

O UZAJAMNOM UTICAJU HARMONIKA U NELINEARNIM SISTEMIMA SA MALIM PARAMETROM

Katica Hedrih — Predrag Kozić — Ratko Pavlović

Za približno određivanje zakona prinudnih oscilacija nelinearnih sistema sa više stepeni slobode oscilovanja ili elastičnih tela, u uslovima dejstva generalisane prinudne sile periodičke funkcije sa dve ili više frekvencija, kada se oscilatorni proces može predstaviti sistemom od N diferencijalnih jednačina sa malim parametrom ε , ili parcijalnom diferencijalnom jednačinom sa odgovarajućim graničnim uslovima u kojima se javljaju nelinearni članovi sa malim parametrom ε , može se veoma efikasno koristiti asimptotska metoda u čijoj osnovi stoji ideja iz jednofrekventne metode Krilova-Bogoljubova-Mitropoljskog. U osnovi ove metode je korišćenje principa jednofrekventnosti za određivanje dvoparametarske aproksimacije rešenja za oscilatorne procese koji su u tačnoj postavci nelinearni, a da su linearni bili bi onoliko puta frekventni, ako početnim uslovima nije izvršeno »filtriranje« frekvencija, koliko sistem ima stepeni, ne slobode kretanja, nego slobode oscilovanja. Znači, ako se radi o sistemu sa konačnim brojem stepeni slobode oscilovanja N , onda je u opštem slučaju rešenje N -frekventno, a ako se radi o elastičnom telu sa beskonačnim brojem stepeni slobode oscilovanja, onda sa beskonačnim brojem frekvencija. U uslovima kada na takve sisteme dejstvuju generalisane prinudne sile, periodičke funkcije vremena sa dve frekvencije, koje su sporo promenljive funkcije vremena, i u odgovarajućem rezonantnom opsegu dve određene sopstvene kružne frekvencije »neporemećenog« sistema, onda su oscilatorni procesi u takvim sistemima, takvi da ako bi se napravila analiza spektra harmonika sa dominantnim amplitudama, došlo bi se do zaključka da su dominantni harmonici-harmonici sa najvećim amplitudama, oni čije frekvencije su iz rezonantnih opsega u kojima su i frekvencije prinudnih sila, tako da se po ugledu na princip jednofrekventnosti, može postaviti za sastavljanje aproksimacija četvero-parametarske familije rešenja, princip dvofrekventnosti za sisteme sa dva ili više stepeni slobode oscilovanja. Problem pojave sekularnih članova se uklanja na istom principu kao što je to postavljeno kod dvoparametarske familije jednofrekventnih rešenja sistema sa više stepeni slobode oscilovanja i odgovarajućim početnim uslovima.

Mogućnost nalaženja četvero-parametarske familije dvo-frekventnih asimptotskih rešenja je ograničena uslovom dejstva prinudne kvaziperiodičke sile sa dve

frekvencije, koje su u odgovarajućim rezonantnim opsezima dve sopstvene kružne frekvencije »neporemećenog« sistema (odgovarajućeg linearnog sistema) i posebno početnim uslovima, koji moraju da budu takvi da omogućavaju formiranje »dvo-frekventnih« rešenja. S obzirom na veliku složenost nelinearnih oscilatornih procesa, kako u sistemima sa konačnim brojem stepeni slobode oscilovanja, tako i za kontinualne oscilatorne sisteme (elastična tela) sa beskonačno mnogo stepeni slobode oscilovanja i kako sem eksperimentalnim putem, ne postoji mogućnost za tačno ispitivanje zakona oscilovanja, u konačnom obliku, to su za analizu oscilatornih procesa pogodne dvofrekventne aproksimacije rešenja koje omogućavaju dvofrekventnu stacionarnu analizu fenomena procesa oscilovanja.

Ako bi se radila dvo-frekventna analiza linearnih sistema sa N stepeni slobode oscilovanja na koji dejstvuje $2 \leq N$, dvo-frekventna prinudna kvaziperiodička sila sa sporo promenljivim frekvencijama, onda bi zaključak bio da uzajamni uticaj harmonika ne postoji i da harmonici u prvoj aproksimaciji dvo-frekventnog rešenja imaju iste amplitude i faze i frekvencije kao što bi ih imali u odgovarajućim harmonicima i pri dejstvu na sistem samo komponente sile sa jednom odgovarajućom frekvencijom. Uzajamni uticaj harmonika se može uočiti tek kod slabo nelinearnih i jako nelinearnih sistema gde harmonici u dvo-frekventnom rešenju imaju različite faze i amplitude od onih koje bi imali u odgovarajućim harmonicima pri dejstvu na sistem komponentne sile sa jednom odgovarajućom frekvencijom.

