Зборник радова Машемашичкої инсшишуша, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle serie, tome 4 (12), 1984.

Članak posvećen Prof. Dr Tatomiru Anđeliću, povodom osamdesetogodišnjice njegova života

JEDAN NOVI PRISTUP TEORIJI RIEMANNOVA PROSTORA

Z. Janković

1. Uvod

Razvoj egzaktnih znanosti, naročito u 19. i 20. stoljeću, zahtijevao je i razvoj matematičkih područja i metoda potrebnih za njihovu egzaktnu obradu. Tako je istraživanje osobina prostorno-vremenskog kontinuuma zahtijevalo razvoj teorije Euklidova prostora u klasičnoj fizici, prostora Minkowskog u specijalnoj teoriji relativnosti i Riemannova prostora u općoj teoriji relativnosti, s razvojem pripadnog vektorskog i tenzorskog računa. Nadalje razvitak kvantne teorije zahtijevao je teoriju Hilbertova prostora, uvođenje Diracovih bra i ket vektorskih oblika kao i teoriju 2- i 4-spinora. Razvitak unificirane teorije polja zahtijeva, pak, prostore još razvijenije strukture i pripadnu teoriju objekata u njima (usporediti na pr. [1]).

U nastojanju da zadovolji tom zahtjevu autor je razvio svoju poopćenu shemu vektorskog i tenzorskog računa (osnove izložene u [2], [3], [4], [5]), koja kao jedinstvena teorija obuhvaća i sve prije spomenute slučajeve kao specijalne slučajeve. U ovom članku pokazat ćemo kako je teorija Riemannova prostora ([6], usporediti na pr. [7], [8], [9]) vrlo jednostavan specijalni slučaj poopćene sheme. No, da to pokažemo, ponajprije je potrebno iznijeti u sažetom obliku osnovne osobine poopćene sheme, kako bi čitalac bio s njome dovoljno upoznat.

2. Poopćena shema vektorskog i tenzorskog računa

A) Algebra

Svakoj točki P m-dimenzionalne mnogostrukosti Ω_m pridružen je n-dimenzionalni vektorski prostor $X_n(\Omega_m)$, odnosno njegova četiri oblika, eksplicitno pisana u jednom sistemu pripadnih baza $B(e)$ [2]

$$\begin{aligned} &\text{bra-gore } a^{<} = a_i\, e^i \in X_n^{<}, \quad \text{bra-dolje } a_{<} = a^i\, e_i \in X_{n<}, \\ &\text{ket-gore } {}^{>}a = {}_i a^i e \in {}^{>}X_n, \quad \text{ket-dolje } {}_{>}a = {}^i a_i e \in {}_{>}X_n, \end{aligned} \tag{1}$$

$>$ i $<$ su znaci za valencije, $a(i)$ komponente a $e(i)$ bazni vektori; dok se ovisnost o točki $P(x^k)$ podrazumijeva.

Vektorsku strukturu vektorskog prostora $X_n(\Omega_m)$ određuju polja fundamentalnog $F(\Omega_m)$ [2] i transpozijskog $T(\Omega_m)$ [4] operatora. Vektorsku strukturu $X_n(\Omega_m)$ određuju, dakle, operatori F i T dani u jednom sistemu pripadnih baza i grupa transformacijskih operatora $t(\Omega_m)$, $\bar{t}(\Omega_m)$ [5] među sistemima pripadnih baza.

Direktni (tenzorski) produkt pojedinih vektorskih formi (1) (znak $\otimes$: može se ispustiti među ket i bra formom, ili samo bra (ket) formama: asocijativan, distributivan, dopušteno izlučivanje skalarnog faktora) tvori vektorski prostor direktnog (tenzorskog) produkta (rang jednak broju faktor prostora). Kontrakcija direktnog produkta, tj. pridruživanje skalara uređenom paru bra i ket vektorskih formi istog vektorskog prostora, jest skalarni produkt (znak $\underline{\otimes}$: može se ispustiti među bra i ket formom).

