

STABILNOST KONAČNE TERMOELASTIČNE DEFORMACIJE VLAKNIMA OJAČANOG ŠTAPA

Milan Mićunović

Uvod

Danas je opšte poznato da se gubitak stabilnosti može desiti ne samo pri dejstvu pritiskujućih sila na vitka tela nego i pri zatežućim ili smičućim silama koje deluju na masivna tela.

Stabilnost se ispituje ili energetskim metodom pomoću analize postuliranih globalnih nejednakosti [1—4] ili direktnim metodom traženjem netrivialnih rešenja poremećenih jednačina ravnoteže [5—8]. Korespondencija između ova dva metoda, koliko je autoru ovog rada poznato, do danas nije precizno uspostavljena zbog toga što se prvi od ova dva metoda još razvija.

Vlaknima ojačani materijali, danas veoma interesantni sa tehnološke tačke gledišta, imaju malu, takoreći zanemarljivu, promenu dužine u pravcu vlakana pod uticajem mehaničkih sila pa se dovoljno tačno može pretpostaviti odgovarajuća elastična neistegljivost [9]. U ovom radu se direktnim metodom razmatra stabilnost ravnoteže homogene termoelastične konačne deformacije štapa pravougaonog poprečnog preseka koji je sačinjen od nestišljivog vlaknima ojačanog generalisanog Muni-Rivlinovog (Mooney, Rivlin) materijala. Pri tom se ispituje mogućnost egzistencije dopunskog infinitezimalnog temperaturnog polja i dopunske infinitezimalne deformacije pri nepromenjenim graničnim uslovima.

1. Ravnotežna konfiguracija

Posmatramo nestišljiv elastičan štap \mathcal{B} beskonačne dužine (Slika 1) pravougaonog poprečnog preseka, ojačan neistegljivim vlaknima, koji u nedeformisanoj beznaponskoj konfiguraciji \mathcal{B}_0 ima homogeno temperaturno polje $T_0 = \text{const}$. Neka su materijalne koordinate u \mathcal{B}_0 Dekartove

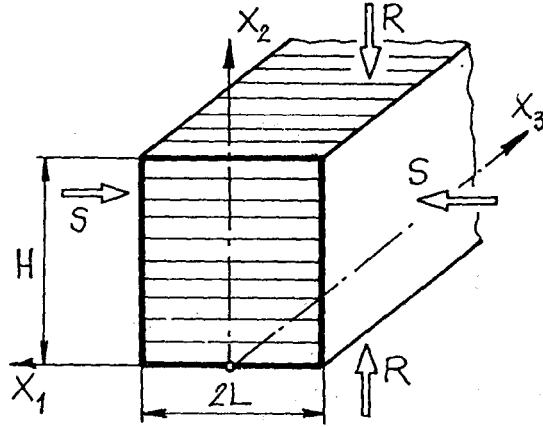
$$ds_0^2 = \delta_{KL} dX_K dX_L. \quad (1.1)$$

Ako T_0 dobije homogeni priraštaj $\hat{\theta} = \text{const}$ a granice tela su slobodne, \mathcal{B} će preći u novu beznaponsku konfiguraciju $\hat{\mathcal{B}}_N$ koja se zove prirodno stanje. Funkcija preslikavanja

$$\hat{\theta} : \mathcal{B}_0 \mapsto \hat{\mathcal{B}}_N, \quad (\hat{du})^* = \hat{\theta}_K^* dX_K, \quad (1.2)$$

zove se termička distorzija [9] i za $\hat{\theta} \ll T_0$ se dovoljno tačno može predstaviti linearnom tenzorskom funkcijom (β je koeficijent linearnog širenja u pravcu vlakana a γ je u pravcu upravnom na vlakna)

$$\{\Theta_{kx}^*(\hat{\theta})\} = \begin{Bmatrix} 1 + \beta\hat{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \gamma\hat{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \gamma\hat{\theta} \end{Bmatrix}. \quad (1.3)$$



