Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

O VARIRANJU KVAZIKOORDINATA

Mirjana M. Lukačević i *Vukman M. Čović*

1. Razmotrimo holonomni skleronomni konzervativni dinamički sistem sa n stepeni slobode čiji položaj u proizvoljnom trenutku vremena t određujemo generalisanim koordinatama q^i. U radu ćemo latinskim slovima obeležavati indekse koji uzimaju vrednosti od 1 do n, i koristićemo konvenciju o sabiranju.

Pored generalisanih brzina sistema, $\dot{q}^i$, uvedimo u razmatranje i kvazibrzine relacijama

$$\dot{\pi}^i = a^i_j \dot{q}^j, \tag{1}$$

gde koeficijenti a^i_j zavise samo od generalisanih koordinata sistema: $a^i_j = a^i_j(q^k)$. Ako pretpostavimo da je transformacija (1) nesingularna, iz nje sledi

$$\dot{q}^i = b^i_j \dot{\pi}^j, \tag{2}$$

pri čemu je $a^i_j b^j_k = \delta^i_k$, gde je δ^i_k Kronekerov simbol.

I u ovome radu, kao i u prethodnim ([1], [2]), polazimo od stava da su operatori variranja i diferenciranja, primenjeni kako nad stvarnim koordinatama, tako i nad kvazikoordinatama, komutativni, tako da važi

$$\frac{d}{dt}(\delta \pi^i) - \delta \dot{\pi}^i = 0. \tag{3}$$

Ako prihvatimo, kao što je u literaturi uobičajeno, da su varijacije kvazikoordinata π^i određene izrazima

$$\delta\pi^i = a^i_j \delta q^j, \tag{4}$$

diferencijalne jednačine kretanja razmatranog sistema slede iz varijacionog zadatka

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta L + \lambda_i (\delta\pi^i - a^i_j \delta q^j)]\, dt = 0, \tag{5}$$

gde su t_0 i t_1 utvrđeni trenuci vremena koji odgovaraju početnom i krajnjem položaju sistema, $\lambda_i=\lambda_i(t)$ — Lagranževi množioci, i gde je varijacija Lagranževe funkcije $L=L(q^i, \dot{q}^i)$ određena izrazom (upor. [1])

$$\delta L=\delta\tilde{L}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\pi}^j}\left(\frac{\partial a_i^j}{\partial q^s}-\frac{\partial a_s^j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^s\delta q^i, \tag{6}$$

pri čemu je

$$\tilde{L}=\tilde{L}(q^i, \dot{\pi}^i)=L_{\left(\dot{q}^i=b_j^i\dot{\pi}^j\right)}.$$

Vrednosti generalisanih koordinata su utvrđene za $t=t_0$ i $t=t_1$.

Primetimo da varijacioni zadatak (5) nije formulisan kao pravi varijacioni zadatak, tj. da ne izražava uslov stacionarnosti funkcionala.

Potražimo sada uslove pod kojima varijacioni zadatak (5) prelazi u pravi varijacioni zadatak, koji se može izraziti jednačinom

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}[\tilde{L}+\mu_i(\dot{\pi}^i-a_j^i\dot{q}^j)]\,dt=0, \tag{7}$$

gde su Lagranževi množioci označeni sa $\mu_i=\mu_i(t)$.

U tome cilju, unesimo prvo izraz (6) u (5):

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta\tilde{L}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\pi}^j}\left(\frac{\partial a_i^j}{\partial q^s}-\frac{\partial a_s^j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^s\delta q^i+\lambda_j(\delta\pi^j-a_i^j\delta q^i)\right]dt=0. \tag{8}$$

Iz Ojlerovih jednačina problema (8) koje odgovaraju kvazikoordinatama, dobijamo

$$\lambda_j=\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\pi}^j},$$

pa se (8) može napisati u obliku

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta\tilde{L}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\pi}^j}\left(\frac{\partial a_i^j}{\partial q^s}-\frac{\partial a_s^j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^s\delta q^i+\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\pi}^j}(\delta\pi^j-a_i^j\delta q^i)\right]dt=0. \tag{9}$$

