Зборник радова Математичкоi институтa, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle serie, tome 4 (12), 1984.

NOVE FORME JEDNAČINA ANALITIČKE MEHANIKE

Dušan Mićević i *Lazar Rusov*

Uopštavanju Lagranžeovih jednačina druge vrste za holonomne reonomne sisteme posvećeni su radovi većeg broja naučnika kao što su: J. Nilsena, D. Manžeron-S. Deleanu, Ju. N. Maslova, I. Cenova, V. Dolapčieva, M. Šuljgina i drugih. Iz uopštenog Lagranž-Dalamberovog principa izvedene su jednačine Manžeron-Delenau, iz kojih kao specijalni slučajevi slede jednačine Nilsena i Cenova. U ovom radu koristeći se izvedenim osnovnim kinematičkim relacijama i korišćenjem Gausovog principa i uopštenog Lagranž-Dalamberovog principa, izvršeno je uopštavanje Lagranžeovih jednačina druge vrste za holonomne reonomne sisteme. Formirano je nekoliko oblika uopštenih diferencijalnih jednačina kretanja (1.12), (2.14), (3.15), (3.18), da bi na kraju izvršili generalno uopštavanje i dobili familiju uopštenih diferencijalnih jednačina kretanja (3.22) za holonomne sisteme, iz kojih kao specijalni slučajevi slede sve do sada izvedene uopštene jednačine holonomnih sistema. Ovim su istovremeno iscrpljene sve mogućnosti formiranja uopštenih Lagranžeovih jednačina druge vrste, različitih po spoljašnjoj formi.

1. **Kinematičke relacije.** Posmatrajmo sistem materijalnih tačaka B_j $(j=1, 2, \ldots, N)$ masa m_j podvrgnutih holonomnim reonomnim idealnim vezama, sa n stepeni slobode. Neka je položaj tog sistema određen sa n nezavisnih generalisanih koordinata $q_\alpha(\alpha=1, 2, \ldots, n)$. Vektori položaja orijentisani u odnosu na inercijalni sistem referencije mogu biti predstavljeni kao funkcije generalisanih koordinata q_α i vremena t,

$$\vec{r}_j=\vec{r}_j(q_\alpha, t); \; (j=1, 2, \ldots, N; \quad \alpha=1, 2, \ldots, n). \tag{1.1}$$

Odredićemo prvi, drugi i treći izvod po vremenu vektora položaja

$$\vec{v}_j=\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_j}{\alpha q_\alpha} \dot{q}_\alpha+\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}; \quad \vec{v}_j=\vec{v}_j(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t), \tag{1.2}$$

$$\vec{a}_j=\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta+2 \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_\alpha \partial t} \dot{q}_\alpha+\frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial t^2}, \tag{1.3}$$

$$\vec{e}_j=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha}\dddot{q}_\alpha+3\sum_{\beta=1}^{n}\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2\vec{r}_j}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial^2\vec{r}_j}{\partial q_\beta\partial t}\right]\ddot{q}_\beta+\vec{E}_3, \tag{1.4}$$

$$\vec{a}_j=\vec{a}_j(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,\ddot{q}_\alpha,t),\quad \vec{e}_j=\vec{e}_j(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,\ddot{q}_\alpha,\dddot{q}_\alpha,t).$$

Vektor $\vec{E}_3$ u relaciji (1.4) označava zbir svih članova koji ne sadrže $\ddot{q}_\alpha$ i $\dddot{q}_\alpha$.

Parcijalnim diferenciranjem izraza (1.2), (1.3) i 1.4) po $\dot{q}_\alpha$, $\ddot{q}_\alpha$, i $\dddot{q}_\alpha$ respektivno, nakon uopštavanja postupka, dobili smo prvu osnovnu kinematički relaciju

$$\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial\dot{q}_\alpha}=\frac{\partial\vec{a}_j}{\partial\ddot{q}_\alpha}=\ldots=\frac{\partial\vec{r}_j^{(k)}}{\partial q_j^{(k)}};\quad \vec{r}_j^{(k)}\equiv\frac{d^k\vec{r}_j}{dt^k},\quad q_j^{(k)}\equiv\frac{d^k q_\alpha}{dt^k}. \tag{1.6}$$