Fundamentalni operator F je nedegenerirani tenzor drugog ranga, koji ostvaruje uzajamno jednoznačnu vezu među bra (ket) formama »gore« i »dolje« istog vektora, a njegove komponente u svakoj bazi $B(e)$ su skalarni produkti baznih vektora

$$e^i{}_j e = {}^i\delta_j,\ e_i{}^j e = {}_i\delta^j,\ e^{ij} e = {}^i g^j,\ e_{ij} e = {}_i g_j, \tag{2 a}$$

tj.

$$_>E^< = {}_>E^<{}_>E^<,\ {}^>E_< = {}^>E_<{}^>E_<,\ {}_>g_< = {}_>E^{<>}E_<,\ {}^>g^< = {}^>E_{<>}E^<, \tag{2 b}$$

gdje zbog uzajamne jednoznačnosti treba postajati

$$_>g_<{}^>g^< = {}_>E^<,\ {}^>g^<{}_>g_< = {}^>E_<. \tag{2 c}$$

Operatori E su operatori identiteta, a g operatori spuštanja i dizanja valencije. Od četiri forme fundamentalnog operatora jedna g forma je slobodna i njezinih n^2 komponenata predstavlja slobodne parametre.

Zbog (2) skalarni produkt vektora možemo pisati u obliku.

$$\underline{a}\,\underline{\otimes}\,\underline{b} = a_<{}^>b = a_{<>}b = a^<{}_>b = a^{<>}b. \tag{3}$$

Transpozicijski operator T je nedegenerirani tenzor drugog ranga, koji ostvaruje uzajamno jednoznačnu vezu među bra i ket vektorskim formama istog vektora, na pr.

$$a^< = T^{<<}{}_>a,\ T^{<<} = T_{ij}\, e^i e^j;\ {}_>a = a^<{}_{>>}T,\ {}_{>>}T = {}_i e_j e^{ij} T, \tag{4 a}$$

gdje zbog uzajamne jednoznačnosti treba postojati

$$T^{\leq<}\underline{\otimes}_{\geq>}T = {}_>E^<,\ T^{<\leq}\underline{\otimes}_{>\geq}T = {}_>E^<. \tag{4 b}$$

Za preostala tri para oblika transpozicijskog operatora postoje relacije analogne (4), koje se mogu dobiti primjenom fundamentalnog operatora. Od osam formi transpozicijskog operatora, zbog relacija analognih (4 b), samo je jedna forma nezavisna i njezinih n^2 komponenata predstavlja slobodne parametre.

Skalarni produkt (3) možemo izraziti pomoću komponenata vektora iste forme, na pr.

$$\underline{a}\,\underline{\otimes}\,\underline{b} = a_<{}^>b = a_<(b_<{}^{>>}T) = a^i b^j{}_{ji}T. \tag{5}$$

S transpozicijskim operatorom može biti povezan i operator konjugacije (slučaj a) bez konjugacije, slučaj b) s konjugacijom) [10]. U slučaju a), koji u daljem razmatramo, simetrični (antisimetrični) transpozicijski operator uzrokuje komutativnost (antikomutativnost) skalarnog produkta (5).

Transformacijski operatori [5] su nedegenerirani operatori drugog ranga, koji uspostavljaju uzajamno jednoznačnu vezu među formama istog vektora u raznim bazama $B(e)$ i $B(e')$,

$$
{}_{e}t_{e'};\quad {}_{>}t^{<'} = {}_{>}E^{<}{}_{>}E'^{<} = {}_{i}e\, e^{i}{}_{j}e'\, e'^{j} = {}_{i}e\, {}^{i}t_{j}\, e'^{j},
$$

$$
{}^{>}t_{<'} = {}^{>}E_{<}{}^{>}E'_{<}; \tag{6 a}
$$

$$
{}_{e'}\overline{t}_{e};\quad {}_{>'}\overline{t}^{<} = {}_{>}E'^{<}|_{>}E^{<}|,\quad {}^{>'}\overline{t}_{<} = {}^{>}E'_{<}{}^{>}E_{<},
$$

gdje su t i $\overline{t}$ inverzni operatori, a svaki oblik (6a) za sebe odražava grupno svojstvo, na pr.

$$
{}^{>}t_{<''} = {}^{>}t_{<'}{}^{>'}t_{<''} = {}^{>}E_{<}{}^{>}E'_{<}{}^{>}E'_{<}{}^{>}E''_{<} = {}^{>}E_{<}{}^{>}E''_{<}. \tag{6 b}
$$

Budući da su pripadni transformacijski operatori inverzni, imamo dvije slobodne grupe transformacijskih operatora (6a).