U linearnim sistemima se ne javlja fenomen rezonantnog skoka, dok se u nelinearnim sistemima javlja, kako u procesima koji su jednofrekventni tako i u procesima koji su više-frekventni. Interesantno je uočiti da se kod dvo-frekventnih rešenja na amplitudno-frekventnim i fazno-frekventnim krivama u kritičnim zonama rezonantnog opsega frekvencija javljaju rezonantni skokovi i to sa jednim do dva ili više rezonantnih skoka u pravcu kontinualnog porasta diskretnih frekvencija harmonika, a takođe jedan ili dva ili više rezonantna skoka u pravcu kontinualnog opadanja diskretnih frekvencija harmonika, i ako bi se kod jedno-frekventnih procesa tog istog sistema pri dejstvu jedno-frekventne sile javio samo jedan rezonantni skok.

Kao očigledne primere za ovakve tvrdnje uzećemo dva sistema koja su bila predmet proučavanja u radovima i saopštenjima [7, 8, 9, 10, 11]. Prednost dvofrekventne asimptotske stacionarne analize nelinearnih sistema sa malim parametrom ϵ je u tome što se vrši upoređivanje amplituda i faza, odnosno amplitudno-frekventnih i fazno-frekventnih karakteristika za stacionarne harmonike u odgovarajućim rezonantnim opsezima frekvencija, a ne samih aproksimacija rešenja. Rešenja su »brže« promenljive funkcije vremena u poređenju sa amplitudama i fazama harmonika u dvo-frekventnoj aproksimaciji rešenja. Amplitude stacionarnih harmonika su obvojnice.

Na sledećim primerima ćemo dati dokumentaciju predhodnih zaključaka sa odgovarajućim specifičnostima.

Primer I — Slobodno, lako elastično vratilo sa tri diska i spojnicom nelinearne karakteristike, čije je kretanje opisano sledećim sistemom jednačina

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 - F(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + F(\varphi_2 - \varphi_1) - c_2(\varphi_3 - \varphi_2) = E_1 \cos \theta_1 + \alpha(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2),$$

$$J_3 \ddot{\varphi}_3 + c_2(\varphi_3 - \varphi_2) = -\alpha(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + E_2 \cos \theta_2,$$

gde su J_1, J_2, J_3 aksijalni momenti inercije masa diskova za osu vratila, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — generalisane koordinate-uglovi otklona diskova, $E_1 \cos \theta_1, E_2 \cos \theta_2$ momenti koji dejstvuju na diskove 2 i 3, c_1 i c_2 , torzijske krutosti vratila, α — koeficijent otpornog momenta, i $F(\varphi_2 - \varphi_1)$ nelinearni elastični moment vratila i spojnice između diskova 1 i 2 i ima oblik $F(x) = c_1 x + c_1'' x^3$, i to za $|x| \leq x_1$, važi do crte, a ceo za $|x| \geq x_1$, gde je $x = \varphi_2 - \varphi_1$. Ako uzmemo za nove koordinate $x = \varphi_2 - \varphi_1, y = \varphi_3 - \varphi_2$ prema broju stepeni slobode oscilovanja i za numeričke podatke iz [8, 10] za dvofrekventni režim, sistem diferencijalnih jednačina za redukovane amplitude a_1^* i a_2^* i faze ψ_1 i ψ_2 je

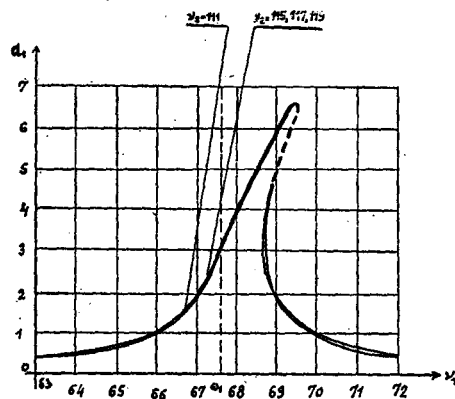
$$\frac{da_1^*}{dt} = -0,29559 a_1^* - \frac{271,9558}{(67,792 + \nu_1)} \sin \psi_1,$$

$$\frac{da_2^*}{dt} = -0,8275 a_2^* - \frac{339,6653}{(120,681 + \nu_2)} \sin \psi_2,$$

