Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle serie, tome 4 (12), 1984.

РАВАН-ВРЕМЕ У КОЈЕМ СУ ПУТАЊЕ ИНЕРЦИОНИХ КРЕТАЊА КОНУСНИ ПРЕСЕЦИ

Марко Д. Леко

У општој теорији релативности метрика простор-времена је последица расподеле материје. Тако, материјална тачка одређује метрику познату као Шварцшилдово решење, у односу на које путање материјалних тачака у 3-простору нису конусни пресеци и која даје добро познате прецесије планетских перихела у Сунчевом гравитационом пољу.

Природно је поставити питање: да ли је могуће наћи такву метрику простор-времена да 3-путање материјалних тачака буду конусни пресеци?

Довољно је, наравно, ограничити се на тражење метрике раван-времена тако да 2-путање материјалних тачака буду конусни пресеци.

Решавајући тај задатак полазим од претпоставке, коју природа проблема намеће, да је материјални систем који одређује такву метрику сферно симетричан. У односу на поларне координате x^i $(i=1, 2, 3)$ најопштији могући израз за метричку форму таквог раван-времена је [1]

$$ds^2 = F(x^1, x^3)(dx^1)^2 + G(x^1, x^3)(x^1)^2(dx^2)^2 + 2H(x^1, x^3)\,dx^1\,dx^3 + $$
$$+ L(x^1, x^3)(dx^3)^2, \qquad (1)$$

где је $x^3 = ct$, при чему је c брзина светлости у вакууму, а t координатно време. Задатак је наћи захтевану метричку форму.

Као што ће се током овог излагања видети, може се очекивати да постоји много решења овог проблема. Ја ћу се, у овом раду, ограничити на тражење оних решења која задовољавају извесне претпоставке, које ћу сукцесивно, током излагања, наводити.

Прво, тражим решење постављеног проблема под претпоставком де је

$$\text{(П. I)} \qquad G = \text{const} \neq 0. \qquad (2)$$

Тада је метрички тензор g_{ij}, који одговара метричкој форми (1),

$$g_{ij}=\begin{Bmatrix} F(x^1, x^3) & 0 & H(x^1, x^3) \\ 0 & G\cdot(x^1)^2 & 0 \\ H(x^1\, x^3) & 0 & L(x^1, x^3) \end{Bmatrix}. \tag{3}$$

Кристофелови симболи прве врсте,

$$[ij, k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right), \tag{4}$$

различити од нуле су

$$\left.\begin{aligned} &[11,1]=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^1}, && [13,3]=\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x^1}, \\ &[11,3]=\frac{\partial H}{\partial x^1}-\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^3}, && [22,1]=-Gx^1, \\ &[12,2]=G\,x^1, && [33,1]=\frac{\partial H}{\partial x^3}-\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x^1}, \\ &[1,31]=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^3}, && [33,3]=\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x^3}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Детерминанта g метричког тензора (3) је

$$g=G\,(FL-H^2)\,(x^1)^2, \tag{6}$$

одакле се одмах добија да мора бити

$$FL-H^2\neq 0. \tag{7}$$

Сада се за контраваријантни метрички тензор g^{ij} добија

$$g^{ij}=\frac{1}{G\,(FL-H^2)(x^1)^2}\begin{Bmatrix} GL\,(x^1)^2 & 0 & -GH\,(x^1)^2 \\ 0 & FL-H^2 & 0 \\ -GH\,(x^1)^2 & 0 & FG\,(x^1)^2 \end{Bmatrix}, \tag{8}$$

