Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique. Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

O PROŠIRENOM SISTEMU RELATIVISTIČKIH KINEMATIČKIH VELIČINA S NEKIM PRIMENAMA NA MAGNETOHIDRODINAMIKU

Ilija Lukačević

U ovom radu posmatraju se u osnovi dva vektorska polja koja obrazuju putanje u Svetu bilo opšte ili specijalne relativnosti. Polazi se, dakle od jedne indefinitne metrike čiji je osnovni tenzor $g_{\alpha\beta}$ načelno rimanski (simetrične povezanosti $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$). Jedno od tih polja je vremensko i jediničnog intenziteta te predstavlja, načelno uzev, četvorobrzine, dok je drugo prostorno i promenljivog intenziteta. Razlaganje kovarijantnog izvoda četvorobrzine vrši se po poznatoj kinematičkoj shemi, a onda se ista primenjuje na prostorne vektore, čime se dobijaju simetrični obrasci razlaganja i obrazuje ono što nazivamo prošireni sistem kinematičkih veličina. Treba odmah reći da je u slučaju jediničnog polja prostornih vektora ovakva podela već vršena u radu [2]. S druge strane, u našim ranijim radovima [5], [7] mi smo izučavali uzajamne, ili relativne kinematičke veličine i primenjivali ih. Treba reći i to da su vremenski vektori promenljivog intenziteta takođe posmatrani, s nešto drukčijim pristupom, u radu [6]. Bitan motiv našeg pristupa leži u primeni na magnetohidrodinamičko elektromagnetno polje, jer je simetrija osnovnih jednačina u odnosu na četvorobrzinu i magnetno polje, odnosno indukciju, takva da omogućava dopunu nekih od osnovnih zaključaka o odnosu kinematičkih veličina i magnetnog polja zaključcima o odnosu proširenih kinematičkih veličina i četvorobrzine.

* * *

Posmatrajmo metriku opšte relativnosti V_4, koja je po pretpostavci orijentabilna, diferencijabilna, lokalno svodljiva na kanonski oblik $(+, +, +, -)$ i simetrično povezana, odnosno rimanska. Neka metrički tenzor bude triput diferencijabilan na V_4 (zbog Bianchi-eve identičnosti). Posmatrajmo dva vektorska polja u^α i ξ^α. Neka u^α bude jedinični vremenski vektor a ξ^α prostorni vektor proizvoljnog intenziteta. Dakle

$$g_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta = -1, \qquad g_{\varepsilon\beta}\, \xi^\alpha \xi^\beta = \varphi^2, \tag{1.1}$$

gde su u^α i ξ^α diferencijalbilni bar do drugog reda izvoda. Navešćemo neke već dobro poznate sopstvene kinematičke veličine [4], ekspanziju $\vartheta_{\alpha\beta}$ i njoj odgovarajuće, sklarnu ekspanziju ϑ, brzinu deformacije $\sigma_{\alpha\beta}$ i rotaciju $\omega_{\alpha\beta}$

$$\vartheta_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha + u_\alpha w_\beta + u_\beta w_\alpha, \tag{1.2}$$

$$\vartheta = \frac{1}{2}\, \vartheta^{\gamma}_{\gamma} = \nabla_{\gamma} u^{\gamma}, \tag{1.3}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, \vartheta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\, \vartheta\, h_{\alpha\beta}, \tag{1.4}$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, (\nabla_{\alpha} u_{\beta} - \nabla_{\beta} u_{\alpha} + u_{\alpha} w_{\beta} - u_{\beta} w_{\alpha}), \tag{1.5}$$

gde je

$$w_{\alpha} = u^{\gamma} \nabla_{\gamma} u_{\alpha}, \qquad h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_{\alpha} u_{\beta}, \tag{1.6}$$

ω_{α} je vektor ubrzanja a $h_{\alpha\beta}$ tenzor projektor upravan na u^{α}. Svi prethodni vektori i tenzori zadovoljavaju sledeće skoro očigledne uslove

$$h_{\alpha\beta}\, u^{\beta} = \vartheta_{\alpha\beta}\, u^{\beta} = \sigma_{\alpha\beta}\, u^{\beta} = \omega_{\alpha\beta}\, u^{\beta} = 0, \tag{1.7a}$$