B) **Analiza**

Osnovu vektorske analize predstavlja pojam apsolutnog diferencijala (derivacije), koji je definiran ovako [3]

$$
\Delta A = \nabla_k A\, dx^k = A(Q) - A(P)_Q;\quad P(x^k),\quad Q(x^k + dx^k) \in \Omega_m, \tag{7}
$$

gdje $A(Q)$ označuje vrijednost polja u točki Q, a $A(P)_Q$ paralelno prenijetu vrijednost polja iz točke P u točku Q.

Apsolutni diferencijal (derivacija) podvrgava se ovim pravilima

$$
1)\quad \Theta(A+B) = \Theta A + \Theta B, \qquad \Theta \equiv \nabla_k,\ \Delta \tag{8 a}
$$

$$
2)\quad \Theta(A \cdot B) = (\Theta A)\cdot B + A\cdot(\Theta B), \quad (\cdot \text{ svaka vrsta množenja}).
$$

Posebno se još zahtijeva

$$
3)\quad \Delta f = \nabla_k f dx^k \equiv df = \partial_k f dx^k,\quad f(x^k) \text{ skalarno polje},
$$

$$
\begin{aligned}
4)\quad & \Delta^i e = \nabla_k {}^{i}e\, dx^k = {}^{i}({}_{j}\Gamma)_k{}^{j}e\, dx^k,\\
& \Delta_i e = \nabla_k {}_{i}e\, dx^k = {}_{i}({}^{j}\Gamma)_k{}_{j}e\, dx^k,\\
& \Delta e^i = \nabla_k e^i\, dx^k = (\Gamma_j)^i_k\, e^j\, dx^k,\\
& \Delta e_i = \nabla_k e_i\, dx^k = (\Gamma^j)_{ki} e_j\, dx^k.
\end{aligned} \tag{8 b}
$$

4 mn^2 veličina Γ su koeficijenti koneksije.

Vektorska analiza određena je apsolutnim diferencijalom (derivacijom) fundamentalnog, transpozicijskog i transformacijskih operatora.

Iz (8) i (2) slijedi da apsolutni diferencijal (derivacija) fundamentalnog operatora identički iščezava, $\Delta F \equiv 0$, tj. da je veza između pripadnih vektorskih formi »gore« i »dolje« invarijantna prema paralelnom pomaku

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{>} E^{<} \equiv 0 \quad \text{tj.} && {}_i({}^j\Gamma)_k + (\Gamma_i)^j_k = 0, \\
&\Delta^{>} E_{<} \equiv 0 && {}^i({}_j\Gamma)_k + (\Gamma^i)_{kj} = 0, \\
&\Delta_{>} g_{<} \equiv 0 && \partial_k {}^i g^j = (\Gamma_r)^i_k {}^r g^j + {}^i g^{rj} ({}_r\Gamma)_k, \\
&\Delta^{>} g^{<} \equiv 0 && \partial_k {}_i g_j = (\Gamma^r)_{ki} {}_r g_j + {}_i g_{rj} ({}^r\Gamma)_k.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Relacije (9) pokazuju da je od $4\,mn^2$ koeficijenata koneksije slobodno $2\,mn^2 - N_F$, N_F broj nezavisnih jednadžbi u (9_3) odnosno u (9_4).

Invarijantnost veze između bra i ket vektorskih formi prema paralelnom pomaku osigurava zahtjev da apsolutni diferencijal (derivacija) transpozicijskog operatora treba identički iščezavati, $\Delta T \equiv 0$. Tako nalazimo na pr.

$$\Delta T_{<<} \equiv 0; \quad \partial_k T^{ij} + T^{rj} (\Gamma^i)_{kr} + T^{ir} (\Gamma^j)_{kr} = 0. \tag{10}$$

Prema tome od mn^2 koeficijenata $(\Gamma^i)_{kj}$ može biti slobodno $mn^2 - N_T$, N_T broj nezavisnih jednaždbi u (10). Iz (9) i (10) slijedi da su koeficijenti koneksije u $B(e)$ određeni fundamentalnim i transpozicijskim operatorom i da tek specifične osobine tih operatora (na pr. simetričnost) mogu imati za posljedicu da se određeni broj tih koeficijenata može slobodno odabrati.

