Зборник радова Математичкоi института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

PRILOG ODREĐIVANJU KONAČNIH JEDNAČINA KRETANJA NESTACIONARNIH MEHANIČKIH SISTEMA

Dušan J. Mikičić

Uvod

Mehanički sistem čije su diferencijalne jednačine linearne po generalisanim koordinatama i njihovim izvodima, sreću se u teoriji linearnih oscilacija [3], u automatici [4], u elektrotehnici i u drugim naučnim disciplinama. Nestacionarnost ovih sistema potiče usled vremenske zavisnosti koeficijenata a_{ij}, b_{ij} i c_{ij}. U ovakvim slučajevima se konačne jednačine kretanja često traže numeričkim metodama. Samo se u nekim specijalnim slučajevima može doći do koačnog tačnog analitičkog rešenja. Cilj ovog rada je, da prikaže metodu koja se može koristiti za numeričko rešavanje konačnih jednačina, a ponekad i za traženje tačnog analitičkog rešenja.

Definisanje problema

Posmatrajmo mehanički sistem čije su diferencijalne jednačine kretanja

$$a_{ij}(t)\,\ddot{q}^j+b_{ij}(t)\,\dot{q}^j+c_{ij}(t)\,q^j=F_i(t), \qquad (i,j=1,2,\ldots,n). \tag{1}$$

Koeficijenti $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_{ij}(t)$ i generalisane sile $F_i(t)$ su poznate funkcije vremena Pored ovih veličina date su i početne vrednosti generalisanih koordinata i generalisanih brzina. Potrebno je odrediti konačne jednačine kretanja $q^i(t)$ za $t\geqslant t_0$.

Za određivanje konačnih jednačina kretanja postoji više numeričkih metoda. Tako na primer, Andre Ango u kursu [1] predlaže jednu takvu metodu, koja je delimično prikazana u radu [5]. Korišćenje ove metode je vezano za sporu promenu vremenski zavisnih koeficijenata u sistemu (1). U kursu [2] se predlaže druga analitička metoda za traženje konačnih jednačina kretanja. Nedostatak ove metode je, što se od koeficijenata $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ i $c_{ij}(t)$ zahteva da su višestruko integrabilne funkcije. Na taj način se ograničava oblast primene ove metode za praktičan rad.

Metoda koja se predlaže u ovom radu zasniva se na prikazivanju mehaničkog sietama u faznom prostoru pomoću vektora stanja $x=\mathrm{col}\,(x_1,x_2,\ldots,x_{2n})$. Dve spomenute metode isto tako tretiraju ovaj problem pomoću faznog vektora, pa su zato jedino one spomenute i ako ima više različitih numeričkih metoda za rešavanje sistema (1). U mehanici upravljanog kretanja [2], u teoriji oscilacija [3] i automatici [4] je proučavanje dinamičkog sistema pomoću faznog vektora osnovni pristup. Zato se transformacija sistema (1) na Košijev oblik može izvršiti na primer, smenama $q^i = x_{2i-1}$, $\dot{q}^i = x_{2i}$ ili na neki drugi način. Na taj način sistem (1) dobija oblik

$$\dot{x} = A(t)\,x + f(t), \quad x(t_0) = x_0 = \mathrm{col}\,(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{2n0}). \tag{2}$$

U ovom slučaju kvadratna matrica $A(t)$ je poznata funkcija vremena posredno preko koeficijenata $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ i $c_{ij}(t)$. Vektor $f(t) = \mathrm{col}\,(0, f_2, 0, f_2, \ldots\ldots, 0, f_{2n})$ je član koji potiče od generalisanih sila $F_i(t)$. Rešenje faznog vektora $x(t)$ sistema (2) je dato Košijevom formulom [2]

$$x(t) = X(t, t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, s)\,f(s)\,ds, \qquad t \geqslant t_0.$$

Fundamentalna matrica za nestacionarni sistem (2) nije rešiva u konačnom obliku, već se može na osnovu [5] prikazati pomoću beskonačnog reda

$$X(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t_0)\,(t - t_0)^n/n!, \quad A_0 = I, \quad A_1 = A(t). \tag{4}$$

Ostale matrice $A_n(t)$ su definisane rekurentnom formulom

$$A_n(t) = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \overset{(p)}{A}(t)\,A_{n-1-p}(t), \quad \overset{(p)}{A}(t) = \frac{d^p A(t)}{dt^p}. \tag{5}$$

U radu [5] je pokazano kako se pomoću diskretnog modela može odrediti fazni vektor u diskretnim vremenskim trenutcima. Ovde će biti pokazano kako se formula (4) koristi za analitičko određivanje faznog vektora $x(t)$. U tom cilju treba izraz (4) zameniti u (3). Tako se dobija da je za $t_0 = 0$

$$x(t) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(0)\,t^n/n!\right] x_0 + \int_0^t \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)\,(t-s)^n/n!\right] f(s)\,ds. \tag{6}$$

U nekim slučajevima formula (6) može dati konačno analitičko rešenje faznog vektora $x(t)$, kao što se vidi iz primera koji je priložen u daljem tekstu. Na kraju treba samo izvršiti inverznu transformaciju od faznog vektora $x(t)$ prema generalisanim koordinatama $q^i(t)$. Na taj način bi bile rešene i konačne jednačine kretanja nestacionarnog sistema (1).