$$w_{\beta}\, u^{\beta} = \sigma^{\beta}_{\beta} = 0. \tag{1.7b}$$

(1.7a) pokazuje da se radi o čisto prostornim, trodimenzionim tenzorima i vektorima. Brzina deformacije je, štaviše, tenzor bez traga. Možemo odmah primetiti da je tenzor ekspanzije $\vartheta_{\alpha\beta}$ definisan na osnovu lokalnog odstupanja prostornih odstojanja i uglova od Bornove krutosti a u odnosu na svetske linije kongruencije određene poljem u^{α}. Sva su prethodna izvođenja nastala, ustvari, na bazi Lie-ovog izvoda $\mathcal{L}_{u}$ [1], u odnosu na u^{α}, tenzora projektora $h_{\epsilon\beta}$

$$\vartheta_{\alpha\beta} = \mathcal{L}_{u}\, (g_{\alpha\beta} + u_{\alpha} u_{\beta}), \tag{1.8}$$

dok su ostale veličine izvedene iz toga simetričnog tenzora tako da mu odgovaraju svojim nesvodljivim predstavljanjem, dakle antisimetrijom, simetrijom i odsustvom traga.

Sada ćemo uvesti nove sopstvene veličine, analogne (1.2)—(1.6), koje odgovaraju prostornom vektorskom polju promenljivog intenziteta ξ_{α}

$$\begin{aligned}\tilde{\vartheta}_{\alpha\beta} = {} & \varphi^{2}\, (\nabla_{\alpha} \xi_{\beta} + \nabla_{\beta} \xi_{\alpha}) + g_{\alpha\beta}\, \xi^{\gamma}\, \partial_{\gamma} (\varphi^{2}) - \\ & - \xi_{\alpha} \tilde{w}_{\beta} - \xi_{\beta} \tilde{w}_{\alpha} - \frac{1}{2}\, [\xi_{\alpha}\, \partial_{\beta} (\varphi^{2}) + \xi_{\beta}\, \partial_{\alpha} (\varphi^{2})],\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{2}\, \tilde{\vartheta}^{\gamma}_{\gamma} = \varphi^{2}\, \nabla_{r}\, \xi^{\gamma} + \xi^{\gamma}\, \partial_{\gamma} (\varphi^{2}), \tag{1.10}$$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, \tilde{\vartheta}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\, \tilde{\vartheta}\, \varphi^{-2}\, \tilde{h}_{\alpha\beta}, \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \Big\{ & \varphi^{2}\, (\nabla_{\alpha} \xi_{\beta} - \nabla_{\alpha} \xi_{\alpha}) - \xi_{\alpha} \tilde{w}_{\beta} + \xi_{\beta} \tilde{w}_{\alpha} + \\ & + \frac{1}{2}\, [\xi_{\alpha}\, \partial_{\beta} (\varphi^{2}) - \xi_{\beta}\, \partial_{\alpha} (\varphi^{2})] \Big\},\end{aligned} \tag{1.12}$$

gde je

$$\tilde{w}_{\alpha} = \xi^{\gamma}\, \nabla_{\gamma}\, \xi_{\alpha}, \qquad \tilde{h}_{\alpha\beta} = \varphi^{2}\, g_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha}\, \xi_{\beta}. \tag{1.13}$$

Može se proveriti da je sad

$$\tilde{h}_{\alpha\beta}\,\xi^{\beta}=\tilde{\theta}_{\alpha\beta}\,\xi^{\beta}=\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}\,\xi^{\beta}=\tilde{\omega}_{\alpha\beta}\,\xi^{\beta}=0, \tag{1.14}$$

$$\tilde{\sigma}^{\beta}_{\beta}=0, \tag{1.15}$$

$$\tilde{w}_{\beta}\,\xi^{\beta}=-\frac{1}{2}\,\xi^{\beta}\,\partial_{\beta}\,(\varphi^{2})\neq 0. \tag{1.16}$$

Veza (1.15) se *jedina* razlikuje od ranijih (1.7a, b). Sve uvedene veličine ulaze u obrasce za kvadratne invarijante i zadovoljavaju neke identičnosti opšteg tipa na kojima se, međutim, sad nećemo zadržavati, već ćemo ići na primenu ovih kinematičkih parametara na slučaj magnetohidrodinamičkog elektromagnetnog polja u kojem struji jedna elektroprovodljiva neprekidna sredina.

