Зборник радова Математичкоі института. Нова серија, књ. 4. (12). 1984.
Recueil des travaux de l' Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

NAPOMENA UZ MARGEROVU TEORIJU PLITKIH LJUSKI

Natalija Naerlović-Veljković

Rad K. Margera (K. Marguerre) [1] odnosi se na teoriju konačno deformisanih »zakrivljenih ploča« ili ploča sa »slabom početnom krivinom«, kako je autor nazvao tanke plitke ljuske koje u svojoj teoriji proučava. Ovako definisan objekt proučavanja daje povoda za uvođenje nekih zanemarenja, iz kojih rezultira relativno jednostavan oblik diferencijalnih jednačina problema. Predložene jednačine bile su namenjene analizi stabilnosti i postkritičnog ponašanja plitkih ljuski. U tom smislu teorija je pogodila cilj, jer je, nekoliko decenija kasnije, postala rado korišćena u problemima stabilnosti, v. napr. [2].

Nedeformisani oblik srednje površi tanke ljuske Marger određuje, u odnosu na Dekartov sistem materijalnih koordinata, jednačinom:

$$z^\circ = W(x, y). \tag{1}$$

U deformisanoj konfiguraciji, u odnosu na isti sistem koordinata, položaj proizvoljne tačke ljuske određen je izrazima

$$x+u(x, y)-z\, w_x, \quad y+v(x, y)-z\, w_y, \quad W(x, y)+z+w(x, y), \tag{2}$$

gde indeks pored „w" označava izvod po naznačenoj materijalnoj koordinati. Izrazi (1) pokazuju da su u Margerovoj teoriji zadržane standardne pretpostavke teorije tankih ploča o ravnim presecima i nepromenljivosti uglova koje ti preseci grade sa srednjom površi ljuske.

Na osnovu izraza (1) i (2) određene su koordinate Lagranževog, materijalnog tenzora relativne deformacije, napr.

$$\frac{1}{2}\gamma_{11} = u_x + \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2) + \frac{1}{2}w_x^2 + W_x w_x - z w_{xx}, \quad \text{it. d.}, \tag{3}$$

pri čemu su zanemareni sabirci oblika $u_u (zw_x)_x$, $(zw_x)_x^2$ itd.

Dalja analiza je izvršena primenom energetskog pristupa, uz pretpostavku linearnih veza između koordinata tenzora napona i koordinata Lagranževog tenzora deformacije. Uslovi ravnoteže, izvedeni na osnovu principa virtuelnih radova, uvođenjem naponske funkcije $\Phi = \Phi(x, y)$, svode se na sistem od dve spregnute diferencijalne jednačine

$$\frac{1}{E}\Delta\Delta\Phi = 2W_{xy}w_{xy} - W_{yy}w_{xx} - W_{xx}w_{yy} + w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy}, \tag{4}$$

$$\frac{E' h^3}{12}\Delta\Delta w - \Phi_{yy}(W_{xx}+w_{xx}) + 2\Phi_{xy}(W_{xy}+w_{xy}) - \Phi_{xx}(W_{yy}+w_{yy}) = 0, \tag{5}$$

koje su predložene kao osnova za proučavanje postkritičnog ponašanja plitkih ljuski. Prva jednačina ima značenje uslova kompatibilnosti deformacija za generalisano ravno naprezanje, a druga predstavlja uslov ravnoteže u pravcu z-ose. Pri ispisivanju jednačine (4) naknadno su, u izrazima za koordinate Lagranževog tenzora deformacije, zanemareni članovi koji su nelinearni po izvodima pomeranja „u" i „v". Ovo naknadno zanemarenje opravdano je slabom početnom zakrivljenošću srednje površi ljuske.

Uvedeno naknadno zanemarenje moglo bi tu biti i izbegnuto. Međutim, ukoliko bi se do kraja išlo sa izrazima oblika (3) za koordinate tenzora deformacije, uslov kompatibilnosti bi morao da bude postavljen u nelineranom obliku, v. napr. [3] i u posmatranom slučaju bi glasio

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x}+\right.\\ \left.+\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y}-2\left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y}+\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x}\right)\right]=0,\end{aligned} \tag{6}$$

gde je obeleženo

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}&\equiv u_x+\frac{1}{2}(u_x^2+v_x^2)=\frac{1}{E}(\Phi_{yy}^2-\nu\,\Phi_{xx}^2)-\frac{1}{2}w_x^2-W_x\,w_x,\\ \varepsilon_{12}&\equiv\frac{1}{2}(u_y+v_x)+\frac{1}{2}(u_x\,u_y+v_x\,v_y)=-\frac{1+\nu}{E}\Phi_{xy}-\frac{1}{2}(w_x\,w_y+W_y\,w_x+W_x\,w_y),\\ \varepsilon_{22}&\equiv v_y+\frac{1}{2}(u_y^2+v_y^2)=\frac{1}{E}(\Phi_{xx}^2-\nu\Phi_{yy}^2)-\frac{1}{2}W_y^2-w_y\,w_y.\end{aligned} \tag{7}$$

Ukoliko bi se u tako napisanom uslovu kompatibilnosti zanemarili sabirci koji su nelinearni po izvodima naponske funkcije, tada bi se promenila samo desna strana jednačine (4). Ova strana bila bi dopunjena nizom članova koji su nelinearni po izvodima funkcije $w(x, y)$. Iako se ima u vidu slaba početna zakrivljenost srednje površi ljuske, sa desne strane jednačine bi mogli da se zadrže oni sabirci u kojima se, kao koeficijenti, pojavljuju kvadrati prvih izvoda početnog ugiba W. U tom slučaju jednačina (4) bila bi zamenjena izrazom:

$$\frac{1}{E}\Delta\Delta\Phi=2W_{xy}\,w_{xy}-W_{yy}\,w_{xx}-W_{xx}\,w_{yy}+(1+\underline{W_x^2+W_y^2})(w_{xy}^2-w_{xx}w_{yy}) \tag{8}$$

Tako napisan izraz sličnog je oblika kao jednačina (4), ali, prisustvom podvučenih članova, daje mogućnost za procenu valjanosti primene diferencijalnih jednačina (4), i (5) u proučavanju stabilnosti ljuske određenog oblika.

Literatura

[1] Marguerre K., *Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung*. Proceedings 5 th Int. congr. appl. mech. (1938)

[2] Fitch J. R. *The buckling and postbukling behavior of spherical caps under concentrated load* Int. J. Solids Structures, 4, pp. 421—446, 1968.

[3] Eringen A. C. *Mechanics of continua*, New York 1967.

Prof. Dr Natalija Naerlović—Veljković, Građevinski fakultet, 11000 Beograd

Рад је делимично финансиран из средстава Републичке заједнице науке Србије, у оквиру пројекта „Савремени проблеми у истраживању конструкција".