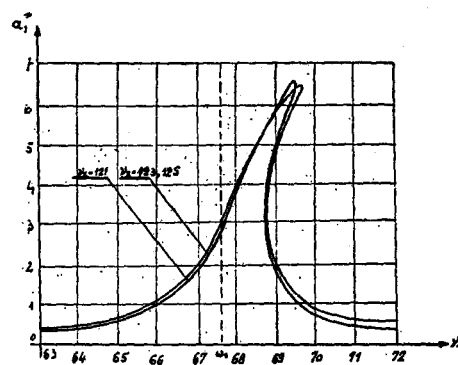
$$\frac{d\psi_1}{dt} = 67,792 - \nu_1 + 0,03748 (a_1^{*2} + 2 a_2^{*2}) - \frac{271,9558}{a_1^* (67,792 + \nu_1)} \cos \psi_1,$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = 120,681 - \nu_2 + 0,0688 (2 a_1^{*2} + a_2^{*2}) + \frac{339,6653}{a_2^* (120,681 + \nu_2)} \cos \psi_2.$$

Za zadate numeričke podatke sopstvene kružne frekvencije neporemećenog oscilovanja sistema su: $\omega_1 = 67,792$ [sec⁻¹] i $\omega_2 = 120,68$ [sec⁻¹] i frekvencije ν_1



Slika 1 a

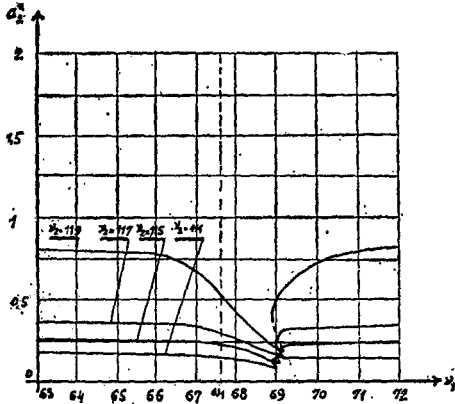


Slika 1 b

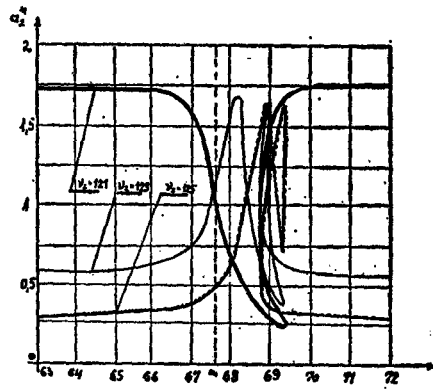
i ν_2 prinudnih momenata se uzimaju iz odgovarajućih rezonantnih opsega $\nu_1 \in (64, \sim 72$ [sec⁻¹]) i $\nu_2 \in (114, \sim 130$ [sec⁻¹]). Na slikama 1. a i b., i br. 2 a i b., i br. 3 a i b., predstavljene su familije amplitudno-frekventnih krivih prvog i drugog harmonika stacionarnog rezonantnog stanja za kontinualnu promenu diskretnih vrednosti frekvencija ν_1 i ν_2 prinudnih momenata u definisanim rezonantnim opsezima. Fazno-frekventne krive ni u prikazane zbog obima članka.

Na slikama br. 1 a i b., uočava se da se amplitudno-frekventne krive $a_1^*(\nu_1, \nu_2)$ prvog harmonika za stacionarni režim pri kontinualnoj promeni diskretnih vrednosti frekvencije ν_1 u oblasti $\nu_1 \in (\sim 64, \sim 72$ s⁻¹) sasvim neznatno menja sa diskretnim promenama $\nu_2 \in (\sim 114, \sim 130)$, a isti je slučaj i sa fazom ψ_1 za stacionarni režim.

Sa slika br. 2 a i b., može se videti da se amplitudno frekventna kriva drugog harmonika $a_2^*(\nu_1, \nu_2)$ za stacionarni režim pri kontinualnoj promeni diskretnih vrednosti frekvencije ν_1 u opsegu $\nu_1 \in (\sim 64, \sim 72)$ sa diskretnom promenom $\nu_2 \in [114, \sim 130]$ znatno menja i to i po obliku i po veličinama amplituda. Zaključak je da kontinualna promena diskretnih vrednosti frekvencija prvog harmonika bitno utiče na amplitudu drugog harmonika sa posebno izraženim uticajem ν_2 pri istovremenom izboru vrednosti ν_1 i ν_2 iz »kritičnog« opsega odgovarajućih rezonantnih opsega frekvencija. Za $\nu_2 = 122$ [sec⁻¹] krive (a_2^*, ν_1) menjaju karakter u oblasti $\nu_1 \in [\sim 66, \sim 69,5$ [sec⁻¹]]. Uticaj prvog harmonika na drugi u toj oblasti se za $\nu_2 < 122$ [sec⁻¹] izražavao kroz smanjenje amplituda a_2^* , a istovremeno sa povećanjem a_1 , dok se u toj oblasti za $\nu_2 \in [\sim 122, \sim 126]$ na krivoj (a_2^*, ν_1) izražava uticaj i kroz povećanje i smanjenje amplituda »neregularnog« dela krive, i za $\nu_2 < 126$ [sec⁻¹]