па су Кристофелови симболи друге врсте,

$$\begin{Bmatrix} i \\ j\ \ k \end{Bmatrix}=g^{il}\,[j\,k, l], \tag{9}$$

различити од нуле

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{ {1 \atop 1\;1} \right\} = \frac{1}{2\,(FL-H^2)} \left(L\frac{\partial F}{\partial x^1} + H\frac{\partial F}{\partial x^3} - 2H\frac{\partial H}{\partial x^1} \right), \quad \left\{ {2 \atop 1\;2} \right\} = \frac{1}{x^1}, \\
&\left\{ {1 \atop 1\;3} \right\} = \frac{1}{2\,(FL-H^2)} \left(L\frac{\partial F}{\partial x^3} - H\frac{\partial L}{\partial x^1} \right), \quad \left\{ {3 \atop 1\;1} \right\} = \frac{1}{2\,(FL-H^2)} \left(2F\frac{\partial H}{\partial x^1} - \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - H\frac{\partial F}{\partial x^1} - F\frac{\partial F}{\partial x^3} \right), \\
&\left\{ {1 \atop 2\;2} \right\} = -\frac{GL}{FL-H^2}\,x^1, \qquad \left\{ {3 \atop 1\;3} \right\} = \frac{1}{2\,(FL-H^2)} \left(F\frac{\partial L}{\partial x^1} - \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - H\frac{\partial F}{\partial x^3} \right), \\
&\left\{ {1 \atop 3\;3} \right\} = \frac{1}{2\,(FL-H^2)} \left(2L\frac{\partial H}{\partial x^3} - \right. \qquad \left\{ {3 \atop 2\;2} \right\} = \frac{GH}{FL-H^2}\,x^1, \\
&\qquad \left. - L\frac{\partial L}{\partial x^1} - H\frac{\partial L}{\partial x^3} \right), \\
&\qquad\qquad \left\{ {3 \atop 3\;3} \right\} = \frac{1}{2\,(FL-H^2)} \left(H\frac{\partial L}{\partial x^1} + F\frac{\partial L}{\partial x^3} - 2H\frac{\partial H}{\partial x^3} \right).
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Одговарајуће диференцијалне једначине геодезијских линија,

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop j\;k} \right\} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \tag{11}$$

су, сада, за $i=1$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 x^1}{ds^2} + \frac{1}{2\,(FL-H^2)} \left(L\frac{\partial F}{\partial x^1} + H\frac{\partial F}{\partial x^3} - 2H\frac{\partial H}{\partial x^1} \right) \left(\frac{dx^1}{ds} \right)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{FL-H^2} \left(L\frac{\partial F}{\partial x^3} - H\frac{\partial L}{\partial x^1} \right) \frac{dx^1}{ds}\frac{dx^3}{ds} - \frac{GL}{FL-H^2}\,x^1 \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2\,(FL-H^2)} \left(2L\frac{\partial H}{\partial x^3} - L\frac{\partial L}{\partial x^1} - H\frac{\partial L}{\partial x^3} \right) \left(\frac{dx^3}{ds} \right)^2,
\end{aligned} \tag{12}$$

за $i=2$

$$\frac{d^2 x^2}{ds^2} + \frac{2}{x^1}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} = 0, \tag{13}$$

а за $i=3$

$$\frac{d^2 x^3}{ds^2}+\frac{1}{2\,(FL-H^2)}\left(2\,F\frac{\partial H}{\partial x^1}-H\frac{\partial F}{\partial x^1}-F\frac{\partial F}{\partial x^3}\right)\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{FL-H^2}\left(F\frac{\partial L}{\partial x^1}-H\frac{\partial F}{\partial x^3}\right)\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^3}{ds}+\frac{GH}{FL-H^2}\,x^1\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2\,(FL-H^2)}\left(H\frac{\partial L}{\partial x^1}+F\frac{\partial L}{\partial x^3}-2\,H\frac{\partial H}{\partial x^3}\right)\left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2=0. \tag{14}$$

Један несумњиви први интеграл једначина (12)—(14), који се добија непосредно из метричке форме (1), је

$$F\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2+G\cdot(x^1)^2\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2+2\,H\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^3}{ds}+L\left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2=1. \tag{15}$$