Odredimo sada parcijalni izvod vektora brzine (1.2) po generalisanoj koordinati q_β

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_\beta}=1\cdot\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2\vec{r}_j}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial^2\vec{r}_j}{\partial t\,\partial q_\beta}\right], \tag{1.6}$$

odnosno parcijalni izvod vektora ubrzanja (1.3) po generalisanoj brzini $\dot{q}_\beta$

$$\frac{\partial\vec{a}_j}{\partial\dot{q}_\beta}=2\cdot\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2\vec{r}_j}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial^2\vec{r}_j}{\partial t\,\partial q_\beta}\right], \tag{1.7}$$

i parcijalni izvod vektora $\vec{e}_j$ (1.4) po generalisanom ubrzanju $\ddot{q}_\beta$

$$\frac{\partial\vec{e}}{q\,\ddot{q}_\beta}=3\cdot\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2\vec{r}_j}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial^2\vec{r}_j}{\partial t\,\partial q_\beta}\right]. \tag{1.8}$$

Na osnovu relacija (1.6—1.8) možemo zaključiti da će se rezultat (1.6) pomnožen odgovarajućim prirodnim brojem k ($k=1,2,\ldots$) dobijati ako bilo koji k-ti izvod vektora položaja po vremenu $\vec{r}_j^{(k)}\left(\vec{r}_j^{(k)}\equiv\frac{d^k\vec{r}_j}{dt^k}\right)$ parcijalno diferenciramo po k—1 izvodu generalisane koordinate. Na osnovu toga sledi druga osnovna kinematička relacija

$$\frac{\partial\vec{r}_j^{(k)}}{\partial q^{(k-1)}}=k\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial q_\beta}. \tag{1.9}$$

Iz (1.9) za $k=1$ dobija se identičnost što i treba da bude. Pošto je

$$\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\beta}=\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\beta}(q_1,q_2,\ldots,q_n;t),$$

diferenciranjem po vremenu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\beta}=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_\beta \partial t}, \tag{1.10}$$

i vodeći računa o invarijantnosti izvoda u odnosu na red parcijalnog diferenciranja, iz (1.10) i (1.6) sledi poznata relacija, nazvaćemo je treća osnovna kinematička relacija

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\beta}=\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\beta}. \tag{1.11}$$

Na osnovu (1.5), (1.9) i (1.11) neposredno sledi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\beta}=\frac{1}{k}\frac{\partial \vec{r}_j^{(k)}}{\partial q_\beta^{(k-1)}}. \tag{1.12}$$

Koristeći tri osnovne kinematičke relacije (1.5), (1.9) i (1.11) odredićemo k-ti izvod vektora položaja $\vec{r}_j$ po vremenu i pri tome eksplicitno ćemo napisati samo one članove koji sadrže k-ti i k-1 izvod generalisanih koordinata q_β po vremenu.

Zamenom leve strane jednačine (1.6) u jednačinu (1.4) dobićemo jednostavniji izraz za treći izvod vektora položaja

$$\dddot{\vec{r}}_j\equiv\vec{e}_j=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha}\dddot{q}_\alpha+3\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\beta}\ddot{q}_\beta+\vec{E}_3. \tag{1.13}$$

U relaciji (1.13) članovi $\vec{E}_3$ i $\dfrac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\beta}$ ne sadrže izvode $\ddot{q}_\alpha$ i $\dddot{q}_\alpha$.

Ako sada izraz (1.13) diferenciramo po vremenu, vodeći računa o relaciji (1.11), dobićemo četvrti izvod po vremenu vektora položaja u obliku

$$\vec{r}_j^{(4)}=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha}q_\alpha^{(4)}+4\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\alpha}\dddot{q}_\alpha+\vec{E}_4. \tag{1.14}$$

Vektor $\vec{E}_4$ u (1.14) ne sadrži članove sa izvodima $\dddot{q}_\alpha$ i $q_\alpha^{(4)}$.