Sl. 2 a



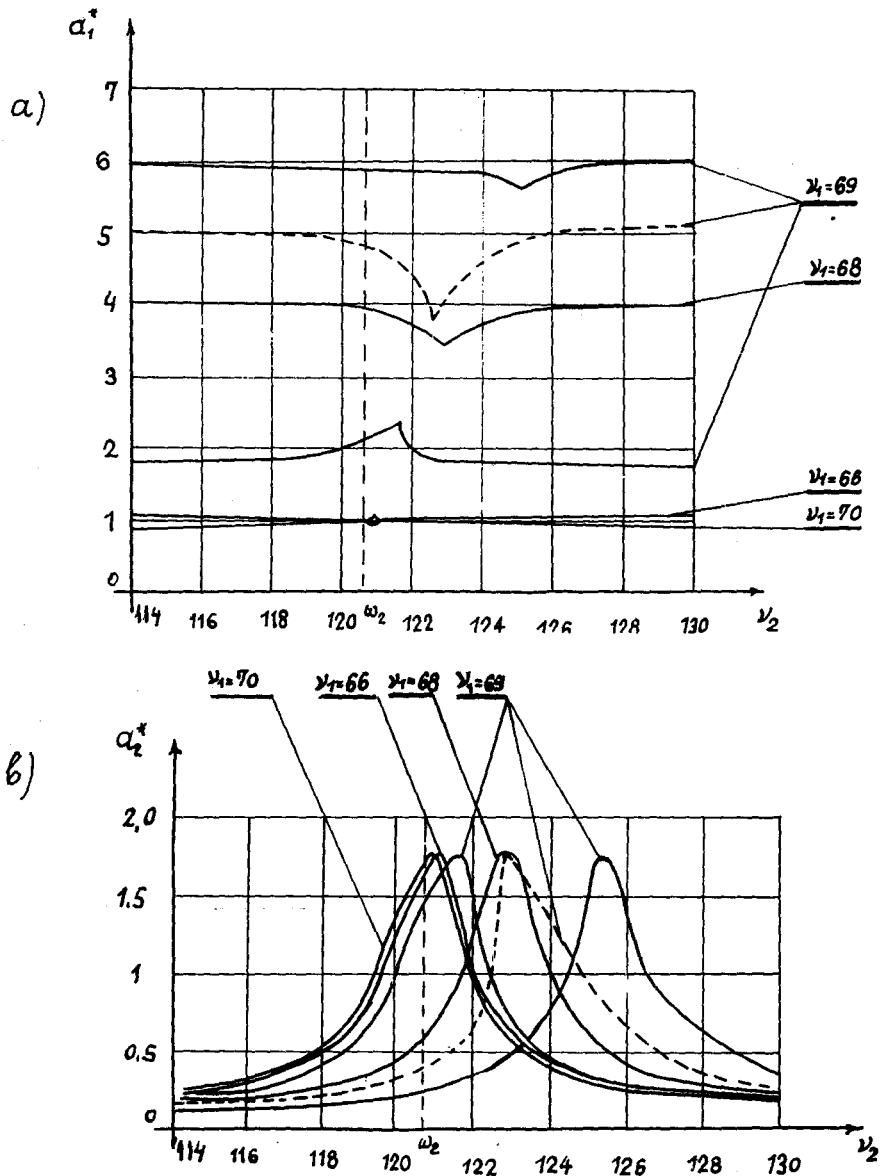
Sl. 2 b

kroz povećanje tih amplituda u odnosu na amplitude sa ostalih dela krive. Naglo povećanje amplitude prvog harmonika izaziva povećanje amplitude a_2^* za $\nu_2 > 126$ [sec⁻¹].

Na slici br. 3 a i b., prikazane su familije amplitudno-frekventnih krivih $a_1^*(\nu_1, \nu_2)$ i $a_2^*(\nu_1, \nu_2)$ za diskretne vrednosti frekvencija $\nu_1 \in [66, 70$ [sec⁻¹]]. Sa promenom diskretnih vrednosti ν_1 do $\nu_1 < 69$ [sec⁻¹] amplitudno-frekventne krive $a_1^*(\nu_1, \nu_2)$ prvog harmonika su skoro prave sa deformacijama u rezonantnom opsegu $\nu_2 \in [\sim 120, \sim 124$ [sec⁻¹]], koje se izražavaju kroz neznatno smanjenje amplituda. Nagla povećanja stacionarne amplitude drugog harmonika izazivaju neznatna smanjenja stacionarne amplitude $a_1^*(\nu_1, \nu_2)$ prvog harmonika. Za $\nu_1 = 69$ [sec⁻¹] postoje tri grane amplitudno-frekventne karakteristike $a_1^*(\nu_1, \nu_2)$ sa velikim, srednjim (nestabilnim) i malim amplitudama i neznatnim deformacijama u rezonantnom opsegu $\nu_2 \in [120, 126$ [sec⁻¹]]. Uticaj drugog harmonika na amplitudu i fazu prvog harmonika je neznatan.

