Зборник радова Математичкоi института, Нова серuja, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

NEKE OSOBINE STRUJNIH LINIJA TERMODINAMIČKOG NEVISKOZNOG FLUIDA U JEDNOM RIMANSKOM PROSTORU ČIJA JE METRIKA KONFORMNA METRICI PROSTOR-VREMENA

Mirjana M. Lukačević

1. Razmotrimo prvo termodinamički neviskozni fluid u prostor-vremenu V_4, u odnosu na dati koordinatni sistem x^α $(\alpha=1, 2, 3, 4)$, gde su x^i $(i=1, 2, 3)$ koordinate prostornog tipa, a x^4 — vremenska koordinata. U radu ćemo indekse koji uzimaju vrednosti od 1 do 4 obeležavati grčkim slovima, indekse koji idu od 1 do 3 — slovima latinice, i koristićemo konvenciju o sabiranju. Opredelićemo se za takve fizičke jedinice pri kojima je brzina svetlosti jednaka jedinici. Koordinate osnovnog metričkog tenzora prostora V_4 u odnosu na sistem x^α ćemo označiti sa $g_{\alpha\beta}$, uzimajući pri tome da osnovna metrička forma $g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ ima signaturu $+++-$.

Istoriju razmatranog fluida u V_4 predstavlja kongruencija krivih linija vremenskog tipa — strujnih linija fluida, čije jednačine u odnosu na dati koordinatni sistem možemo napisati u obliku

$$x^\alpha = x^\alpha (\xi^i, s), \tag{1}$$

gde su ξ^i prostorni parametri, vezani za određeni delić fluida, a s — parametar vremenskog tipa.

Četvorobrzina fluida je tada određena izrazom

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}. \tag{2}$$

Ako usvojimo da parametar vremenskog tipa s predstavlja sopstveno vreme duž svetske linije delića određenog prostornim parametrima ξ^i, tj. ako uzmemo da je

$$ds^2 = -g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{3}$$

četvorobrzina će zadovoljavati uslov

$$u^\alpha u_\alpha = -1. \tag{4}$$

Materijalno i energetsko stanje fluida u V_4 opisuje tenzor energije oblika

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}, \tag{5}$$

gde je ρ sopstvena totalna gustina fluida, a p — sopstveni pritisak.

Podvucimo odmah da ćemo u toku rada, pored sopstvene totalne gustine ρ, koristiti i sopstvenu materijalnu gustinu, koju ćemo označiti sa r, pri čemu su ove dve veličine vezane jednačinom ([1], [2])

$$\rho = r(1+\varepsilon), \tag{6}$$

gde je ε specifična unutrašnja energija fluida.

Uzećemo r i p za nezavisno promenljive termodinamičke veličine, i jednačinu

$$\varepsilon = \varepsilon(r, p) \tag{7}$$

za datu jednačinu stanja fluida.

Uvedimo sada, kao indeks termodinamičkog fluida, funkciju ([3], [4])

$$f = \frac{1}{r}(\rho + p) = 1 + \varepsilon + \frac{p}{r}. \tag{8}$$

Tada tenzor energije (5) dobija oblik

$$T_{\alpha\beta} = rfu_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta}. \tag{9}$$

Uslov konzervativnosti tenzora energije, koji se izražava jednačinom $\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0$, gde ∇_α označava kovarijantni izvod, dovodi do diferencijalnih jednačina strujnih linija fluida

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta + \frac{\partial_\alpha p}{rf}(\delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta) = 0, \tag{10}$$

gde je sa ∂_α obeležen parcijalni izvod po x^α, a sa δ^α_β Kronekerov simbol.

Sopstvena apsolutna temperatura T fluida i njegova sopstvena specifična entropija S uvode se termodinamičkom relacijom koja je posledica prvog i drugog zakona termodinamike ([5], [6])

$$T\,dS = d\varepsilon + p\,d\left(\frac{1}{r}\right), \tag{11}$$

koja, kada se uzme u obzir jednačina (7), dobija oblik

$$T\,dS = df - \frac{1}{r}\,dp. \tag{12}$$

Iz poslednje jednačine sledi

$$\partial_\alpha p = r\,\partial_\alpha f - r\,T\,\partial_\alpha S + A_\alpha,$$

gde je A_α vektor koji zadovoljava uslov $A_\alpha u^\alpha = 0$. Jasno je da taj uslov dozvoljava da vektor A_α bude nula-vektor, i mi ćemo naša dalja razmatranja ograničiti na taj slučaj, što znači da ćemo prihvatiti da se gradijent pritiska može izraziti kao

$$\partial_\alpha p = r\,\partial_\alpha f - r\,T\,\partial_\alpha S, \tag{13}$$

ne ulazeći na ovome mestu u to koji je fizički smisao takvog ograničenja.

Tada jednačine strujnih linija (10) možemo napisati u obliku

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta + \left(\frac{\partial_\alpha f}{f} - \frac{T}{f}\,\partial_\alpha S\right)(\delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta) = 0. \tag{14}$$

2. Uvedimo sada, pomoću indeksa fluida (8), u razmatranje jedan četvorodimenzioni rimanski prostor, koji ćemo označiti sa $\overline{V}_4$, čija je metrika konformna metrici prostor-vremena, i povezana je sa njom jednačinom (vidi [7])

$$\overline{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = f^2 g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{15}$$

tako da je

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = f^2 g_{\alpha\beta} \quad \text{i} \quad \overline{g}^{\alpha\beta} = f^{-2} g^{\alpha\beta}. \tag{16}$$

Definišimo [7] u prostoru $\overline{V}_4$ vektor

$$\overline{C}_\alpha = f u_\alpha, \tag{17}$$

za koji se lako utvrđuje da je jediničnog intenziteta u tome prostoru.