Uopštavanjem prikazanog postupka, dobićemo da je k-ti izvod vektora položaja po vremenu, proizvoljne tačke razmatranog mehaničkog sistema određen relacijom

$$\vec{r}_j^{(k)}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha}q_\alpha^{(k)}+k\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\alpha}q_\alpha^{(k-1)}\right]+\vec{E}_k. \tag{1.15}$$

Vektor $\vec{E}_k$ ne sadrži članove sa izvodima $q_\alpha^{(k-1)}$ i $q_\alpha^{(k)}$ i relacija (1.15) zadovoljava jednačine (1.5) i (1.9), a za $k=1, 2$ treba koristiti jednačine (1.2) i (1.3).

2 **Uopštavanje Lagranžeovih jednačina druge vrste.** Prvo ćemo izvršiti uopštavanje Lagranžeovih jednačina, polazeći od diferencijalnog principa drugog reda. Za holonomni sistem Gausov princip glasi [6]

$$\sum_{j=1}^{N}(-m_j\vec{a}_j+\vec{F}_j)\cdot\delta\vec{a}_j=0, \tag{2.1}$$

pri tome se predpostavlja da je $\delta\vec{r}_j=0$, $\delta\vec{v}_j=0$, $\delta t=0$ i $\delta\vec{a}_j\neq 0$.

Na osnovu relacija (1.1), (1.2), (1.3) i korišćenjem prve osnovne kinematičke relacije (1.5), možemo napisati da je

$$\delta\vec{a}_j=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\alpha}\delta\ddot{q}_\alpha, \tag{2.2}$$

tada Gausov princip (2.1) glasi

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(-m_j a_j\cdot\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\alpha}\right)+Q_\alpha\right]\delta\ddot{q}_\alpha=0, \tag{2.3}$$

gde je $Q_\alpha=\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\cdot\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\alpha}$ generalisana sila koja potiče od aktivnih sila koje dejstvuju na razmatrani sistem.

Prvu sumu u izrazu (2.3) dobićemo, polazeći od izraza za kinetičku energiju razmatranog mehaničkog sistema

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j^{\,2}. \tag{2.4}$$

Parcijalni izvod kinetičke energije (2.4) po q_α je

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial q_\alpha}. \tag{2.5}$$

Odredimo sada prvi i drugi totalni izvod kinetičke energije po vremenu

$$\dot{T}=\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\vec{a}_j, \tag{2.6}$$

$$\ddot{T}=\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{a}_j^{\,2}+\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\vec{e}_j, \tag{2.7}$$

pa su parcijalni izvodi funkcija $\dot{T}$ i $\ddot{T}$ po $\dot{q}_\alpha$ odnosno $\ddot{q}_\alpha$ uz korišćenje osnovnih kinematičkih relacija (1.5) i (1.9), određeni izrazima

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_\alpha}=\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{a}_j\cdot\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial\dot{q}_\alpha}+2\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial q_\alpha}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial\ddot{T}}{\partial\ddot{q}^\alpha}=2\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{a}_j\cdot\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\alpha}+3\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial q_\alpha}. \tag{2.9}$$

Oduzimanjem relacije (2.8) od (2.9) i uzimajući u obzir (2.5) prva suma u Gausovom principu (2.3) određena je izrazom

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\beta} = \frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}^\alpha} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}, \tag{2.10}$$

pa se Gausov princip (2.3) može napisati u obliku

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left[-\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}^\alpha} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) + Q_\alpha \right] \delta \ddot{q}_\alpha = 0. \tag{2.11}$$

Iz (2.11) sobzirom da su varijacije generalisanih ubrzanja nezavisne $\delta \ddot{q}_\alpha \neq 0$, sledi n nezavisnih jednačina

$$\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}^\alpha} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \tag{2.12}$$

a to su uopštene Lagranžeove jednačine druge vrste i zvaćemo ih *prvi oblik uopštenih diferencijalnih jednačina holonomnih reonomnih sistema.*

Drugi oblik uopštenih Lagranžeovih jednačina izvešćemo tako što ćemo eliminisati izraz $\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\alpha}$ iz relacija (2.8) i (2.9) i tada dobijamo da je