Сменом израза за $\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2$ из те једначине у једначину (12) добијамо

$$L\frac{d^2 x^1}{ds^2}+\frac{1}{2\,(FL-H^2)}\left(L^2\frac{\partial F}{\partial x^1}+HL\frac{\partial F}{\partial x^3}-2\,HL\frac{\partial H}{\partial x^1}-2\,FL\frac{\partial H}{\partial x^3}+FL\frac{\partial L}{\partial x^1}+\right.$$

$$\left.+FH\frac{\partial L}{\partial x^3}\right)\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2+\frac{1}{FL-H^2}\left(L^2\frac{\partial F}{\partial x^3}-2\,HL\frac{\partial H}{\partial x^3}+H^2\frac{\partial L}{\partial x^3}\right)\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^3}{ds}-$$

$$-\frac{Gx^1}{2\,(FL-H^2)}\left(2\,L^2+2\,L\frac{\partial H}{\partial x^3}\,x^1-L\frac{\partial L}{\partial x^1}\,x^1-H\frac{\partial L}{\partial x^3}\,x^1\right)\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2\,(FL-H^2)}\left(2\,L\frac{\partial H}{\partial x^3}-L\frac{\partial L}{\partial x^1}-H\frac{\partial L}{\partial x^3}\right)=0. \tag{16}$$

Ограничићу се, сада, на она решења која задовољавају још и претпоставку да је израз уз $\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^3}{ds}$ у горњој једначини једнак нули, тј. да је

(П. II) $$L^2\frac{\partial F}{\partial x^3}-2\,HL\frac{\partial H}{\partial x^3}+H^2\frac{\partial L}{\partial x^3}=0. \tag{17}$$

Сменивши и израз за $\frac{\partial F}{\partial x^3}$ из (17) у (16) добијамо

$$L\frac{d^2x^1}{ds^2}+\frac{1}{2\,(FL-H^2)}\left[L^2\frac{\partial F}{\partial x^1}-2\,HL\frac{\partial H}{\partial x^1}-2\,(FL-H^2)\frac{\partial H}{\partial x^3}+FL\frac{\partial L}{\partial x^1}+\right.$$

$$\left.+\frac{H}{L}\,(FL-H^2)\frac{\partial L}{\partial x^3}\right]\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2-\frac{Gx^1}{2\,(FL-H^-)}\left(2\,L^2+2\,L\frac{\partial H}{\partial x^3}\,x^1-\right.$$

$$-L\frac{\partial L}{\partial x^1}x^1-H\frac{\partial L}{\partial x^3}x^1\Big)\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2+\frac{1}{2(FL-H^2)}\Big(2L\frac{\partial H}{\partial x^3}-$$

$$-L\frac{\partial L}{\partial x^1}-H\frac{\partial L}{\partial x^3}\Big)=0. \tag{18}$$

Из (13) је очигледан први интеграл

$$\frac{dx^2}{ds}=\frac{A}{(x^1)^2}, \tag{19}$$

где је A константа. (Једначина (19) представља, уствари, релативистички интеграл кинетичког момента,

$$\frac{dx^2}{d\tau}=\frac{icA}{(x^1)^2},\quad d\tau^2=-\frac{1}{c^2}ds^2, \tag{20}$$

одн.

$$\frac{dx^2}{d\tau}=\frac{A_1}{(x^1)^2}, \tag{21}$$

где је

$$A_1=icA). \tag{22}$$

На основи (19) једначина (18) постаје

$$L\frac{d^2x^1}{ds^2}+\frac{1}{2(FL-H^2)}\Big[L^2\frac{\partial F}{\partial x^1}-2HL\frac{\partial H}{\partial x^1}-2(FL-H^2)\frac{\partial H}{\partial x^3}+FL\frac{\partial L}{\partial x^1}+$$

$$+\frac{H}{L}(FL-H^2)\frac{\partial L}{\partial x^3}\Big]\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2-\frac{1}{2(FL-H^2)}\Big[2A^2GL^2\frac{1}{(x^1)^3}+$$

$$+A^2G\Big(2L\frac{\partial H}{\partial x^3}-L\frac{\partial L}{\partial x^1}-H\frac{\partial L}{\partial x^3}\Big)\frac{1}{(x^1)^2}-$$

$$-2L\frac{\partial H}{\partial x^3}+L\frac{\partial L}{\partial x^1}+H\frac{\partial L}{\partial x^3}\Big]=0. \tag{23}$$