Apsolutni diferencijal (derivacija) transformacijskih operatora, zbog (6) i (9), takođe identički iščezava, što u stvarnosti implicite predstavlja zakon transformacije koeficijenata koneksije, na pr.

$$\Delta^{>} t_{<'} \equiv 0; \quad (\Gamma^{\bar{i}})'_{\bar{k}\bar{j}} = (\Gamma^h)_{kj}\, {}_i t^{\bar{i}}\, {}_{\bar{j}} t^{j}\, \partial'_{\bar{k}} x^k - {}_{\bar{j}} t^i\, \partial'_{\bar{k}}\, {}_i t^{\bar{i}}. \tag{11}$$

Kovarijantni diferencijal (derivacija) $D(D_k)$ i diferencijal (derivacija) paralelnog pomaka $\delta(\delta_k)$ vektorskih komponenata jednostavno su povezani s apsolutnim diferencijalom (derivacijom) samih vektora, na pr.

$$\Delta a_{<} = (Da^i)\, e_i = D_k a^i dx^k e_i = [(d - \delta)\, a^i]\, e_i = [(\partial_k - \delta_k)\, a^i dx^k]\, e_i. \tag{12}$$

Komutator apsolutnih diferencijala (derivacija)

$$
\begin{aligned}
[\Delta] A &= (\Delta_1 \Delta_2 - \Delta_2 \Delta_1) A = [\nabla]_{jk} A\, d_1 x^j d_2 x^k = (\nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j) A\, d_1 x^j d_2 x^k = \\
&= (A(P)_{Q_2})_Q - (A(P)_{Q_1})_Q,
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$P(x^k), \quad Q_1(x^k + d_1 x^k), \quad Q_2(x^k + d_2 x^k), \quad Q(x + d_1 x^k + d_2 x^k) \in \Omega_m,$$

predstavlja razliku paralelno prenijetih veličina polja A putovima PQ_2Q i PQ_1Q. Zbog (7) i (13) $\Theta = [\Delta]$, $[\nabla]_{jk}$ posjeduje osobine (8a). Relacije (8b) poprimaju za (13) ovaj oblik:

$$3') \quad [\Delta] f \equiv 0, \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
4') \quad [\Delta] e_i &= [\nabla]_{jk} e_i\, d_1 x^j d_2 x^k = {}_i R_{jk}{}^r e_r\, d_1 x^j d_2 x^k = {}_{ijk} R^r e_r\, d_1 x^j d_2 x^k = \\
&= [\partial_j (\Gamma^r)_{ki} - \partial_k (\Gamma^r)_{ji} + (\Gamma^q)_{ki} (\Gamma^r)_{jq} - (\Gamma^q)_{ji} (\Gamma^r)_{kq}]\, e_r\, d_1 x^j d_2 x^k,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\Delta]\, {}_i e &= [\nabla]_{jk}\, {}_i e\, d_1 x^j d_2 x^k = {}_r e^{\cdot}{}_r R_{kji}\, d_1 x^j d_2 x^k = {}_r e^r{}_{kj} R_i\, d_1 x^j d_2 x^k = \\
&= {}_r e\, [\partial_j\, {}_i({}^r\Gamma)_k - \partial_k\, {}_i({}^r\Gamma)_j + {}_i({}^q\Gamma)_k\, {}_q({}^r\Gamma)_j - {}_i({}^q\Gamma)_j\, {}_q({}^r\Gamma)_k]\, d_1 x^j d_2 x^k,
\end{aligned}
$$

gdje su i, r vektorski, a j, k koordinatni indeksi. Analogni izrazi dobivaju se i za preostala dva niza baznih vektora ${}^i e$ i e^i. Koeficijente R nazivamo koeficijentima zakrivljenosti i oni su prema (14) potpuno određeni koeficijentima koneksije.