Primer

Posmatraćemo nestacionarni mehanički sistem kod koga je $n=1$, $a_{11}(t) = 1 - t^2$, $b_{11}(t) = -2t$, $c_{11} = 6$, $F_1 = 0$, tako da je sistem (1) opisan samo jednom diferencijalnom jednačinom drugog reda $(1-t^2)\ddot{q} - 2t\dot{q} + 6q = 0$. Početni uslovi su $q(0) = -0{,}5$; $\dot{q}(0) = 0$. Smenama $q = x_1$, $\dot{q} = x_2$ dobija se Košijev oblik (2)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-6}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-6}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

U ovom slučaju matrice (5) su

$$A_0=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A_1(0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & 0\end{pmatrix},$$

$$A_2(0)=\sum_{p=0}^{1}\binom{1}{p}\overset{(p)}{A}\,A_{1-p}=A^2(0)+\dot{A}(0)=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix},$$

$$A_3(0)=\sum_{p=0}^{2}\binom{2}{p}\overset{(p)}{A}\,A_{2-p}=A^3+2\,\dot{A}A+A\dot{A}+\ddot{A}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$A_4(0)=\sum_{p=0}^{3}\binom{3}{p}\overset{(p)}{A}(0)\,A_{3-p}(0)=A(0)\,A_3(0)+3\,\dot{A}(0)\,A_2(0)+$$

$$+3\,\ddot{A}(0)\,A_1(0)+\dddot{A}(0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -24\end{pmatrix}.$$

Zamenom ovih matrica u izraz (6) dobija se da je

$$x(t)=\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & 0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}t^2/2!+\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix}0 & -4\\ 0 & 0\end{pmatrix}t^3/3!+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -24\end{pmatrix}t^4/4!+\cdots\right]\begin{pmatrix}-0{,}5\\ 0\end{pmatrix},$$

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q(t)\\ \dot{q}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\,(1-3\,t^2)\\ -3\,t\end{pmatrix}.$$

Konačno je traženo rešenje $q(t)=0{,}5\,(1-3t^2)$.

Zaključak

U zaključku se može konstatovati da formula (6) može u nekim slučajevima dati konačno analitičko rešenje za fazni vektor $x(t)$, a posredno i konačne jednačine kretanja nestacionarnog sistema (1). Primer je odabran iz oblasti Ležandrove diferencijalne jednačine, koja se može rešiti i na drugi način, da bi se proverila predložena metoda. Konačan sud o predloženom postupku traženja konačnih jednačina kretanja se može dati tek kada se reši veći broj primera iz mehanike ili iz drugih oblasti.

Literatura

[1] Andre Angot, *Complements de mathematiques-a l'usage des ingenieurs de l'elektrotechnique et des telacomunications*, Paris 1957.

[2] Padula L. — Arbib M., *System Theory*, Saunders Company, Philadelphija-London-Toronto, 1974 (str. 330-360).

[3] Vujičić V., *Teorija oscilacija*, Beograd 1969.

[4] Stojić M., *Kontinualni sistemi automatskog upravljanja*, Naučna knjiga, Beograd 1978.

[5] Mikičić D., *O linearnom nestacionarnom sistemu sa brzo promenljivim parametrima*, Automatika-Zagreb, **22** (5—6), 1981.

A CONTRIBUTION TO THE DETERMINATION OF FINITE EQUATION OF MOTION FOR NONSTATIONARY MECHANIC SYSTEMS

Summary

In the present paper we observe a system whose differential equations of motion are of the form $a_{ij}(t)\,\ddot{q}^j + b_{ij}(t)\,\dot{q}^j + c_{ij}(t)\,q^j = F_i(t)$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, where n is the degree of freedom of motion. The procedure for determining finite equations of motion $q^i(t)$ in a finite time interval $t_0 \leqq t \leqq t_1$ is proposed in the paper.

Dr Dušan Mikičić
Elektrotehnički fakultet
Beograd, Bulevar revolucije 73.