Уведимо, сада, функцију

$$x^1=\frac{1}{u}. \tag{24}$$

Једначина (19) постаје

$$\frac{dx^2}{ds}=Au^2, \tag{25}$$

па добијамо

$$\frac{dx^1}{ds}=-A\frac{du}{dx^2}, \tag{26}$$

и

$$\frac{d^2 x^1}{ds^2} = -A^2 u^2 \frac{d^2 u}{(d x^2)^2}. \tag{27}$$

Сменивши (24), (26) и (27) у (23) имамо

$$\frac{d^2 u}{(d x^2)^2} - \frac{1}{2(FL-H^2)}\left[L\frac{\partial F}{\partial x^1} - 2H\frac{\partial H}{\partial x^1} - \frac{2}{L}(FL-H^2)\frac{\partial H}{\partial x^3} + F\frac{\partial L}{\partial x^1} + \right.$$
$$\left. + \frac{H}{L^2}(FL-H^2)\frac{\partial L}{\partial x^3}\right]\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dx^2}\right)^2 + \frac{GL}{FL-H^2}u + \frac{G}{2(FL-H^2)}\left(2\frac{\partial H}{\partial x^3} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial L}{\partial x^1} - \frac{H}{L}\frac{\partial L}{\partial x^3}\right) - \frac{1}{2A^2(FL-H^2)}\left(2\frac{\partial H}{\partial x^3} - \frac{\partial L}{\partial x^1} - \frac{H}{L}\frac{\partial L}{\partial x^3}\right)\frac{1}{u^2} = 0, \tag{28}$$

што представља диференцијалну једначину 2-путање материјалне тачке у 2-равни раван-времена чија је метричка форма дата изразом (1) под условима (2) и (17), одн. (П. I) и (П. II).

У класичној (Њутновој) механици одговарајућа диференцијална једначина путање материјалне тачке у гравитационом пољу материјалне тачке масе m_1, за коју је познато да представља конусни пресек, је

$$\frac{d^2 u}{(d x^2)^2} + u = \frac{k^2 m_1}{A_1^2}, \tag{29}$$

где је k^2 гравитациона константа, а A_1 константа која се појављује у класичном (Њутновом) интегралу кинетичког момента

$$(x^1)^2 \frac{dx^2}{dt} = A_1. \tag{30}$$

Једначина (21) је релативистичко уопштење једначине (30), па, захтевајући да и у теорији релативности диференцијална једначина 2-путање материјалне тачке у гравитационом пољу буде (29), она може бити написана, с обзиром на (22), и у облику

$$\frac{d^2 u}{(d x^2)^2} + u = -\frac{k^2 m_1}{c^2 A^2}. \tag{31}$$

Релативистичка једначина (28) ће бити, према томе, диференцијална једначина 2-путање материјалне тачке која представља конусни пресек који одговара класичној путањи (29) ако су задовољени услови

$$L\frac{\partial F}{\partial x^1} - 2H\frac{\partial H}{\partial x^1} - \frac{2}{L}(FL-H^2)\frac{\partial H}{\partial x^3} + F\frac{\partial L}{\partial x^1} + \frac{H}{L^2}(FL-H^2)\frac{\partial L}{\partial x^3} = 0 \tag{32}$$

и

$$\frac{GL}{FL-H^2}\frac{1}{x^1} + \frac{G}{2(FL-H^2)}\left(2\frac{\partial H}{\partial x^3} - \frac{\partial L}{\partial x^1} - \frac{H}{L}\frac{\partial L}{\partial x^3}\right) -$$
$$- \frac{1}{2A^2(FL-H^2)}\left(2\frac{\partial H}{\partial x^3} - \frac{\partial L}{\partial x^1} - \frac{H}{L}\frac{\partial L}{\partial x^3}\right)(x^1)^2 = \frac{1}{x^1} + \frac{k^2 m_1}{c^2 A^2}. \tag{33}$$

Тражена метрика ће, према томе, бити одређена решењима једначина (32) и (33) уз претпоставке (2) и (17).