* * *

Strujanje jedne *MHD* neprekidne sredine određeno je u relativnosti diferencijalnim jednačinama strujnog polja, koje proističu iz održanja tenzora energije, jednačinom kontinuiteta, opšteg termodinamičkog uslova, zakona provođenja toplote i pretpostavki o viskoznim silama. Ovaj sistem zatvoren je jednačinama elektromagnetnog polja, to jest, rečeno jezikom klasičnog elektromagnetizma, Maxwell-ovim jednačinama elektromagnetnog polja u odsustvu Lorentz-ove sile.

Mi ćemo posmatrati ovde isključivo elektromagnetno polje, ostavljajući po strani *sve* ostale osnovne jednačine strujanja. To će nam omogućiti da geometriju elektromagnetnog polja neposredno povežemo s proširenim sistemom kinematičkih veličina (1.2)—(1.6), (1.9)—(1.13) ne ulazeći u posledice ostalih veza.

Jednačine *MHD* elektromagnetnog polja [1] glase

$$\nabla_{\alpha}\,(u^{\alpha}\,b^{\beta}-u^{\beta}\,b^{\alpha})=0, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\nabla_{\beta}\,(u_{\gamma}\,h_{\delta})=J^{\alpha}, \tag{2.2}$$

gde je u^{α} četvorobrzina posmatrane sredine, b^{α} magnetna indukcija, h^{α} magnetno polje, J^{α} električni protok, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ Ricci-ev permutacioni tenzor. Vektori magnetnog polja i indukcije povezani su pomoću magnetne permeabilnosti μ uobičajenim vezama indukcije

$$b^{\alpha}=\mu\,h^{\alpha}, \tag{2.3}$$

dok je magnetno polje ortogonalno na četvorobrzini u^{α}

$$h^{\alpha}\,u_{\alpha}=0. \tag{2.4}$$

Prvu grupu (2.1) Maxwell-ovih jednačina možemo predstaviti pomoću Lie-ovog izvoda kao

$$\mathcal{L}_{u}\,b^{\alpha}=\nabla_{\beta}\,b^{\beta}\,u^{\alpha}-\nabla_{\beta}\,u^{\beta}\,b^{\alpha}. \tag{2.5}$$

Ovaj izraz ima taj smisao da polja u^{α} i b^{α} obrazuju lokalno dvopovrši.

Primenimo neke od obrazaca (1.2)—(1.6) i (1.9)—1.13) na polje četvorobrzina i magnetno polje, odnosno indukciju. Četvorobrzina ne menja simbol, dok ćemo umesto ξ^{α} stavljati b^{α} ili h^{α}. Pođimo od obrazaca za sopstvenu ekspanziju (1.2) i (1.3). Ako (1.2) pomnožimo sa b^{β} imaćemo, na osnovu (1.8) i (2.5)

$$\theta_{\alpha\beta}\,b^{\beta}=\mathcal{L}_{u}\,b_{\alpha}+\vartheta\,b_{\alpha}. \tag{2.6}$$

Tako je potreban i dovoljan uslov da ekspanzija bude jednaka nuli u pravcu magnetnog polja (dakle dvodimenziona) taj da desna strana (2.6) bude jednaka nuli, to jest da Lie-ov izvod kovarijantne magnetne indukcije u odnosu na četvorobrzinu bude srazmeran magnetnoj indukciji do na skalarnu ekspanziju s promenjenim znakom. Još jedna kontrakcija sa b^α daje

$$\vartheta_{\alpha\beta}\, b^\alpha b^\beta = 2\, b^2\, \vartheta + u^\alpha\, \partial_\alpha (b^2), \tag{2.7a}$$

što se može napisati kao

$$\vartheta_{\alpha\beta}\, b^\alpha b^\beta = 2\, b_\alpha\, \nabla_\beta (b^\alpha u^\beta) = -2\, u^\alpha\, \tilde{w}_\alpha. \tag{2.7b}$$

Veze (2.6) i (2.7a,b) poznate su u relativističkoj *MHD*. Mi ćemo im dodati, koristeći proširenje (1.9)—(1.13) veličina (1.2)—(1.6), simetrične zaključke. Ako pođemo od činjenice da se (1.9) dobija, analogno (1.2), zamenom u (1.8) $h_{\alpha\beta}$ sa $\tilde{h}_{\alpha\beta}$, s tim što stavimo $\xi^\alpha = b^\alpha$ i diferenciramo u odnosu na taj vektor, dobićemo iz (1.9) i (2.5)

$$\tilde{\vartheta}_{\alpha\beta}\, u^\beta = \mathcal{L}_b (b^2 u_\alpha) + b^2\, \nabla_\beta b^\beta u_\alpha, \tag{2.8}$$