Sl. 1

Neka na štap deluju pritiskujuće sile R i S na njegove strane paralelne ravnima X_1X_3 i X_2X_3 izazivajući izotermni prelaz štapa iz $\hat{\mathcal{B}}_N$ u konfiguraciju $\hat{\mathcal{B}}$. Funkcija preslikavanja prvobitne u ovu konfiguraciju (x_k su prostorne Dekartove koordinate)

$$\hat{\mathbf{F}}: \hat{\mathcal{B}}_0 \mapsto \hat{\mathcal{B}}, \quad \hat{d}x_k = \hat{F}_{kK} dX_K = \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial X_K} dX_K, \quad (1.4)$$

je tenzor gradijenata deformacije i u našem slučaju ima komponente

$$\{\hat{F}_{kL}\} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_\alpha = \text{const} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (1.5)$$

Različito konfiguracija $\hat{\mathcal{B}}_N$ i $\hat{\mathcal{B}}$ prouzrokuje pojavu napona [9] a odgovarajuća funkcija preslikavanja

$$\hat{\Phi}: \hat{\mathcal{B}}_N \mapsto \hat{\mathcal{B}}, \quad \hat{d}x_k = \hat{\Phi}_{k\alpha} (\hat{d}u)^\alpha, \quad (1.6)$$

se zove elastična distorzija i njene komponente se iz (1.3) i (1.5) dobijaju u obliku

$$\{\hat{\Phi}_{k\alpha}\} = \{\hat{F}_{kK} \hat{\Theta}_{Kx}^{-1}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\lambda_1}{1 + \beta\hat{\theta}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{1 + \gamma\hat{\theta}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3}{1 + \gamma\hat{\theta}} \end{Bmatrix}. \quad (1.7)$$

Tenzori

$$\widehat{\mathbf{B}} = \widehat{\Phi} \cdot \widehat{\Phi}^T, \quad \widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\Phi}^T \cdot \widehat{\Phi} \quad (1.8)$$

sa komponentama

$$\begin{aligned} \{\widehat{B}_{kl}\} &= \{\delta^{\kappa\lambda} \widehat{\Phi}_{k\kappa} \widehat{\Phi}_{l\lambda}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1^2 (1 + \beta \hat{\theta})^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 (1 + \gamma \hat{\theta})^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 (1 + \gamma \hat{\theta})^{-2} \end{array} \right\} = \\ &= \{\widehat{C}_{\kappa\lambda}\} = \{\delta_{kl} \widehat{\Phi}_{k\kappa} \widehat{\Phi}_{l\lambda}\}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

se, prema terminologiji datoj u [4], mogu nazvati levi i desni Koši-Grinov (Cauchy, Green) tenzor elastične deformacije.

Materijal štapa je elastično neistegljiv u pravcu vlakana (pretpostavlja se da su vlakna u datim konfiguracijama određena jediničnim vektorima $A_{0K} = \delta_{1K}$, $\widehat{A}_N^{\kappa} = \delta_1^{\kappa}$ i $\widehat{a}_k = \delta_{1k}$), odnosno [9]

$$\widehat{C}_{\kappa\lambda} \widehat{A}_N^{\kappa} \widehat{A}_N^{\lambda} = \widehat{C}_{11} = \left(\frac{\lambda_1}{1 + \beta \hat{\theta}} \right)^2 = 1, \quad (1.10)$$

i elastično nestišljiv

$$\det C_{\kappa\lambda} = \det B_{kj} = 1, \quad (1.11)$$

pa se dijagonalne komponente tenzora elastične deformacije mogu napisati na sledeći način

$$\widehat{B}_{11} = 1, \quad \widehat{B}_{22} = \frac{1}{\kappa}, \quad \widehat{B}_{33} = \kappa. \quad (1.12)$$

Napon i entropija vlaknima ojačanog nestišljivog tela pri termoelastičnoj deformaciji su određeni izvodima funkcije slobodne energije [9]

$$\begin{aligned} t_{kl} &= -p \delta_{kl} + T a_k a_l + 2 \rho [(\psi_1 + I_1 \psi_2) B_{kl} - \psi_2 B_{km} B_{ml} + \\ &+ \psi_3 a_j (B_{jk} a_l + B_{jl} a_k)], \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \left\{ 2 \Phi_{p\mu} \left[(\psi_1 + I_1 \psi_2) B_{pm} - \psi_2 B_{pj} B_{jm} + \psi_3 a_j (a_p B_{jm} + \right. \right. \\ &\left. \left. + a_m B_{jp}) + \frac{1}{2 \rho} T a_p a_m \right] - \frac{1}{\rho} p \Phi_{m\mu} \right\} F_{K\mu}^{-1} d \Theta_K^{\mu} / d \theta, \end{aligned} \quad (1.14)$$