Sa promenom diskretnih vrednosti ν_1 do $\nu_1 < 69$ [sec⁻¹] amplitudno-frekventne krive $a_2^*(\nu_1, \nu_2)$ drugog harmonika su sa jednom karakterističnom granom i sa maksimumima amplituda, koji su pomereni ka višim frekvencijama od ω_2 . Za ν_1 oko 69 [sec⁻¹] javljaju se tri grane amplitudno-frekventne krive od kojih je jedna srednja nestabilna. Za $\nu_1 > 69,5$ [sec⁻¹] amplitudno frekventne krive $a_2^*(\nu_1, \nu_2)$ su sa

jednom granom i maksimumi amplituda se pomeraju ka nižim frekvencijama i bliže ω_2 . Zaključak je da je uticaj prvog harmonika na amplitudu i fazu drugog harmonika znatan u uskom opsegu frekvencije ν_1 , nešto pomerenom ka višim frekvencijama od ω_1 . Uticaj drugog harmonika na prvi je neznatan.



Slika 3 a i b

Pojava rezonantnog skoka amplitude a_1^* prvog harmonika je sa veće amplitude na manju pri kontinualnom povećanju diskretnih frekvencija ν_1 , i sa manje na veću

vrednost amplitude pri kontinualnom smanjenju diskretnih vrednosti frekvencija ν_1 što se može uočiti sa slike br. 1. Sa slike br. 2. pojava rezonantnog skoka amplitude a_2^* drugog harmonika je sa manje vrednosti na veću amplitudu pri porastu diskretnih vrednosti frekvencija ν_1 do $\nu_2 \approx 122$ [sec⁻¹] i sa veće na manju pri opadanju ν_1 , dok na primer $\nu_2 = 125$ [sec⁻¹] je obrnut slučaj. Specifičnosti rezonantnog skoka su vezane za stabilnost amplituda i faza harmonika, odnosno samog oscilatornog režima.

Primer II — Male oscilacije plitke cilindrične ljuste na elastičnoj podlozi opisane su sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi - R \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0,$$

$$R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + D \nabla^4 w + \rho h R^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c R^4 w = \varepsilon R^4 \left(-\beta w^3 - \delta \frac{\partial w}{\partial t} + E_1 \sin \theta_1 + E_2 \sin \theta_2 \right),$$

sa graničnim uslovima za slobodno-oslonjenu konturu

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{l}{R} \end{array} \right\} w = v = M_1 = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \beta = 0 \\ \beta = \beta_0 \end{array} \right\} u = w = M_2 = 0,$$

i početnim uslovima datim u [9, 11], oblika talasa prva dva harmonika sopstvenih neporemećenih oscilacija u čijim opsezima su frekvencije ν_1 i ν_2 prinudnih sila $\varepsilon E_1 \sin \theta_1$ i $\varepsilon E_2 \sin \theta_2$ gde je Φ naponska funkcija, a w ugib ljuste. Za numeričke podatke iz [9, 11], prve dve sopstvene kružne frekvencije za zadatu ljustu su $\omega_{11} = 391,62$ [sec⁻¹] i $\omega_{12} = 596$ [sec⁻¹] dok je sistem diferencijalnih jednačina prve aproksimacije za amplitude i faze dvo-frekventnih oscilacija

$$\frac{dR_{11}^{(2)}}{dt} = -1,60256 R_{11}^{(2)} - \frac{99,762}{391,62 + \nu_1} \cos \varphi_{11},$$