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} = 2\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_\alpha} - 3\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\alpha}, \tag{2.13}$$

pa se Gausov princip transformiše u oblik

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left[-\left(2\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_\alpha} - 3\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + Q_\alpha \right] \delta \ddot{q}_\alpha = 0,$$

odakle neposredno pošto je $\delta \ddot{q}_\alpha \neq 0$ dobijamo n nezavisnih jednačina i zvaćemo ih *drugi uopšteni oblik diferencijalnih jednačina*

$$2\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_\alpha} - 3\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} = Q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n). \tag{2.14}$$

Za razliku od svih postojećih tipova uopštenih diferencijalnih jednačina koje koriste funkcije $T^{(k)} \left(T^{(k)} \equiv \frac{d^k T}{dt^k} \right)$, jednačine (2.14) u primeni na konkretne probleme brže dovode do rezultata jer su matematičke operacije koje se izvode pojednostavljene. Inače iz naših novih uopštenih jednačina (2.12) i (2.14) lako se kombinovanjem dobijaju poznate diferencijalne jednačine Nilsena i Cenova druge vrste, dok je obrnut postupak znatno složeniji.

3. **Uopštene diferencijalne jednačine** k**-te vrste.** Dalja istraživanja u vezi sa uopštavanjem Lagranžeovih jednačina zasnovaćemo na korišćenju diferencijalnog

principa višeg reda, dobijenog uopštavanjem Lagranž-Dalamberovog principa, koji glasi

$$\sum_{j=1}^{N}(-m_j\vec{a}_j+\vec{F})\cdot\delta\vec{r}_j^{(k)}=0, \tag{3.1}$$

pri tome se predpostavlja da je

$$\delta\vec{r}_j=0,\ \delta\dot{\vec{r}}_j=0,\ldots,\ \delta\vec{r}_j^{(k-1)}=0,\ \ \delta t=0;\ \delta\vec{r}_j^{(k)}\neq 0.$$

Da bismo izveli uopštene diferencijalne jednačine k-te vrste, odredićemo prvo k-ti izvod kinetičke energije po vremenu i odgovarajući parcijalni izvod po k-tom izvodu generalisane koordinate $q_\alpha^{(k)}$. Diferenciranjem po vremenu relacije (2.7) dobićemo

$$\dddot{T}=3\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{a}_j\cdot\vec{e}_j+\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\vec{r}_j^{(4)}, \tag{3.2}$$

pa je parcijalni izvod po $\dddot{q}_\alpha$ uzimajući u obzir (1.5 i (1.9)

$$\frac{\partial\dddot{T}}{\partial\dddot{q}_\alpha}=3\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{a}_j\cdot\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\alpha}+4\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial q_\alpha} \tag{3.3}$$

Analognim postupkom se dobija

$$T^{(4)}=3\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{e}_j+4\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{a}_j\cdot\vec{r}_j^{(4)}+\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\vec{r}_j^{(5)}, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial T^{(4)}}{\partial q_\alpha^{(4)}}=4\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{a}_j\cdot\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\alpha}+5\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial q_\alpha}. \tag{3.5}$$

Na osnovu relacija (2.7), (2.9), (3.2—3.5) i uz korišćenje osnovnih kinematičkih relacija (1.5) i (1.9) sledi da je k-ti izvod kinetičke energije jednak

$$T^{(k)}=k\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{a}_j\cdot\vec{r}_j^{(k)}+\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\vec{r}_j^{(k+1)}+D_k, \tag{3.6}$$

za $k\geqslant 3$ gde je k ceo broj. Veličina D_k ne sadrži izvode generalisanih koordinata $q_\alpha^{(k)}$ i $q_\alpha^{(k+1)}$, pa na osnovu (3.2) i (3.4) sledi da je $D_3=0$, a $D_4=3\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{e}_j^{\,2}$.

Parcijalni izvod $T^{(k)}$ po $q_\alpha^{(k)}$ određen je relacijom

$$\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}}=k\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{a}_j\cdot\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\alpha}+(k+1)\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial q_\alpha}, \tag{3.7}$$

gde je $k\geqslant 1$ ceo broj.