gde su: $t_{kl} = t_{lk} = -$ simetrični tenzor napona, p — pritisak (reaktivni napon koji odgovara nestišljivosti), T — napon vlakana (reaktivni napon koji odgovara elastičnoj neistegljivosti), η — specifična entropija i

$$\psi_{\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial I_{\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (1.15)$$

$$I_1 = B_{kk}, \quad I_2 = \frac{1}{2} (B_{kk} B_{ll} - B_{kl} B_{lk}), \quad I_3 = B_{jk} a_j a_k. \quad (1.16)$$

Pretpostavimo da je materijal posmatranog štapa nelinearni elastični generalisani Muni-Rivlinov materijal sa funkcijom slobodne energije

$$\psi(\widehat{\mathcal{B}}_{kl}, \hat{\theta}) = C_1(\hat{\theta})(\widehat{I}_1 - 3) + C_2(\hat{\theta})(\widehat{I}_2 - 3) + C_3(\hat{\theta})(\widehat{I}_3 - 1). \quad (1.17)$$

Zbog toga što je $\hat{\theta} \ll T_0$ možemo C_α ($\alpha=1, 2, 3$) razviti u stepene redove po $\hat{\theta}$ i zadržati samo linearnu aproksimaciju

$$C_\alpha(\hat{\theta}) = C_\alpha(0) + \left(\frac{dC_\alpha}{d\hat{\theta}}\right)_0 \hat{\theta} \equiv A_\alpha(1 + k_\alpha \hat{\theta}), \quad (\alpha=1, 2, 3). \quad (1.18)$$

U specijalnom slučaju $\hat{\theta}=0$ za $C_3=0$ dobija se Muni-Rivlinov materijal bez ojačanja a ako je i $C_2=0$ materijal je neohukovski bez ojačanja [4]. U radu [7] je uvedena pretpostavka (za materijal bez ojačanja) $k_\alpha = 1/T_0$ ($\alpha=1, 2$) koja će se dalje i ovde koristiti zbog jednostavnijih krajnjih rezultata. Uzimajući ovo u obzir iz graničnih uslova $\hat{i}_{11}(\pm \lambda_1 L) = \pm S$, $\hat{i}_{22}(0, \lambda_2 H) = \mp R$ dobijaju se prostorne komponente tenzora napona pomoću (1.12)–(1.17)

$$\hat{i}_{11} = S, \quad \hat{i}_{22} = R, \quad \hat{i}_{33} = R - 2\hat{\rho} \frac{1-x^2}{x} [C_1 + C_2(1+x)], \quad \hat{i}_{kl} = 0 \quad (k \neq l), \quad (1.19)$$

$$\hat{p} = -R + 2\hat{\rho} \frac{1}{x} [C_1 + C_2(1+x)], \quad \hat{T} - \hat{p} = S - 2\hat{\rho} \left(C_1 + C_2 \frac{1+x^2}{x} + 2C_3 \right). \quad (1.20)$$

U gornjim izrazima su $x = \text{const}$, $C_\alpha = \text{const}$ ($\alpha=1, 2, 3$) pa su uslovi ravnoteže (zapreminske sile ne uzimamo u obzir) u $\widehat{\mathcal{B}}$, odnosno

$$\hat{i}_{kll} = 0, \quad (1.21)$$

identički zadovoljeni.