Dalje, kako je

$$\delta q^i_{(t_0)}=\delta q^i_{(t_1)}=0,$$

pa onda zbog (4) i

$$\delta\pi^i_{(t_0)}=\delta\pi^i_{(t_1)}=0,$$

iz (9) sledi

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta\tilde{L}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\pi}^j}\left(\frac{\partial a_i^j}{\partial q^s}-\frac{\partial a_s^j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^s\delta q^i-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\pi}^j}\frac{d}{dt}(\delta\pi^j-a_i^j\delta q^i)\right]dt=0,$$

odakle, posle kraćeg računa, pri čemu koristimo jednačinu (3), kao i činjenicu da možemo pisati

$$a_i^j \delta \dot{q}^i = \delta (a_i^j \dot{q}^i) - \dot{q}^i \frac{\partial a_i^j}{\partial q^s} \delta q^s,$$

najzad dobijamo

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta \tilde{L} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\pi}^j} \delta (\dot{\pi}^j - a_i^j \dot{q}^i) \right] dt = 0. \tag{10}$$

Rešavanjem varijacionog problema (7), koji je moguće napisati i u obliku

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta \tilde{L} + \mu_j(t)\, \delta (\dot{\pi}^j - a_i^j \dot{q}^i)]\, dt = 0,$$

u našem prethodnom radu (v. [2]), dobili smo

$$\mu_j(t) = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\pi}^j},$$

pa je onda jasno da jednačinu (10) možemo napisati u obliku

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta \tilde{L} + \mu_j(t)\, \delta (\dot{\pi}^j - a_i^j \dot{q}^i)]\, dt = 0,$$

tj. u obliku pravog varijacionog problema, izraženog jednačinom (7):

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\tilde{L} + \mu_j (\dot{\pi}^j - a_i^j \dot{q}^i)]\, dt = 0.$$

Međutim, moramo da istaknemo sledeće: dok se pri varijacijama (4), kojima odgovara varijacioni problem (5), transformacije (2) ne održavaju, dotle je varijacioni problem (7) formulisan tako da se transformacije (2) održavaju i na variranim trajektorijama, tj. formulisan je tako da važi

$$\delta \dot{\pi}^k = \delta (a_j^k \dot{q}^j),$$

odakle lako dobijamo za varijacije kvazikoordinata izraze

$$\delta \pi^k = a_j^k \delta q^j - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial a_s^k}{\partial q^j} - \frac{\partial a_j^k}{\partial q^s} \right) \dot{q}^j \delta q^s\, dt. \tag{11}$$

To znači da problem (5) može da se formuliše kao pravi varijacioni problem (7) samo onda ako se način variranja kvazikoordinata izmeni u skladu sa (11).

Naš dalji cilj u ovome radu će biti da uporedimo relacije (4) i (11), kojima su, na dva različita načina, određene varijacije kvazikoordinata.

2. Potražimo prvo uslove pod kojima će se jednačine (4) i (11) poklapati. Uvedimo, radi kraćeg pisanja, oznake

$$\beta^i_{js}=\frac{\partial a^i_s}{\partial q^j}-\frac{\partial a^i_j}{\partial q^s}, \tag{12}$$

pa ćemo izraze pod integralima u (11) moći napisati u obliku

$$\beta^i_{js}\, dq^j\, \delta q^s. \tag{13}$$

Očigledno je da će se varijacije (11) poklapati sa varijacijama (4) ukoliko su izrazi (13) jednaki nuli, a to je moguće u sledećim slučajevima:

a) Kada su koeficijenti $\beta^i_{js}=0$, tj. kada je

$$\frac{\partial a^i_s}{\partial q^j}-\frac{\partial a^i_j}{\partial q^s}=0, \tag{14}$$

a to znači kada su relacije (1) integrabilne. Takav slučaj ćemo, kao trivijalan, isključiti odmah.

b) Vodeći računa da je sistem β^i_{js} antisimetričan po donjim indeksima, lako je pokazati da uslovi

$$\beta^i_{js}\, dq^j\, \delta q^s=0, \tag{15}$$

u slučaju da indeksi i, j i s uzimaju vrednosti 1 i 2 (sistem sa dva stepena slobode) dovode do

$$\delta q^s=\lambda\, dq^s, \tag{16}$$

gde je λ skalarna veličina.

Varijacije (16) dovode do variranja trajektorije u sebe samu, te takav slučaj, sa stanovišta Hamiltonovog principa, moramo odbaciti kao neinteresantan.