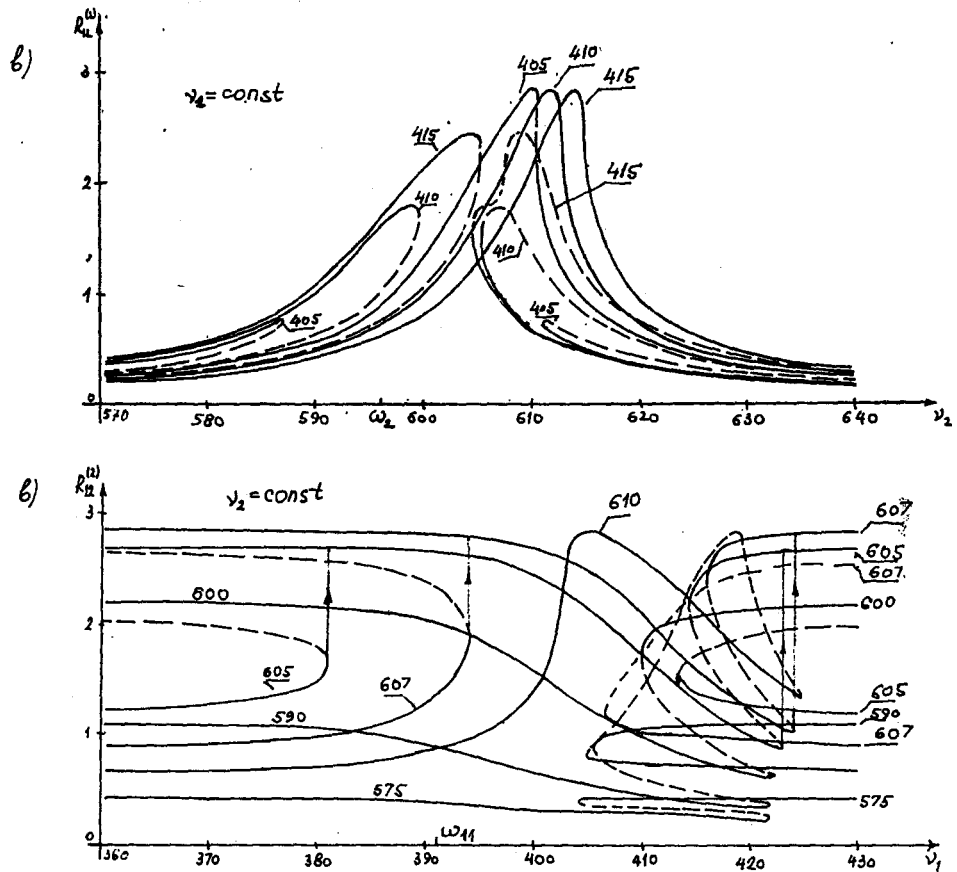
$$\frac{d\varphi_{11}}{dt} = 391,92 - \nu_1 + 2301,8 [9(R_{11}^{(2)})^2 + 8(R_{12}^{(2)})^2] + \frac{99,762}{R_{11}^{(2)}(391,62 + \nu_1)} \sin \varphi_{11},$$

$$\frac{dR_{12}^*}{dt} = -1,602 R_{12}^{(2)} - \frac{110,85}{596,0 + \nu_2} \cos \varphi_{12},$$

$$\frac{d\varphi_{12}}{dt} = 596,0 - \nu_2 + 1512,47 [9(R_{12}^{(2)})^2 + 8(R_{11}^{(2)})^2] + \frac{110,85}{R_{12}^{(2)}(596,0 + \nu_2)} \sin \varphi_{12}.$$

Na slikama br. 4 a i b., 5 a i b., i 6 a i b., predstavljene su familije amplitudno-frekventnih krivih prvog i drugog harmonika aproksimacije rešenja pomeranja w stacionarnog rezonantnog stanja za kontinualnu promenu diskretnih vrednosti frekvencija ν_1 i ν_2 prinudnih sila u rezonantnim frekventnim opsezima $\nu_1 \in [360, 430$ [sec⁻¹]] i $\nu_2 \in [570, 640$ [sec⁻¹]]. Fazno-frekventne krive nisu prikazane zbog obima članka.