Iz relacije (3.7) a sobzirom na (2.5) sledi da je

$$\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{a}_j\cdot\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\alpha}=\frac{1}{k}\left[\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{k}}-(k+1)\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right]. \tag{3.8}$$

Na osnovu relacije (1.15) sledi da je

$$\delta \vec{r}_j^{(k)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha^{(k)}, \tag{3.9}$$

pa se Gausov princip sobzirom na (3.8) transformiše u oblik

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ -\frac{1}{k} \left[\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - (k+1) \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] + Q_\alpha \right\} \delta q_\alpha^{(k)} = 0, \tag{3.10}$$

odakle pošto je $\delta q_\alpha^{(k)} \neq 0$ sledi n nezavisnih poznatih uopštenih jednačina

$$\frac{1}{k} \left[\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - (k+1) \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] = Q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.11}$$

D i f e r e n c i j a l n e j e d n a č i n e (3.11) prvi su izveli M a n ž e r o n i D e l e a n u i po njima nose ime. Iz jednačina (3.11) kada se stavi da je $k=1$ dobijaju se Nilsenove jednačine a za $k=2$ Cenovljeve jednačine druge vrste.

Polazeći od uopštenog Lagranž-Dalamberovog principa izvešćemo uopštene diferencijalne jednačine k-te vrste za holonomne sisteme koje će se po spoljašnjoj formi razlikovati od jednačina Manžeron-Deleanu i jednačina prvog (2.12) i drugog (2.14) uopštenog oblika.

Ako u izraz (3.7) broj k zamenimo sa $k-1$ dobićemo relaciju

$$\frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}} = (k-1) \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} + k \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\alpha}. \tag{3.12}$$

Oduzimanjem relacije (3.12) od relacije (3.7) i uzimajući pri tome u obzir (2.5) dobijamo

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - \frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}, \tag{3.13}$$

pa se princip (3.1) na osnovu (3.9) može napisati u obliku

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left[-\left(\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - \frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) + Q_\alpha \right] \delta q_\alpha^{(k)} = 0, \tag{3.14}$$

odakle zbog $\delta q_\alpha^{(k)} \neq 0$ sledi n nezavisnih *uopštenih diferencijalnih jednačina k-te vrste*

$$\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - \frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.15}$$

koje važe za svako $k \geqq 2$.

Uopštene jednačine (3.15) razlikuju se od jednačina Mažeron-Deleanu (3.11). Iz jednačina za $k=2$ slede kao specijalan slučaj uopštene jednačine prvog oblika (2.12).

Izvešćemo još jedne uopštene jednačine k-te vrste tako što ćemo iz relacija (3.7) i (3.12) eliminisati izraz $\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\alpha}$ i dobićemo

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} = k \frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - (k+1) \frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}}, \tag{3.16}$$

što prevodi princip (3.1) u oblik

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ -\left[k \frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - (k+1) \frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}} \right] + Q_\alpha \right\} \delta q_\alpha^{(k)} = 0, \tag{3.17}$$

odakle zbog $\delta q_\alpha^{(k)} \neq 0$ dobijamo n nezavisnih *uopštenih diferencijalnih jednačina k-te vrste*

$$k \frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - (k+1) \frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}} = Q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.18}$$

$k \geqslant 1$, ceo broj.

Iz uopštenih jednačina (1.18) za $k=1$ slede jednačine Nilsena, a za $k=2$ slede uopštene jednačine drugog oblika (2.14).

Na osnovu postupka sprovedenog pri formiranju uopštenih diferencijalnih jednačina kretanja (3.11), (3.15) i (3.18) nameće se kao potreba da se izvrši generalno uopštavanje diferencijalnih jednačina k-te vrste za holonomne sisteme. U tom cilju zamislimo da smo ispisali svih k relacija (3.7) za svako $k \geqslant 1$. Sabirajući sve tako dobijene relacije i uzimajući u obzir (2.5), dobićemo sledeću novu relaciju za generalisanu inercijalnu silu