Razmotrimo, kao ilustraciju ovoga slučaja, materijalni sistem koji se sastoji od jedne materijalne tačke koja se kreće u ravni. Birajući za generalisane koordinate polarne koordinate r i φ, i uvodeći kao kvazibrzinu sektorsku brzinu

$$\dot{A}=\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}, \tag{17}$$

dobićemo kao varijaciju tipa (11):

$$\delta A=\frac{1}{2}r^2\,\delta\varphi-\int_{t_0}^{t} r\,(\dot{r}\,\delta\varphi-\dot{\varphi}\delta\, r)\,dt, \tag{18}$$

što znači da u ovome slučaju relacije (15) prelaze u

$$r\,(dr\,\delta\varphi-d\varphi\,\delta\, r)=0, \tag{19}$$

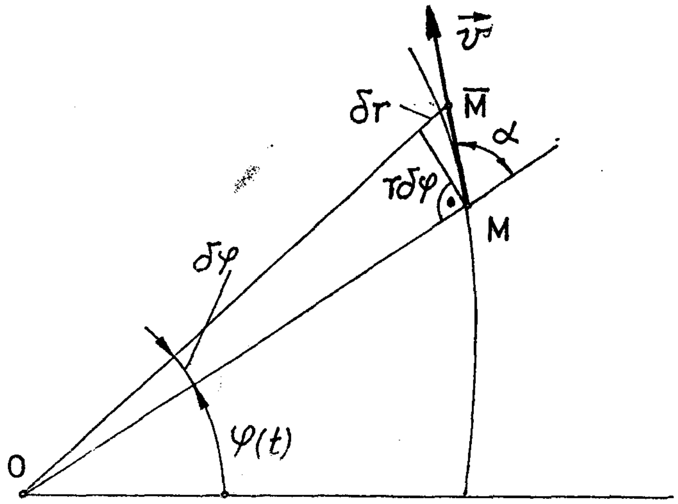
odakle je

$$\frac{\delta r}{r\,\delta\varphi}=\frac{\dot{r}}{r\,\dot{\varphi}},$$

tj., prema sl. 1,

$$\delta r = r\, \delta\varphi \operatorname{cotg} \alpha,$$

pa je očigledno da u tome slučaju varijacije δr i $\delta\varphi$ dovode do tačke $\overline{M}$ koja je opet na trajektoriji (v. sl. 1)



Slika 1

U slučaju dinamičkog sistema sa brojem stepeni slobode većim od dva, uslovi (15) ne moraju dovesti do (16), ali i tada oni izražavaju neku zavisnost između varijacija δq^i, što Hamiltonov princip ne prihvata.

Iz svega izloženog zaključujemo da je, osim u trivijalnom slučaju, kada su veze (1) integrabilne, neophodno izmeniti način variranja kvazikoordinata u skladu sa (11), da bi varijacioni zadatak (5) mogao da pređe u pravi varijacioni problem (7).

Razmotrimo, na kraju, opet na primeru sistema od jedne materijalne tačke koja se kreće u ravni, geometrijsku interpretaciju razlike varijacija kvazikoordinata, definisanih jednačinama (4), odnosno jednačinama (11).

Ako kao generalisane koordinate uvedemo polarne koordinate r i φ, i ako uvedemo kvazibrzinu jednačinom (17), pomenutu razliku izražava integral

$$\int_{t_0}^{t} r(\dot{\varphi}\,\delta r - \dot{r}\,\delta\varphi)\, dt. \tag{20}$$

Varijacija tipa (4), tj. varijacija

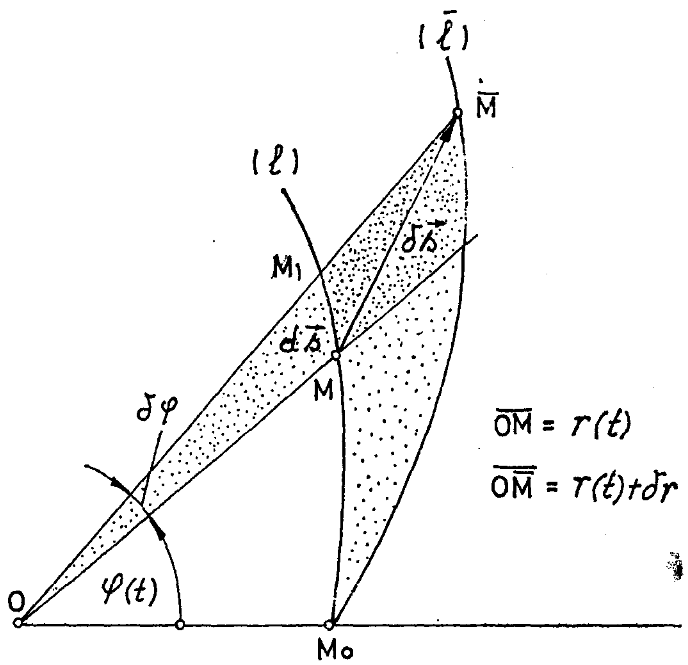
$$\delta A = \frac{1}{2} r^2\, \delta\varphi, \tag{21}$$