Zbog identičkog iščezavanja apsolutnih diferencijala fundamentalnog (9), transpozicijskog (10) i transformacijskih operatora (11) i komutatori apsolutnih diferencijala tih operatora identički iščezavaju

$$[\Delta] F \equiv 0, \quad [\Delta] T \equiv 0, \quad [\Delta] t \equiv 0, \quad [\Delta] \bar{t} \equiv 0. \tag{15}$$

Relacije (15) odražavaju implicite određene osobine koeficijenata zakrivljenosti, na pr.

$$\begin{aligned} &[\Delta]\, g_{<} \equiv 0; \quad {}_iR_{jkr} + {}_iR_{kjr} = 0, \\ &[\Delta]\, T_{<<} \equiv 0; \quad T^q{}_i\, {}_qR_{jkr} + T_r{}^q\, {}_qR_{jki} = 0, \\ &[\Delta]{}^{>}{}'\bar{t}_{<} \equiv 0; \quad {}_{\bar{r}}R'_{j\bar{k}}{}^{\bar{i}} = {}_rR_{jk}{}^i\, {}_it^{\bar{i}}\, {}_{\bar{r}}\bar{t}^r\, \partial'_{\bar{k}} x^k\, \partial'_{\bar{j}}\, x^j. \end{aligned} \tag{16}$$

3. Metrički prostor $(GX)_n$

U slučaju jednakih dimenzija $n=m$ možemo vektorsku strukturu $X_n(\Omega_n)$ i strukturu mnogostrukosti Ω_n stopiti u strukturu metričkog prostora tako, da uvedemo vektor pomaka

$$(dx)_< = (dx)^i e_i; \quad (dx)^i \equiv dx^i, \quad e_i = \frac{[(dx)_<]_i}{dx^i}, \quad \forall B(e, x^k). \tag{17}$$

Baza $B(e, x^k)$ postaje tangentnom bazom, a bazni vektori tangentni bazni vektori. Udaljenost točaka $P(x^k)$ i $Q(x^k+dx^k)$, tj. metrika, određena je normom vektora pomaka

$$\overline{PQ}^2 = ds^2 = (dx)_<{}^>(dx) = (dx)_<(dx)_<{}^{>>}T = dx^i\, dx^j\, {}_{ji}T, \tag{18}$$

odakle vidimo da transpozicijski operator igra ulogu metričkog tenzora u metričkom prostoru $GX_n(\Omega_n)$.

Transformacijski operatori za prijelaz među dvije tangentne baze određuju se iz vektora pomaka (17)

$$\begin{aligned} &(dx)_< \equiv (dx)_< = dx'^{\bar{i}}\, e'_{\bar{i}} = dx^i\, e_i, \\ &{}_it^{\bar{i}} = \partial_i\, x'^{\bar{i}}, \quad {}_{\bar{i}}\bar{t}^i = \partial'_{\bar{i}}\, x^i, \\ &{}^jt_j = {}^jg^i\, \partial_i\, x'^{\bar{i}}\, {}_{\bar{i}}g'_{\bar{j}}, \quad {}^{\bar{j}}\bar{t}_j = {}^{\bar{j}}g'^{\bar{i}}\, \partial'_{\bar{i}} x^i\, {}_ig_j. \end{aligned} \tag{19}$$

Poopćeni nabla operator

$${}^{>}\nabla = {}^ie_i(\nabla) = {}^ie\, \nabla_i = {}^ie\, D_i, \tag{20}$$

omogućuje formulirati Grad, Div i Rot vektorskih i tenzorskih polja.

Transformacijski zakon koeficijenata koneksije slijedi iz izraza (11) i (19). Antisimetrički dio (u vanjskim indeksima) koeficijenata koneksije (11) određuje komponente tenzora (trećeg ranga) torzije $^{>>}S_{<}$, budući da se transformira ovako

$$(\Gamma^{\bar{i}})^{\prime A}_{\bar{k}\bar{j}} = (\Gamma^i)^A_{kj}\, \partial_i x^{\prime \bar{i}}\, \partial^{\prime}_{\bar{k}} x^k\, \partial^{\prime}_{\bar{j}} x^j, \quad {}^{>>}S_{<} = 2\, (\Gamma^i)^A_{kj}\, {}^k e^j e\, e_i. \tag{21}$$

Transformacijski zakon koeficijenata zakrivljenosti slijedi iz (16) i (19)

$$_{\bar{r}}R_{\bar{k}\bar{j}}{}^{\bar{i}} = {}_r R_{kj}{}^i\, \partial^{\prime}_{\bar{r}} x^r\, \partial^{\prime}_{\bar{k}} x^k\, \partial^{\prime}_{\bar{j}} x^j\, \partial_i x^{\prime \bar{i}}, \tag{22}$$

i oni postaju komponente tenzora zakrivljenosti četvrtog ranga zbog (14).