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} = \frac{2}{k(k+1)} \left[\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} + \cdots + \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{k(k+3)}{2} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right], \tag{3.19}$$

pa uopšteni Lagranž-Dalamberov princip sada glasi

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ -\frac{2}{k(k+1)} \left[\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} + \cdots + \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{k(k+3)}{2} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] + Q_\alpha \right\} \delta q_\alpha^{(k)} = 0, \tag{3.20}$$

odakle obzirom da je $\delta q_\alpha^{(k)} \neq 0$ dobijamo n nezavisnih uopštenih diferencijalnih jednačina

$$\frac{2}{k(k+1)} \left[\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} + \cdots + \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{k(k+3)}{2} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] = Q_\alpha . \tag{3.21}$$

$$(k \geqslant 1; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

Generalno uopštene jednačine (3.21) mogu se napisati *u sažetijem obliku*, ako sakupimo prvih k članova u zagradi i napišemo ih u vidu sume od k elemenata, tako da imamo

$$\frac{2}{k(k+1)} \left[\sum_{s=0}^{k-1} \frac{\partial T^{(k-s)}}{\partial q_\alpha^{(k-s)}} - \frac{k(k+3)}{2} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] = Q_\alpha, \tag{3.22}$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

$k \geqslant 1$, ceo broj.

Generalno uopštene jednačine (3.22) daju odgovor o mogućnosti formiranja većeg broja uopštenih diferencijalnih jednačina k-te vrste različitih spoljašnjih oblika, za holonomne sisteme. Na osnovu rezultata ostvarenih u ovom radu očigledno je da je broj uopštenih diferencijalnih jednačina različitih spoljašnjih oblika vezan za familiju funkcija $T^{(k)}$ koje koristimo pri njihovom izvođenju. Prema tome iz jednačina (3.22) sve ostale uopštene jednačine slede kao specijalni slučajevi. Na primer za $k=1$ slede Nilsenove jednačine. Jednačine Manžeron-Deleanu svih vrsta dobijaju se iz (3.22) kada se izvrši odgovarajući izbor broja k i saglasno tome određuje se brojni zbir broja s ($s=0, 1, 2, \ldots, k-1$). Posle toga na osnovu algoritma kojeg smo utvrdili treba izvršiti obične matematičke operacije i dobiće se odgovarajuće diferencijalne jednačine.

Na taj način *generalno uopštenje jednačina* (3.22) zajedno sa generalizacijom Lagranžeovih jednačina što je dato u radu [7], predstavlja potpun odgovor o uopštavanju Lagranžeovih jednačina za holonomne reonomne sisteme.

Literatura

[1] Добронравов, В. В., *Основи механики нехолономных систем*, Высшая школа. Москва 1970.

[2] Ценов, И., *Об одной новой форме уравнений аналитической динамики*, Докл. АН. СССР, **89**, I, 2I—24, 1958.

[3] Лурье, А. И., *Аналитическая механика*, Физматгиз, Ленинград 1961,

[4] Mangeron, D. — Deleanu, *S.*, *Sur une alasse d'equations de la mécanique analitique su sens de I. Tzenoff* Докл. Болг. А. Н. Т. **15**, Н1, 9—12, 1962.

[5] Nielsen, J., *Vorlesungen über elementare Mechanik*, Berlin, Springer 1935.

[6] Andjelić, T., Stojanović, R., *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd 1965.

[7] Mićević, D., *Modeli neholonomnih dinamičkih sistema*, Doktorska disertacija, Mašinski fakultet u Beogradu 1978.

НОВЫЕ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Резюме

В работе на основании выведеных основных кинематических соотношений, представляющих собой обобщение известных кинематических соотношений, и на основании принципа Гауса и обобщеного принципа Лагранж-Даламбера произведено уравнений Лагранжа второго рода для холономных реономных систем. Составлено несколько видов обобщеных дифференциальных уравнений движения (2.12-2.14), (3.15-3.18), произведено генеральное обобщения и получено семейство обобщеных дифференци-

альных уравнений движения (3.22) для голономных систем, из каторых в качестве специальных случаев следуют все до нынешнего времени известные обобщеные уравнения для голономных систем. Все это представляет собой ответ авторов на вопрос о возможностях образования большего числа обобщеных уравнений Лагранжа, отличающихся между собой по внешнему виду.

Dr Dušan Mićević
Građevinski fakultet
11000 Beograd

Dr Lazar Rusov
Mašinski fakultet
11000 Beograd