2. Priraštaji deformacije, napona i entropije

Neka su gradijenti deformacije dobili ravanski virtualni priraštaj $u = u(x, y)$ $v = v(x, y)$, $w = w(z)$ [8]

$$\delta F_{kK} = u_{k,l} \hat{F}_{lK}, \quad \{u_{k,l}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right\}, \quad (2.1)$$

a temperatursko polje virtualni priraštaj $\delta\theta = \theta - \hat{\theta} \equiv \tau$. Tada će konfiguracije $\widehat{\mathcal{B}}_N$ i $\widehat{\mathcal{B}}$ preći u njima infinitezimalno bliske \mathcal{B}_N i \mathcal{B} a odgovarajući virtualni priraštaji termičke i elastične distorzije će biti [9]

$$\{\delta\Theta_K^*\} = \tau \{\beta_K^*\} = \tau \left\{ \begin{array}{ccc} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{array} \right\}, \quad (2.2)$$

$$\{\delta\Phi_{kx}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial x} - \mathbf{B}\tau & \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \Gamma\tau \right) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{x} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \Gamma\tau \right) \end{array} \right\}, \quad (2.3)$$

gde su uvedene oznake $\mathbf{B} = \beta/(1 + \beta\hat{\theta})$, $\Gamma = \gamma/(1 + \gamma\hat{\theta})$. Sada, korišćenjem (2.1)–(2.3) virtualni priraštaji uslova elastične neistegljivosti i elastične nestišljivosti daju, respektivno

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \mathbf{B}\tau = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2\Gamma\tau, \quad (2.4)$$

pa je virtualni priraštaj levog Koši-Grinovog tenzora elastične deformacije određen matricom

$$\{\delta\mathbf{B}_{kl}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & -2 \frac{\Gamma}{x} \tau & 0 \\ 0 & 0 & -2\Gamma x\tau \end{array} \right\}. \quad (2.5)$$

Ako uvedemo oznake

$$\pi = \delta p, \quad \sigma \equiv \delta T \quad (2.6)$$

i uzmemo u obzir (1.18), (2.5) i varijaciju uslova elastične nestišljivosti

$$\delta\rho = -\hat{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\hat{\rho} (\mathbf{B} + 2\Gamma)\tau, \quad (2.7)$$

virtualni priraštaj prostornih komponenata tenzora napona dobijamo iz (1.13) na sledeći način:

$$\begin{aligned} \delta t_{kl} = & -\pi\delta_{kl} + \sigma \hat{a}_k \hat{a}_l - 2\hat{\rho} (\mathbf{B} + 2\Gamma - \hat{T}^{-1}) [(C_1 + \hat{I}_1 C_2) \hat{B}_{kl} - C_2 \hat{B}_{km} \hat{B}_{ml} + \\ & + C_3 \hat{a}_j (\hat{B}_{jk} \hat{a}_l + \hat{B}_{jl} \hat{a}_k)] + 2\hat{\rho} [C_2 \hat{B}_{kl} \delta I_1 + (C_1 + \hat{I}_1 C_2) \delta B_{kl} - \\ & - C_2 (\hat{B}_{ml} \delta B_{km} + \hat{B}_{km} \delta B_{ml}) + C_3 \hat{a}_j (\hat{a}_l \delta \hat{B}_{jk} + \hat{a}_k \delta \hat{B}_{jl})]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sada se virtualni korotacioni priraštaj prostornih komponenata tenzora napona σ_{kl} (koji uzima u obzir i promenu površine na koju vektor napona deluje [8]) može lako eksplicitno napisati pomoću relacija

$$\sigma_{kl} = \delta t_{kl} - \omega_{km} \hat{t}_{ml} + \hat{t}_{km} \omega_{ml}, \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.9)$$

Na sličan način, (1.14) daje virtualni priraštaj entropije

$$\begin{aligned} \delta\eta = & -\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \delta\left\{2\Phi_{p\mu}\left[(C_1 + C_2 I_1) B_{pm} - C_2 B_{pj} B_{jm} + C_3 a_j (a_p B_{jm} + \right. \right. \\ & \left. \left. + a_m B_{jp}) + \frac{1}{2\rho} T a_p a_m\right] - \frac{1}{\rho} p \Phi_{m\mu}\right\} \beta_K^\mu \hat{F}_{Km}^{-1} + \\ & + \left\{\frac{\hat{p}}{\rho} \hat{\Phi}_{m\mu} - 2\hat{\Phi}_{p\mu}\left[(C_1 + C_2 \hat{I}_1) \hat{B}_{pm} - C_2 \hat{B}_{pj} \hat{B}_{jm} + C_3 \hat{a}_j (\hat{a}_p \hat{B}_{jm} + \right. \right. \\ & \left. \left. \hat{a}_m \hat{B}_{jp}) + \frac{1}{2\hat{\rho}} T \hat{a}_p \hat{a}_m\right]\right\} \beta_{Kk}^\mu u_{k,m} \hat{F}_{Kk}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

gde je iskorišćena veza

$$\delta F_{Km}^{-1} = -\hat{F}_{Km}^{-1} u_{n,m}, \quad (2.11)$$

koja se lako izvodi iz (2.1). Ovim su određene sve veličine koje figurišu u priraštajnim jednačinama balansa pa će ove biti napisane u sledećem odeljku.