4. Riemannov prostor

Specijalizacijom fundamentalnog i transpozicijskog operatora (2) i (4) možemo dobiti pojedine vektorske, dakle i metričke prostore. Riemannov prostor predstavlja metrički prostor bez konjugacije (slučaj a)) poopćene sheme karakteriziran time, da su bra i ket „gore" („dolje"), vektorske forme identične (slučaj A)), tj. da je transpozicijski operator u svakoj tangentnoj bazi oblika

$$T_{<}{}^{<} = \delta^i{}_j\, e_i\, e^j, \quad {}^{>}{}_{>}T = {}_i{}^j\delta^i\, e_j e, \quad \forall B(e,\, x^k). \tag{23 a}$$

U tom slučaju fundamentalni i transpozicijski operator su identični i simetrični u svakoj tangentnoj bazi

$$F \equiv T, \quad \text{na pr.} \quad T^{ij} = T^{ji} = {}^i g^j = {}^j g^i, \quad \forall B(e,\, x^k) \tag{23 b}$$

Zbog (23) možemo upotrebljavati samo jednostrane indekse (na pr. na desnoj strani) i uobičajene nazive kontravarijantni („gore") i kovarijantni („dolje"). Iz (5) slijedi da u slučaju Aa) skalarni produkt postaje komutativan, a iz (18) da metriku određuje simetrični transpozicijski (fundamentalni) operator kao metrički tenzor.

Komponente transformacijskih operatora (19), zbog (23), glase

$$_i t^{\bar{i}} = {}^{\bar{i}} t_i = \partial_i x^{\prime \bar{i}}, \quad {}_{\bar{i}} t^i = {}^i t_{\bar{i}} = \partial^{\prime}_{\bar{i}} x^i. \tag{24}$$

Nadalje, zbog (23) slijedi iz (9) ova veza među koeficijentima koneksije

$$(\Gamma^i)_{kj} = {}_j({}^i\Gamma)_k = -{}^i({}_j\Gamma)_k = -(\Gamma_j)^i_k, \tag{25}$$

pa samo jedan oblik koeficijenata koneksije treba odrediti. Odredbeni sistemi jednadžbi (9), odnosno (10), postaju zbog (23) i (25) identični

$$\partial_k\, {}_i g^s_j = (\Gamma_j)_{ki} + (\Gamma_i)_{kj} = 2\, {}_i(\Gamma^s_i)_{kj} \tag{26}$$

i zbog simetrije fundamentalnog operatora (23) određuju $n^2(n+1)/2$ simetričnih (u vektorskim indeksima) dijelova koeficijenata koneksije $(\Gamma^s_i)_{kj}$. Prema tome $n^2(n-1)/2$ antisimetričnih dijelova koeficijenata $(\Gamma^A_i)_{kj}$ mogu se slobodno odabirati.

Koeficijenti koneksije mogu se rastaviti na simetrične i antisimetrične dijelove na ova dva načina

$$(\Gamma_i)_{kj} = (\Gamma^s_i)_{kj} + (\Gamma^A_i)_{kj} = (\Gamma_i)^s_{kj} + (\Gamma_i)^A_{kj}. \tag{27}$$

Iz (26) i (27) možemo izraziti simetrični dio u vanjskim indeksima koeficijenata koneksije ovako

$$(\Gamma_k)^{s}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i\, {}_j g^s_k + \partial_j\, {}_k g^s_i - \partial_k\, {}_i g^s_j) - (\Gamma_i)^{A}_{jk} - (\Gamma_j)^{A}_{ik}. \tag{28}$$

Za tenzor zakrivljenosti nalazimo da je potpuno određen s koeficijentima koneksije $(\Gamma^i)_{kj}$, odnosno $(\Gamma_i)_{kj}$. Za njegove komponente nalazimo ove veze neposredno iz (14) i (16)

$$R_{ijkr} = -R_{ikjr}, \quad R_{ijkr} = -R_{rjki}, \quad R_{ijkr} = R_{rkji}. \tag{29}$$

Jednostavnom primjenom relacija (14) i (21) izvodimo za tenzor zakrivljenosti niz značajnih rezultata. Tako dobivamo poopćeni Riccijev identitet ($\underset{ijk}{S}$ ciklička suma)

$$\underset{ijk}{S}\, [\nabla]_{jk}\, e_i = \underset{ijk}{S}\, \nabla_j (S^r{}_{ki}\, e_r),$$

$$\underset{ijk}{S}\, R_{ijk}{}^r = \underset{ijk}{S}\, \{\partial_j S^r{}_{ki} + S^q{}_{ki} (\Gamma^r)_{jq}\}, \quad (\forall r).$$

