} U_n(x) = (x \pm \sqrt{x^2 - 1})^{n+1},$$

добивамо

$$W_{kn}(x) = \sum_{r=0}^{\omega} 2^{(2\omega-r)} \frac{k}{k-r} C_{k-r}^r (x^2 - 1)^{\omega-r} U_n^{k-2r}(x), \quad k \geq 1 \quad (7)$$

где је

$$W_{kn}(x) = \begin{cases} 2 T_{k(n+1)}(x), & \text{ако је } k \text{ паран број} \\ U_{k(n+1)}(x), & \text{ако је } k \text{ непаран број.} \end{cases}$$

3. Релације (5) омогућавају добијање генератрисних функција полинома $T_{nk}(x)$ и $U_{nk}(x)$. Заиста, имаћемо

$$(1 - 2 T_n(x) t + t^2) T_m(x, t) = T_0(x) - T_n(x) t, \quad (8)$$

где је

$$T_m(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(x) t^n, \quad (9)$$

као и користећи релацију

$$U_{n+m}(x) - U_{n-m-2}(x) = 2 U_m(x) T_n(x), \quad (10)$$

добивамо

$$(1 - 2 T_m(x) t + t^2) U_m(x, t) = U_0(x) + U_{m-2}(x) t, \quad m \geq 1, \quad U_{-1}(x) = 0, \quad (11)$$

где је

$$U_m(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{nm}(x) t^n.$$

Полазећи од (6), посматрајмо суму

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_{kn}(x) t^n = \sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r 2^{k-2r-1} \frac{k}{k-r} C_{k-r}^r \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{k-2r}(x) t^n, \quad k \geq 1$$

која заједно са (1) и (9) нам даје

$$2^{k-1} F_k(x, t) = T_k(x, t) + \sum_{r=1}^{\omega} (-1)^r 2^{k-2r-1} \frac{k}{k-r} C_{k-r}^r F_{k-2r}(x, t),$$

као и помоћу (2), (7) и (11) добијамо

$$2^{2\omega} (x^2 - 1)^\omega G_k(x, t) = W_k(x, t) - \sum_{r=1}^{\omega} 2^{(\omega-r)} \frac{k}{k-r} C_{k-r}^r (x^2 - 1)^{\omega-r} G_{k-2r}(x, t),$$

где је

$$W_k(x, t) = \sum_{n=0}^{\omega} W_{kn}(x) t^n.$$

4. Степене полинома $T_n(x)$ и $U_n(x)$ добијамо из релација (3) и (4). Имаћемо

$$2^{n-1} T_n^k(x) = \sum_{r=0}^{\omega} C_k^r \tilde{T}_{(k-2r)n}(x), \quad (12)$$

са

$$\tilde{T}_n(x) = \begin{cases} T_n(x), & n \neq 0 \\ 1/2 T_n(x), & n = 0, \end{cases}$$

и

$$2^\omega (x^2 - 1)^\omega U_n^k(x) = \sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r C_k^r W_{(k-2r)n}(x). \quad (13)$$

Ако се помножи сваки знак релација (12) и (13) са t^n и ове саберу за $n=0, 1, 2, \dots$ добија се

$$2^{k-1} F_k(x, t) = \sum_{r=0}^{\omega} C_k^r T_{k-2r}(x, t),$$

где $T_0(x, t)$ треба поделити са 2, и

$$2^\omega (x^2 - 1)^\omega G_k(x, t) = \sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r C_k^r W_{k-2r}(x, t).$$

Узимајући $T_{k-2r}(x, t)$ и $W_{k-2r}(x, t)$ из (8) и (10) добија се

$$2^{k-1} F_k(x, t) = \sum_{r=0}^{\omega} C_k^r \frac{T_0(x) - T_{k-2r}(x) t}{1 - 2 T_{k-2r}(x) t + t^2},$$

и

$$2^{k-1} (x^2 - 1)^\omega G_k(x, t) = \sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r C_k^r \frac{V_{k-2r}(x, t)}{1 - 2 T_{k-2r}(x) t + t^2},$$

где је

$$V_k(x, t) = \begin{cases} T_0(x) - T_k(x) t, & k - \text{паран број} \\ U_0(x) + U_{k-2}(x) t, & k - \text{непаран број.} \end{cases}$$

Литература

- [1] Chohat M. J., *Theorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebychef*, Mém. des Sc. Math. fasc. LXVI, 1934, Paris.

- [2] Rainville E. D., *Special Functions*, 1960, New-York.
[3] Szegő G., *Orthogonal Polynomials*, Coll. Publ. XXXIII. 1939.
[4] Митриновић Д. С., *Увод у специјалне функције*, Београд 1975.

QUELQUES CARACTERISTIQUES SUR LES POLYNOMES DE TCHEBYCHEF

Résumé

On donne quelques relations concernant les fonctions génératrices des polynomes de Tchebychef de première espèce $T_n(x)$ et de seconde espèce $U_n(x)$.

akademik Dr Blagoj S. Popov
Univerzitet u Skopju
Skopje