3. Priraštajne jednačine balansa i granični uslovi

Priraštajne jednačine balansa količine kretanja, izvedene u [5] i [8], a ekvivalentne jednačinama »neutralne ravnoteže« u konvektivnim koordinatama [1], odnosno

$$\sigma_{kl,l} + \omega_{kp,l} \hat{t}_{pl} + \hat{t}_{kp} \omega_{lp,l} - \hat{t}_{kp,l} \varepsilon_{lp} = 0 \quad \text{u } \mathcal{B}, \quad (3.1)$$

gde je

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right), \quad (3.2)$$

imaju u našem slučaju eksplicitni oblik

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \xi_1 \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\pi - \sigma), \quad (3.3)$$

$$\alpha_1 x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \xi_2 \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial \pi}{\partial y}. \quad (3.4)$$

Ovde su sa α_1 , ξ_1 i ξ_2 označene konstante

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \frac{\hat{p}}{x} (C_2 x + C_1 + C_3), \\ \xi_1 &= 2 \frac{\hat{p}}{x} \left\{ \left(B - \frac{1}{\hat{T}} \right) [(C_1 + 2 C_3) x + C_2 (1 + x^2)] + 2 x \Gamma (C_2 x + C_3) \right\} \\ \xi_2 &= 2 \frac{\hat{p}}{x} \left\{ B [(C_2 - C_3) + 2 x \Gamma C_2 - \frac{1}{\hat{T}} [C_1 + C_2 (1 + x)]] \right\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

koje zavise od početne konačne elastične deformacije x (videti (1.12)).

Razmotrimo, sada, priraštajnu jednačinu koja se odnosi na balans energije. Ukoliko bi, umesto dinamičke jednačine balansa energije [4]

$$\rho T \frac{d\eta}{dt} = -q_{k,k}, \quad (3.6)$$

napisali virtualnu jednačinu

$$\hat{\delta} \hat{T} \delta \eta \geq -\varepsilon q_{k,k}, \quad (3.7)$$

(gde je ε — infinitezimalni sklar), razvili q_k u stepeni red [9]

$$\begin{aligned} q_k(\hat{\Phi}_{m\mu} + \delta \Phi_{m\mu}, \hat{T} + \tau, \tau, n) = q_k(\hat{\Phi}, \hat{T}, 0) + \left(\frac{\partial q_k}{\partial \Phi_{m\mu}} \right)_{\hat{\Phi}, \hat{T}, 0} \delta \Phi_{m\mu} + \\ + \left(\frac{\partial q_k}{\partial T} \right)_{\hat{\Phi}, \hat{T}, 0} \tau + \left(\frac{\partial q_k}{\partial \tau, l} \right)_{\hat{\Phi}, \hat{T}, 0} \tau, l \equiv -K_{kl} \tau, l, \end{aligned} \quad (3.8)$$

i zamenili u (3.7), dobili bismo

$$\hat{\rho} \hat{T} \delta \eta = \varepsilon K_{kl} \tau, lk. \quad (3.9)$$

Pri tom je za izvođenje (3.8) iskorišćen uslov nepostojanja toplotnog fluksa u homogenom temperaturskom polju. U jednačini (3.8) sa K_{ij} su označene konstantne prostorne komponente tenzora termičke provodnosti [11]. Pošto je τ infinitezimalni priraštaj temperature, desna strana jednačine (3.9) se može zanemariti kao mala veličina drugog reda, pa se iz (3.9) i (2.10) dobija priraštajna jednačina balansa energije