Nadalje, budući da identički iščezava operator

$$\underset{jkm}{S}\, [\nabla_m [\nabla]_{jk}] = \underset{jkm}{S}\, \{\nabla_m [\nabla]_{jk}] - [\nabla]_{jk}\, \nabla_m\} \equiv 0,$$

to identički iščezava i izraz

$$\underset{jkm}{S}\, [\nabla_m [\nabla]_{jk}]\, e_i \equiv 0, \quad \forall\, e_i,$$

a taj se pomoću (5), (14) i kovarijantnih derivacija komponenata tenzora zakrivljenosti može napisati u obliku poopćene Bianchijeve relacije

$$\underset{jkm}{S}\, \{D_m (R_{ijkr}) + R_{iqkr}\, S^q{}_{mj}\} = 0, \quad (\forall\, i, r). \tag{31}$$

5. Originalni Riemannov prostor

Opisani prostor, tj. specijalni slučaj metričkog prostora poopćene sheme (GX_n, slučaj Aa)), mogli bismo nazvati generalizirani Riemannov prostor. Teoriju originalnog Riemannova prostora dobit ćemo iz teorije realnog generaliziranog Riemannova prostora, ako zahtjevamo da tenzor torzije (21), odnosno njegovih $\frac{n^2(n-1)}{2}$ komponenata identički iščezavaju

$$S_{jk}{}^i = 2\,(\Gamma^i)^{A}_{jk} \equiv 0. \tag{32}$$

Taj zahtjev (32) ekvivalentan je zahtjevu da $n^2(n-1)/2$ komponenata $(\Gamma^A_i)_{jk}$, koje su prema (26) slobodno odaberive, odaberemo u (27) tako, da bude ispunjeno

$$(\Gamma_i)^{A}_{jk} \equiv 0, \quad (\Gamma_i)_{kj} = (\Gamma_i)^{s}_{kj} = [jk, i] = \frac{1}{2}(\partial_j\, {}_k g^s_i + \partial_k\, {}_i g^s_j - \partial_i\, {}_j g^s_k),$$

$$(\Gamma^A_i)_{kj} = [jk, i] - (\Gamma^s_i)_{kj} = \frac{1}{2}(\partial_j\, {}_k g^s_i - \partial_i\, {}_j g^s_k), \quad (\Gamma^s_i)_{kj} = \frac{1}{2}\, \partial_k\, {}_i g^s_j. \tag{33}$$

U originalnom realnom Riemannovu prostoru ([6] i [7], [8], [9]) koeficijenti konekcije (33), zbog (32), su simetrični u vanjskim indeksima, tj. oni su Christoffelovi simboli prve vrsti $[jk, i]$, i potpuno su određeni simetričnim metričkim (fundamentalnim) tenzorom. Nadalje, tenzor zakrivljenosti, zbog (33) i (14), također je potpuno određen simetričnim metričkim tenzorom. Prema tome polje realnog simetričnog metričkog tenzora (u tangentnim bazama) potpuno određuje sve osobine originalnog realnog Riemannova prostora.

Zbog (32) u originalnom Riemannovu prostoru Riccijev identitet (30) glasi

$$S\, R_{ijk}^{\;\;\;\;\cdot r} = 0, \quad (\forall r) \tag{30 a}$$

a Bianchijeva relacija (31) poprima oblik

$$\underset{jkm}{S}\, D_m R_{ijkr} = 0, \quad (\forall\, i, r) \tag{31 a}$$

Posebno istaknimo relaciju među komponentama tenzora zakrivljenosti

$$R_{ijkr} = R_{jirk}, \tag{34}$$

koju dobivamo iz (29) višekratnom primjenom Riccijeva identiteta (30a).

Izložena teorija Riemannova prostora vrijedi za ma koju dimenziju n i za ma koju signaturu od g, pa dakle sadrži kao daljnje specijalne slučajeve i teoriju Euklidova prostora kao i neeuklidskih prostora.