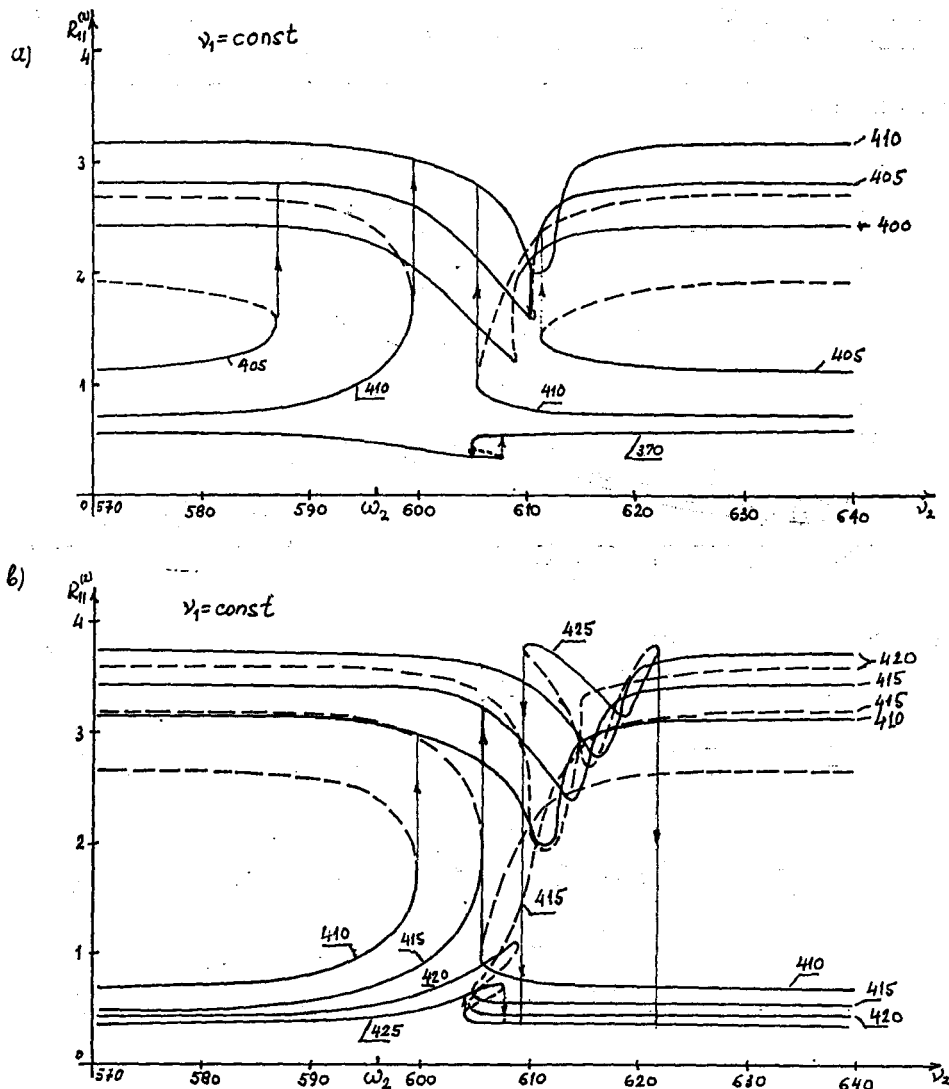
Amplitudno-frekventne krive $R_{11}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ prvog harmonika na slici br. 4. su slične međusobno za frekventni opseg $\nu_2 \in [570, \sim 604 [\text{sec}^{-1}]]$. Uočava se da se za veće vrednosti $\nu_2 > 590 [\text{sec}^{-1}]$ skraćuje frekventni opseg nestabilnih amplituda stim što se leva granica opsega pomera ka višim frekvencijama, dok se desna granica neprimetno pomera u istom smeru. Isto važi i za amplitudu drugog harmonika $R_{12}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ sa uočljivom tendencijom porasta sa povećanjem diskretnih vrednosti frekvencije ν_2 .



Slika 4 a i b

U frekventnom opsegu $\nu_2 \in [604, \sim 609 [\text{sec}^{-1}]]$ javljaju se dve nove dopunske grane amplitudno-frekventne karakteristike i to jedna na levoj, a druga na desnoj strani što je prikazano na slici br. 4a. Leva dopunska grana amplitude $R_{11}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ za $\nu_2 \in [604, \sim 609 [\text{sec}^{-1}]]$ prvog harmonika se nalazi iznad osnovne grane amplitudno-frekventne krive, a desna ispod nje. Delovi dopunskih grana amplitudno-frekventnih krivih bliži osnovnoj grani su sa nestabilnim amplitudama. Na slici br. 4.b, prikazana je familija amplitudno-frekventnih krivih $R_{12}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ za diskretne vrednosti ν_2 . U opsegu $\nu_2 \in [\sim 604, \sim 609 [\text{sec}^{-1}]]$, amplitudno-frekventna kriva

drugog harmonika ima tri grane, osnovnu i dve dopunske, koje su obe ispod osnovne grane. Delovi dopunskih grana bliže osnovnoj grani su takođe sa nestabilnim amplitudama.



Slika 5 a i b

Sa kontinualnim porastom diskretnih vrednosti frekvencija ν_2 u opsegu $\nu_2 \in [\sim 604, \sim 609] [\text{sec}^{-1}]$ delovi dopunskih grana amplitudno-frekventne karakteristike se međusobno udaljavaju, dok same dopunske grane »idu u susret« (približavaju se) jedna drugoj. Za $\nu_2 = 610 [\text{sec}^{-1}]$ uočava se da je došlo do »stapanja« (»poništanja«) delova dopunskih grana (nestabilne amplitude) sa delovima osnovne grane amplitudno-frekventne krive čime smo dobili samo jednu granu, kao da je ona nastala od delova dopunskih grana (stabilne amplitude), i delova osnovne

grane amplitudno-frekventne karakteristike, kako prvog tako i drugog harmonika. Ovo se javlja za $\nu_2 \approx 610 [\text{sec}^{-1}] > \omega_{12} = 596 [\text{sec}^{-1}]$ jer sistem ima tvrdi nelinearnu karakteristiku.