Posle kraćeg računa, koji ovde nećemo prikazati, za kovarijantni izvod $\overline{\nabla}_\alpha \overline{C}_\beta$ (gde $\overline{\nabla}_\alpha$ označava operator kovarijantnog diferenciranja u odnosu na metriku (15)) dobijamo

$$\overline{\nabla}_\alpha \overline{C}_\beta = f \nabla_\alpha u_\beta - u_\alpha \partial_\beta f + g_{\alpha\beta} u^\gamma \partial_\gamma f,$$

tako da iz (14) sledi

$$\overline{C}_\alpha \overline{\nabla}_\alpha \overline{C}_\beta = \frac{T}{f} \partial_\alpha S (\delta^\alpha_\beta + \overline{C}^\alpha \overline{C}_\beta). \tag{18}$$

Kako je $\overline{C}^\alpha$ jedinični tangentni vektor strujne linije preslikane na prostor $\overline{V}_4$, očigledno je da izraz na levoj strani jednačine (18) predstavlja izvod vektora $\overline{C}_\beta$ u pravcu te linije, te prema prvom Freneovom obrascu (za rimanski prostor $\overline{V}_4$) možemo napisati

$$\overline{C}^\alpha \overline{\nabla}_\alpha \overline{C}_\beta = \overline{\varkappa}_{(1)} \overline{n}_{(1)\beta}, \tag{19}$$

gde je $\overline{\varkappa}_{(1)}$ prva krivina, a $\overline{n}_{(1)\beta}$ prva normala strujne linije posmatrane u odnosu na metriku (15).

S obzirom na (19), iz (18) dobijamo

$$\partial_\beta S = \frac{f}{T} \overline{\varkappa}_{(1)} \overline{n}_{(1)\beta} - \overline{C}^\alpha \partial_\alpha S\, \overline{C}_\beta, \tag{20}$$

odakle izvodimo sledeće zaključke:

a) U slučaju da se gradijent pritiska fluida izražava jednačinom (13), dvodimenzioni element određen tangentom i prvom normalom strujne linije preslikane na prostor čija je metrika određena jednačinom (15) sadrži gradijent sopstvene specifične entropije fluida.

b) Ako se, pod uslovom da važi (13), strujne linije fluida preslikavaju u geodezijske linije prostora $\overline{V}_4$, čija je metrika određena jednačinom (15), tada je ili entropija konstantna, ili su preslikane strujne linije upravne na trodimenzioni potprostor prostora $\overline{V}_4$, određen jednačinom $S=\text{const}$. Entropija se tada menja samo duž strujnih linija fluida, tj. u pravcu vektora $\overline{C}^\alpha = f^{-1} u^\alpha$.

c) Ako se radi o izentropskom strujanju, ili su preslikane strujne linije upravne na trodimenzioni potprostor prostora $\overline{V}_4$, određen jednačinom $S=\text{const.}$, onda su preslikane strujne linije geodezijske linije prostora $\overline{V}_4$.

Zaista, zbog upravnosti na potprostor $S=\text{const}$, ispunjen je uslov

$$\partial_\beta S = \lambda \bar{C}_\beta,$$

te iz (20) sledi da je $\bar{\varkappa}_{(1)}=0$, što znači, prema (19), da je i $\bar{C}^\alpha \bar{\nabla}_\alpha \bar{C}_\beta=0$, tj. da se vektor $\bar{C}_\beta$ paralelno prenosi duž strujne linije preslikane na prostor $\bar{V}_4$.

Najzad, posle množenja jednačine (20) vektorom $n^\beta_{(1)}$ i sabiranja po indeksu β, dobija se za prvu krivinu $\bar{\varkappa}_{(1)}$ preslikane strujne linije sledeća vrednost

$$\bar{\varkappa}_{(1)} = \frac{T}{f} \bar{n}^\beta_{(1)} \partial_\beta S. \tag{21}$$

Na kraju istaknimo da nije teško uočiti da zaključak a) važi i u opštijem slučaju, kada je $\partial_\alpha p = r\partial_\alpha f - rT\partial_\alpha S + A_\alpha$, gde je A_α vektor koji u prostoru $\bar{V}_4$ ima pravac prve normale preslikane strujne linije, tj. koji ispunjava uslov $A_\alpha = \lambda \bar{n}_{(1)\alpha}$, gde je λ proizvoljni skalar.

Literatura

[1] Lichnerowicz, A., Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. V, No. **1**, 1966.

[2] Schutz, B. F. Jr., Phys. Rev. D, vol. **2**, No. **12**, 1970.

[3] Taub, A. H., Arch. Ratl. Mech. Anal., **3**, 312, 1959.

[4] Lichnerowicz, A., Comm. Math. Phys., Vol. **1**, No. **1**, 1965.

[5] Taub, A. H. Phus. Rev. (1956) 103.

[6] Ray, J. R., J. Math. Phys., Vol. **13**, No. **10**, October 1972.

[7] Lichnerowicz, A., *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme*, Masson, Paris, 1955.

[8] Anđelić, T. P., *Tenzorski račun*, Naučna knjiga, Beograd, 1952.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES LIGNES DE COURANT D'UN FLUIDE PARFAIT THERMODYNAMIQUE DANS UN ESPACE RIEMANNIEN DE MÉTRIQUE CONFORME À LA MÉTRIQUE DE L'ESPACE-TEMPS

Résumé

On analyse la distribution de l'entropie spécifique par rapport aux lignes de courant d'un fluide parfait thermodynamique dans un espace riemannien muni d'une métrique conforme à la métrique de l'espace-temps et liée à celle-ci par la relation (15). L'analyse est limitée au cas où le gradient de pression du fluide satisfait à la condition (13).

Dr Mirjana M. Lukačević
Mašinski fakultet
11000 Beograd