С обзиром да је задатак још увек сложен, ограничићу се, даље, на тражење оног решења које задовољава и следеће претпоставке

(П. III) $$H=H(x^3) \tag{34}$$

и

(П. IV) $$\begin{cases} L=H^2 f, & (35) \\ f=f(x^1). & (36) \end{cases}$$

Под тим претпоставкама се (17) своди на

$$\frac{\partial F}{\partial x^3}=0, \tag{37}$$

па се за (32) добија

$$f\frac{dF}{dx^1}+F\frac{df}{dx^1}=0, \tag{38}$$

а за (33)

$$\frac{1}{2A^2}[A^2 G-(x^1)^2]\frac{df}{dx^1}+\left[(F-G)\frac{1}{x^1}+\frac{k^2 m_1}{c^2 A^2}F\right]f-\left(\frac{1}{x^1}+\frac{k^2 m_1}{c^2 A^2}\right)=0. \tag{39}$$

Из (38) је

$$Ff=B_1, \tag{40}$$

где је B_1 интеграциона константа, која, због (7), тј.

$$FL-H^2=(Ff-1)H^2\neq 0, \tag{41}$$

мора бити различита од јединице. Избегавајући случај $F=0$, константа B_1 мора задовољавати услов

$$B_1\neq\begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \tag{42}$$

Елиминисавши F из (39) и (40) добијамо

$$\frac{1}{2A^2}[A^2 G-(x^1)^2]\frac{df}{dx^1}-\frac{G}{x^1}f+(B_1-1)\left(\frac{1}{x^1}+\frac{k^2 m_1}{c^2 A^2}\right)=0, \tag{43}$$

а смењивањем B_1 произвољном константом B која зодовољава

$$B=B_1-1\neq\begin{cases} -1, \\ 0, \end{cases} \tag{44}$$

имамо

$$\frac{1}{2A^2}[A^2 G-(x^1)^2]\frac{df}{dx^1}-\frac{G}{x^1}f+B\left(\frac{1}{x^1}+\frac{k^2 m_1}{c^2 A^2}\right)=0. \tag{45}$$

Уведимо, сада, уместо функције f функцију

$$\varphi = f - \frac{B}{G}. \tag{46}$$

Једначина (46) постаје

$$\frac{d\varphi}{dx^1} - \frac{2A^2 G}{x^1 [A^2 G - (x^1)^2]} \varphi = -2B \frac{k^2 m_1}{c^2} \frac{1}{A^2 G - (x^1)^2}, \tag{47}$$

а њен интеграл

$$\varphi = \left(2B \frac{k^2 m_1}{c^2} \frac{1}{x^1} + C\right) \frac{(x^1)^2}{A^2 G - (x^1)^2}, \tag{48}$$

где је C интеграциона константа.

Из (46) је, сада,

$$f = \left(2B \frac{k^2 m_1}{c^2} \frac{1}{x^1} + C\right) \frac{(x^1)^2}{A^2 G - (x^1)^2} + \frac{B}{G}, \tag{49}$$

а из (40), имајући на уму (44),

$$F = G(B+1) \frac{A^2 G - x}{(CG - B)(x^1)^2 + 2BG \frac{k^2 m_1}{c^2} x^1 + BA^2 G}. \tag{50}$$

На основи добијених резултата један од облика тражене метричке форме је

$$ds^2 = F(dx^1)^2 + G \cdot (x^1)^2 (dx^2)^2 + 2H\, dx^1 dx^3 + H^2 f (dx^3)^2, \tag{51}$$

где је $G = \text{const} > 0$, F дато изразом (50), H произвољна функција промењиве x^3, а f дато изразом (49).

Литература

[1] Møller, C., *The Theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 1972.

THE PLANE-TIME IN WHICH PATHS OF INERTIONAL MOTIONS ARE CONICS

Summary

The Schwarzschlid's solution gives, for 2-paths of particles, lines which are not conics. It gives, as a consequence, a precession efect.

This paper is an attempt to find such a metrics of the plane-time in the general theory of relativity that 2-paths of particles be conics, without precessions.

Prof. Dr Marko D. Leko
Prirodno-matematički fakultet
11000 Beograd, Studentski trg 16/IV