je, očigledno, na sl. 2 predstavljena površinom sektora OMM_1, a varijacija tipa (11), koju ćemo u ovome slučaju, da bismo je razlikovali od (21), označiti sa $\underline{\delta A}$, tj. varijacija

$$\underline{\delta A} = \frac{1}{2} r^2 \delta\varphi + \int_{t_0}^{t} r(\dot{\varphi}\delta r - \dot{r}\delta\varphi)\, dt, \tag{22}$$

površinom omeđenom lucima $\widehat{M_0 M}$, $\widehat{M_0 \overline{M}}$ i dužima $\overline{OM}$ i $\overline{O\overline{M}}$ (v. sl. 2).

Razlika ovih varijacija, jednaka integralu (20), treba, dakle, da bude predstavljena površinom ograničenom lucima $\widehat{M_0 M_1}$, $\widehat{M_0 \overline{M}}$ i duži $M_1 \overline{M}$, površinom koju ćemo označiti sa δA_1 (v. sl. 2).



Slika 2

I zaista, imajući u vidu da se element $d(\delta A_1)$ površine δA_1 može izraziti kao

$$d(\delta A_1) = (\overrightarrow{\delta s} \times \overrightarrow{ds}) \cdot \vec{k},$$

gde je, ako sa $\vec{u}$ i $\vec{p}$ označimo jedinične vektore polarnog sistema,

$$\overrightarrow{\delta s} = \delta r\, \vec{u} + r\, \delta\varphi\, \vec{p}, \quad \overrightarrow{ds} = dr\, \vec{u} + r\, d\varphi\, \vec{p}, \quad \vec{k} = \vec{u} \times \vec{p},$$

dobićemo

$$d(\delta A_1) = r\, d\varphi \delta r - r dr\, \delta\varphi = r\, (\dot{\varphi}\delta r - \dot{r}\, \delta\varphi)\, dt,$$

pa je očigledno da će biti

$$\delta A_1 = \int_{(\delta A_1)} d(\delta A_1) = \int_{t_0}^{t} r(\dot{\varphi}\,\delta r - \dot{r}\,\delta\varphi)\,dt,$$

što smo i hteli da pokažemo.

Literatura

[1] Čović V. — Lukačević M., *Prilog analitičkoj mehanici neholonomnih sistema*, rad primljen za štampu u Glasu Odeljenja prirodno-mat. nauka SANU.

[2] Čović V. — Lukačević M., *On the second form of Hamilton's principle*, rad primljen za štampu u Biltenu Odeljenja prirodno-matematičkih nauka SANU.

[3] Đukić Đ., *A Variational Principle Involving a Conditional Extremum for the Hamel-Boltzmann Equations of Motion*, Acta Mechanica **25**, Notes, 1976.

SUR LA VARIATION DES QUASICOORDONNÉES

Résumé

On analyse le problème variationnel (5) auquel correspondent les variations des quasicoordonnées (4) et on constate qu'il peut être réduit au problème direct du calcul des variations, qui exprime la condition d'extremalité d'un fonctionnel, à condition de changer le mode de variation des quasicoordonnées en accord avec les relations (11).

On compare ensuite les relations (4) et (11) qui définissent les variations des quasicoordonnées de deux manières différentes. On constate qu'elles déterminent les mêmes variations seulement quand les relations (1) sont intégrables.

On donne, enfin, à l'aide d'un exemple, l'interprétation géométrique de la différence des variations des quasicoordonnées (4) et (11).

Dr Mirjana M. Lukačević Mašinski fakultet 11000 Beograd

Dr Vukman M. Čović Mašinski fakultet 11000 Beograd