$$\begin{aligned} B \hat{T} \sigma - (B + 2 \Gamma) \hat{T} \pi - \left[\xi_3 - \frac{1}{2} (2 \Gamma^2 + 2 \Gamma B - B^2) R \hat{T} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} B (B + 2 \Gamma) S \hat{T} \right] \tau = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

gde je

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{2 \hat{\rho}} \xi_3 = B^2 \hat{T} [C_1 (-1 + \kappa + \kappa^2) + 2 C_2 \kappa^2 + 2 C_3 \kappa] + 2 B \Gamma \hat{T} [C_1 (1 + \kappa) + \\ + C_2 (1 + 2 \kappa + \kappa^2) + 2 C_3] + \Gamma^2 \hat{T} [C_1 (1 + \kappa^2) + C_2 (1 + 4 \kappa + 3 \kappa^2)] - \\ - B [(C_1 + 2 C_3) \kappa + C_2 (1 + \kappa^2)] - 2 \Gamma \kappa [C_1 \kappa + C_2 (1 + \kappa)]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Što se tiče priraštajnih graničnih uslova (videti [8])

$$\delta f_k = (\sigma_{kl} + \omega_{kp} \hat{t}_{pl} - \hat{t}_{kl} \varepsilon_{pp} - \hat{t}_{kp} \varepsilon_{pl}) n_l = 0 \quad \text{na } S = \partial \mathcal{B}, \quad (3.12)$$

gde je n_k jedinični vektor spoljne normale na granici tela S , u našem slučaju se oni svode na

$$\sigma_{11} + \hat{t}_{11} \varepsilon_{22} = [-\pi + \sigma + (2 \Gamma S - \zeta_1) \tau]_{x=\pm \lambda_1 L} = 0. \quad (3.13)$$

$$\sigma_{21} + \omega_{21} \hat{t}_{11} - \hat{t}_{22} \varepsilon_{21} = \left[(\alpha_1 + S - R) \frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha_1 \kappa - S) \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{x=\pm \lambda_1 L} = 0, \quad (3.14)$$

$$\sigma_{12} + \omega_{12} \hat{t}_{22} - \hat{t}_{11} \varepsilon_{12} = \left[\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha_1 x - S) \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{y=0, \lambda_2 H} = 0, \quad (3.15)$$

$$\sigma_{22} + \varepsilon_{11} \hat{t}_{22} = [-\pi + (RB - \zeta_2) \tau]_{y=0, \lambda_2 H} = 0, \quad (3.16)$$

sa konstantama

$$\zeta_1 \frac{1}{2\hat{\rho}} = \left(B - \frac{1}{\hat{T}} \right) \left(C_1 + C_2 \frac{1+x^2}{x} + 2C_3 \right) + 2\Gamma (C_1 + 2C_2 x + 4C_3), \quad (3.17)$$

$$\zeta_2 \frac{1}{2\hat{\rho}} = \frac{1}{x} \left(B - \frac{1}{\hat{T}} \right) [C_1 + C_2 (1+x)] + 2C_2 \Gamma. \quad (3.18)$$

Na ovaj način, iz priraštajnih jednačina (2.4), (3.3), (3.4) i (3.10) treba da odredimo funkcije u , v , τ , π i σ koje moraju da zadovolje granične uslove (3.13)–(3.16).

4. Analiza stabilnosti

Pretpostavimo rešenja priraštajnih jednačina na sledeći način:

$$\begin{aligned} u &= f_1(x) \cos vy, \\ v &= f_2(x) \sin vy, \\ \tau &= f_3(x) \cos vy, \\ \pi &= F_1(x) \cos vy, \\ \sigma &= F_2(x) \cos vy. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sa ovim rešenjima se na elementaran način iz (2.4) i (4.1) dobijaju veze

$$f_3(x) = \frac{1}{B} f_1'(x), \quad (4.2)$$

$$f_2(x) = \frac{2\Gamma}{vB} f_1'(x). \quad (4.3)$$

S druge strane, granični uslov (3.15) će biti identički zadovoljen ako je $v = n\pi/\lambda_2 H$ ($n=1, 2, \dots$) a (3.16) će nam dati vezu

$$F_1(x) = \frac{RB - \zeta_2}{B} f_1'(x). \quad (4.4)$$

Preostala dva granična uslova, (3.13) i (3.14), sa izborom rešenja vida (4.1) glase, respektivno,

$$B F_2(\pm \lambda_1 L) - (RB + 2\Gamma S - \zeta_1 - \zeta_2) f_1'(\pm \lambda_1 L) = 0, \quad (4.5)$$

$$(R - S - \alpha_1) v f_1(\pm \lambda_1 L) + (\alpha_1 x - S) \frac{2\Gamma}{vB} f_1''(\pm \lambda_1 L) = 0. \quad (4.6)$$