što je analogno (2.6). Drugo množenje daje, na osnovu (1.10)

$$\tilde{\theta}_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta = -2\, \tilde{\vartheta} + b^\alpha\, \partial_\alpha (b^2), \tag{2.9a}$$

odnosno

$$\tilde{\vartheta}_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta = -2\, b_\alpha\, \nabla_\beta (b^\alpha b^\beta) = -2\, b^\alpha \left[w_\alpha + \frac{1}{2}\, \partial_\alpha (b^2) \right]. \tag{2.9b}$$

Ovde su primetne dve stvari. Prvo znak na drugoj strani (2.9b) je negativan, za razliku od (2.7), zatim kvadratna forma na levoj strani, ma da obrazovana u odnosu na u^α, zavisi samo od odnosa koje zadovoljava vektor magnetne indukcije, kao što se vidi iz prve jednakosti tog izraza.

Sve prethodne primene u magnetohidrodinamici vršili smo isključivo na osnovu (2.5), što je ustvari oblik prve grupe Maxwell-ovih jednačina (2.1), koristeći tenzore i skalare ekspanzije (odgovarajući izrazi za tenzore brzine deformacije (1.4) i (1.11) jednostavno sleduju iz njih). Sada ćemo preći na primenu druge grupe Maxwell-ovih jednačina (2.2) na tenzore rotacije (1.5) i (1.12). Zato ćemo prvo uvesti pojmove vektora rotacije (ili vrtloženja) koji odgovaraju navedenim tenzorima

$$\omega^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, u_\beta\, \omega_{\gamma\delta}, \tag{2.10}$$

$$\tilde{\omega}^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, h_\beta\, \tilde{\omega}_{\gamma\delta}, \tag{2.11}$$

gde smo u (1.12) stavili h_α umesto ξ_α. Ako (2.2) skalarno pomnožimo sa u_α dobićemo [3]

$$h_\alpha\, \omega^\alpha = u_\alpha\, J^\alpha. \tag{2.12}$$

Ovo predstavlja poznatu vezu iz relativističke *MHD*. Iz nje sleduje da strujanje ne može biti bezvrtložno ukoliko je sredina naelektrisana

$$u_\alpha J^\alpha \neq 0 \;\Rightarrow\; \omega^\alpha \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \omega_{\alpha\beta} \neq 0. \tag{2.13}$$

Analogno prethodnom, dobićemo novu vezu množenjem (2.2) sa h_α

$$u_\alpha\, \tilde{\omega}^\alpha = -h_\alpha J^\alpha, \tag{2.14}$$

odakle sleduje, sad analogno (2.13)

$$h_\alpha J^\alpha \neq 0 \Rightarrow \tilde{\omega}^\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{\omega}_{\alpha\beta} \neq 0. \tag{2.15}$$

Ovo znači da neortogonalnost na magnetnom polju električnog protoka u celini, bez obzira da li naelektrisanog ili ne, uslovljava egzistenciju »magnetnog vrtloga«, odnosno »magnetne rotacije«.

Literatura

[1] Lichnerowicz A., *Relativistic fluid mechaics and magnetohydrodynamics*, Benjamin, New York, 1967.

[2] Greenberg Ph., J. Math. Anal. and Appl. **30**, p. 128 (1970).

[3] Yodzis P., Phys. Rev. D, **3**, p. 2491 (1971).

[4] Hawking-Ellies, *Large scale structure of space-time*, Cambridge U- P., 1973.

[5] Lukačević I., Publ. Inst. Math. Belgr., **22 (36)**, p. 175 (1977).

[6] Stachel J., J. Math. Phys., **21 (7)**, p. 1776 (1980).

[7] Lukačević I., GRG Journal (u štampi).

ON AN EXTENDED SYSTEM OF RELATIVISTIC KINEMATICAL QUANTITIES WITH SOME APPLICATIONS IN MAGNETOHYDRODYNAMICS

Summary

We consider two vector fields forming trajectories in the general relativistic spacetime. The first one is a field of four velocities whereas the second one is a field of spacelike vectors of variable intensity. Kinematical parameters, expansion, shear and rotation are formed with respect to both fields and called extended kinematical quantities for the second one. Then applications are made to *MHD* in order to obtain some basic formulae symmetric to already known ones.

Dr Ilija Lukačević
Prirodno-matematički fakultet
11000 Beograd, Studentski trg 16/IV