Zaključno mogli bismo istaknuti da izložena specijalizacija, tj. teorija Riemannova prostora, kao i neki drugi slučajevi (na pr. teorija 2- i 4-spinornog prostora i njihova veza s četiri-dimenzionalnim prostorom opće (specijalne) teorije relativnosti [11]) pokazuju, koliko je sadržajna i primjenljiva poopćena shema vektorskog i tenzorskog računa.

Literatura

[1] Tonnelat M. A., *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*, Gauthier-Villars, Paris (1965).

[2] Janković Z., *A contribution to the vector and tensor algebra*, Tensor, N. S. **21** (1970), 151—166.

[3] Janković Z., *A contribution to the vector and tensor analysis*, Tensor, N. S. **21** (1970): I, 167—185; II, 189—203.

[4] Janković Z., *On the transposition operators in a generalized vector and tensor calculus scheme*, Tensor, N. S. **22** (1971), 205—216.

[5] Janković Z., *On the transformation operators in a generalized vector and tensor calculus scheme*, Tensor, N. S. **27** (1973), 143—157.

[6] Riemann B., *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, 1854, Gesammelte Werke 1876.

[7] Eisenhart L. P., *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, (1966).

[8] Schouten J. A., *Ricci-calculus*. Springer, Berlin, (1954).

[9] Рашевский P. K., *Римановa геометрия и тензорний анализ, Наука, Москва* (1967).

[10] Janković Z., *On the conjugation in a generalized vector and tensor calculus scheme*, Tensor, N. S. **29** (1975), 217—224.

Janković Z., *On the conjugate vector spaces in a generalized vector and tensor calculus scheme*, Tensor, N. S. **29** (1975), 225—233.

[11] Janković Z., *A new approach to spinor theory*, Tensor, N. S. **32** (1978), 279—292.

Janković Z., *Spinors and the four-dimensional Riemann space, I Algebra, II Analysis*, Tensor, N. S. **36** (1982): I, 137—149: II, 155—174.

A NEW APPROACH TO THE THEORY OF THE RIEMANN SPACE

Dedicated to Prof. Dr. Tatomir Andjelić on the occasion of his eightieth anniversary

Summary

The author's generalized vector and tensor calculus scheme (especially, [2], [3], [4], [5]) was an attempt to create a unified scheme suitable to meet all needs in exact sciences, i.e. in classical, relativistic, quantum physisc and in unified theory. In this paper we show that the Riemann space ([6], also [7], [8], [9]) represents a simple special case of the generalized scheme.

Four forms (1) of the n-dimensional vector space X_n over an m-dimensional manifold Ω_m are related in the one-to-one way by the nondegenerate fundamental (2), transposition (4) operator and the transformation group operators (6).

The vector analysis is based on the notion of the absolute differential (derivative) (7) which should satisfy (8). Invariance to the parallel displacement of the relations between the vector forms is expressed through identical vanishing of the absolute differentials of the fundamental (9) (Γ, coefficients of connection), the transposition (10) and the transformation (11) operators. As a consequence, the commutators of the absolute differentials (13) and (14) of the mentioned operators also vanish identically, (15) and (16), (R, coefficients of curvature).

The metric space $GX_n(\Omega_n)$ is characterized by the equality of the dimensions $n=m$, the existence of the displacement vector (17), the tangent bases and the metrics (18) (the transposition operator is the metric tensor). Furthermore, the transformation operator components have the forms (19), the generalized nable operator (20), the torsion tensor (of the third rank) (21) exist and the coefficients of curvature become components of the fourth-rank curvature tensor.

Now, the generalized Riemann space represents the particular case *Aa)* of the metric space. This case *Aa)* is characterized by the identity and symmetry of the fundamental and transposition operator fields (23) (i. e. by the identity of the

bra and ket forms). Then, the transformation operator components are given by (24) and the coefficients of connection by (25), (26), (27) and (28.) The relations (29), (30) and (31) are valid for the curvature tensor components.

The original Riemann space [6] is a special real case of the generalized Riemann space, characterized by the vanishing of the torsion tensor (32). For the coefficients of connection, the consequence is (33) and for the curvature tensor, the relations are (30a), (31a) and (34). Thus, in the original Riemann space the connection and curvature are completely determined by the real symmetric metric (i. e. fundamental) tensor.

Prof. Dr Zlatko Janković
Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odjel
Marulićev trg 19, Zagreb