Posmatrajmo, sada, jednačine (3.3), (3.4) i (3.10). Jednačina (3.4) se pomoću (4.2) i (4.4) svodi na oblik

$$f_1'''(x) + \mu^2 f_1'(x) = 0, \quad (4.7)$$

gde je

$$\mu^2 = \frac{\nu^2}{2\alpha_1 \kappa \Gamma} (\mathbf{B}R + \xi_2 - \zeta_2), \quad (4.8)$$

sa opštim rešenjem

$$f_1(x) = E_1 + B_1 \cos \mu x + D_1 \sin \mu x. \quad (4.9)$$

Ovo rešenje će zadovoljiti i jednačine (3.3) i (3.10) ako su zadovoljeni uslovi

$$E_1 = 0, \quad (4.10)$$

i (ovaj uslov se dobija eliminacijom $F_2(x)$)

$$S\hat{T}\mathbf{B}(\mathbf{B} + 2\Gamma) = -R\hat{T}(2\Gamma^2 - 2\Gamma\mathbf{B} - \mathbf{B}^2) + 2\mu^2(\xi_3 - \mathbf{B}\hat{T}\xi_1 - 2\Gamma\hat{T}\xi_2) + 2\alpha_1\nu^2\mathbf{B}^2\hat{T}. \quad (4.11)$$

Ovim se granični uslovi (4.5) i (4.6) pomoću (4.9) mogu, respektivno, napisati eksplicitno sa

$$\mu(\mp B_1 \sin \mu\lambda_1 L + D_1 \cos \mu\lambda_1 L) \left\{ \xi_3 - \mathbf{B}\hat{T}\zeta_1 - 2(\mathbf{B} + \Gamma)\hat{T}\zeta_2 + \frac{1}{2}R\hat{T}(\mathbf{B}^2 + 2\Gamma\mathbf{B} - 2\Gamma^2) - \frac{1}{2}S\hat{T}\mathbf{B}(\mathbf{B} + 2\Gamma) \right\} = 0. \quad (4.12)$$

$$(B_1 \cos \mu\lambda_1 L \pm D_1 \sin \mu\lambda_1 L) \left[\nu(R - S - \alpha_1) + (\alpha_1 \kappa - S) \frac{2\Gamma}{\nu\mathbf{B}} \mu^2 \right] = 0. \quad (4.13)$$

Ove četiri jednačine mogu biti istovremeno zadovoljene u četiri sledeća slučaja.

A. Neka je zadovoljena jednačina

$$2\xi_3 - 2\mathbf{B}\hat{T}\zeta_1 - 4(\mathbf{B} + \Gamma)\hat{T}\zeta_2 + R\hat{T}(\mathbf{B}^2 + 2\Gamma\mathbf{B} - 2\Gamma^2) - S\hat{T}\mathbf{B}(\mathbf{B} + 2\Gamma) = 0. \quad (4.14)$$

Tada (4.13) može biti zadovoljena ili u slučaju (A1) za

$$B_1 = 0, \quad D_1 \neq 0, \quad \sin \mu\lambda_1 L = 0 \mapsto \mu = \frac{m\pi}{\lambda_1 L} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (4.15)$$

ili (A2) ako važe

$$B_1 \neq 0, \quad D_1 = 0, \quad \cos \mu\lambda_1 L = 0 \mapsto \mu = \frac{2m-1}{\lambda_1 L} \pi \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.16)$$

B. Ako je, s druge strane, zadovoljena jednačina

$$\nu^2 \mathbf{B} (R - S - \alpha_1) + \mu^2 (\alpha_1 \kappa - S) 2\Gamma = 0, \quad (4.17)$$

mogu da nastupe slučajevi (B1)

$$B_1 = 0, \quad D_1 \neq 0, \quad \cos \mu\lambda_1 L = 0 \mapsto \mu = \frac{2m-1}{\lambda_1 L} \pi \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (4.18)$$

ili (B2)

$$B_1 \neq 0, \quad D_1 = 0, \quad \sin \mu\lambda_1 L = 0 \mapsto \mu = \frac{m\pi}{\lambda_1 L} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (4.19)$$

Prema tome, sistem priraštajnih jednačina (2.4), (3.3), (3.4) i (3.10) ima netrivialna rešenja za u , v , τ , π i σ ako tri skalara: R , S i $\hat{\theta} = \hat{T} - T_0$ zadovolje jednačine (4.8), (4.11) i (4.14) ili (4.8), (4.11) i (4.17) pri čemu su $\nu = n\pi/\lambda_2 H$ ($n =$

$= 1, 2, \dots$) a μ je određeno sa (4.15) ili sa (4.16). U protivnom, ako ovi uslovi na R , S i θ ne mogu biti istovremeno zadovoljeni, postoje samo trivijalna rešenja i posmatrani štap je stabilan. Za konkretna izračunavanja (koja su jednostavna i svode se na rešavanje sistema algebarskih jednačina) moraju se znati materijalne konstante A_1 , A_2 , A_3 , β , γ i ρ_0 kao i poprečne dimenzije štapa.

Literatura

- [1] Green A. E. — Adkins J. E., *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1960.
- [2] Ericksen J. L., *A thermo—kinetic view of elastic stability theory*, Int. J. Solids Structures, Vol. 2, pp. 573—580, 1968.
- [3] Knops R. J., Wilkes E. W., *Theory of elastic stability* (ENCYCLOPEDIA OF PHYSICS, Vol. VI/2) Spiringer Verlag, Berlin, 1972.
- [4] Truesdell C., Noll W., *The non—linear field theories of mechanics* (ENCYCLOPEDIA OF PHYSICS, Vol. III/3), Spiringer Verlag, Berlin, 1965.
- [5] Biot M. A., *Mechanics of incremental deformations*, John Wiley, New York, 1965.
- [6] Wu C. H., Widera O. E., *Stability of a thick rubber solid subject to pressure loads*, Int. J. Solids Structures, Vol. 5, pp: 1107—1117, 1969.
- [7] Nowinski J. L., *Thermoelastic stability of a massive slab subjected to an initial finite compression*, J. Thermal Stresses, Vol. 4, pp. 321—331, 1981.
- [8] Mićunović M., *Stabilnost konačne ravanske deformacije idealnog vlaknima ojačanog materijala*—saopštenje na simpozijumu SAVREMENI PROBLEMI OPŠTE STABILNOSTI I STABILNOSTI KONTINUUMA, Tara, 1982.
- [9] Mićunović M., *Thermoelasticity of ideal fibre—reinforced materials*—saopštenje na simpozijumu COUPLED FIELDS OF MECHANICS (Mragowo 1981, Poljska) primljeno za štampu u Journal of technical physics.
- [10] Spencer A. J. M., *Deformations of fibre reinforced materials*, Clarendon Press, Oxford, 1972.
- [11] Nye J. F., *Physical properties of crystals*, Clarendon Press, Oxford, 1972.
- [12] Gyarmati I., *Non-equilibrium thermodynamics*, Springer Verlag, Berlin, 1970.

STABILITY OF A FINITE THERMOELASTIC DEFORMATION OF A FIBRE-REINFORCED MASSIVE SLAB

Summary

A thick slab of rectangular cross section composed of a generalized incompressible fibre-reinforced Mooney-Rivlin material is subject to a finite homogeneous static thermoelastic deformation. This deformation is caused by means of a uniform heating as well as tensile or compressive surface tractions. The stability is examined by making use of the direct method superposing infinitesimal virtual disturbances. In this way linear incremental equations of balance of momentum and energy as well as the corresponding incremental boundary conditions are obtained and solved. The conditions for non-trivial solutions leading to an instability are found and discussed.

Dr Ing Milan Mićunović vanredni profesor
 Mašinski fakultet u Kragujevcu
 Univerzitet „Svetozar Marković“
 Sestre Janjića 6
 34000 Kragujevac