Pojavu dopunskih grana za $\nu_2 \in [\sim 604, \sim 609 [\text{sec}^{-1}]]$ i »talasanje« vrhova osnovne grane za $\nu_2 \in [\sim 610 [\text{sec}^{-1}], \sim 622 [\text{sec}^{-1}]]$ objašnjavamo međusobnim uticajem prvog i drugog harmonika u rezonantnom opsegu $\nu_2 \in [\sim 604, \sim 609, \sim 622, [\text{sec}^{-1}]]$, druge sopstvene kružne frekvencije $\omega_{12} = 596 [\text{sec}^{-1}]$, koji je zbog tvrde nelinearne karakteristike sistema pomeren ka višim frekvencijama.

U frekventnom opsegu $\nu_2 \in [\sim 610, \sim 624 [\text{sec}^{-1}]]$, na amplitudno-frekventnim krivim prvog i drugog harmonika $R_{11}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ i $R_{12}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ uočljivo je »krivljenje« (»talasanje«) vrhova (lokalnih ekstremnih vrednosti) amplitudno-frekventnih krivih i približavanje delova grana sa stabilnim i nestabilnim amplitudama. Za $\nu_2 \geq 625 [\text{sec}^{-1}]$ se uočava da je amplitudno frekventna kriva $R_{11}^{(2)}$ prvog harmonika slična onima koje imamo za $\nu_2 < 600 [\text{sec}^{-1}]$, dok je amplitudno-frekventna kriva drugog harmonika $R_{12}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ »zaokrenuta« za 180° .

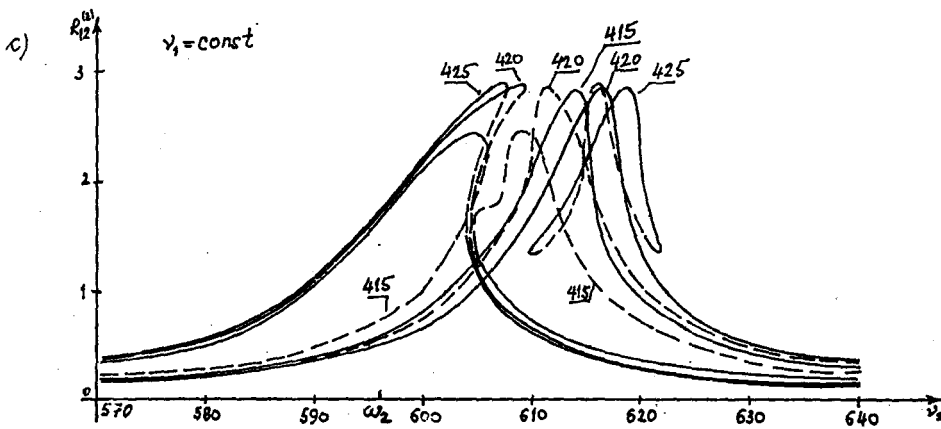
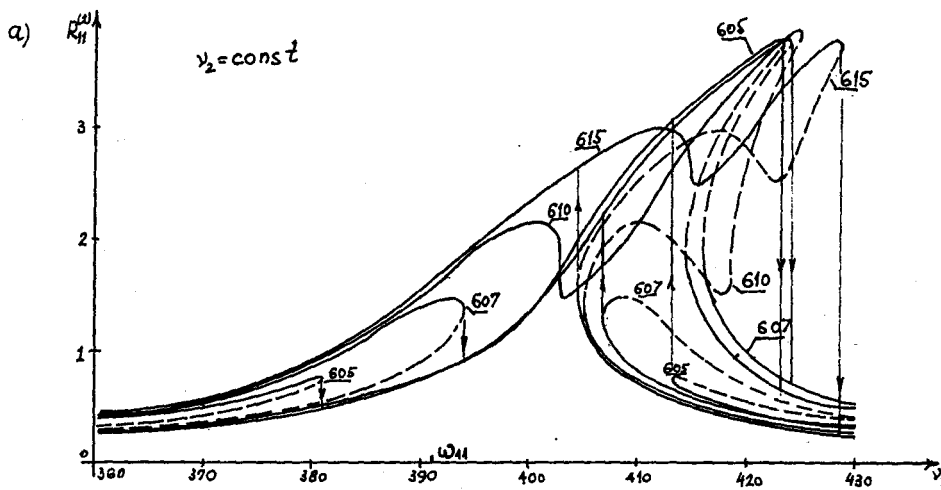
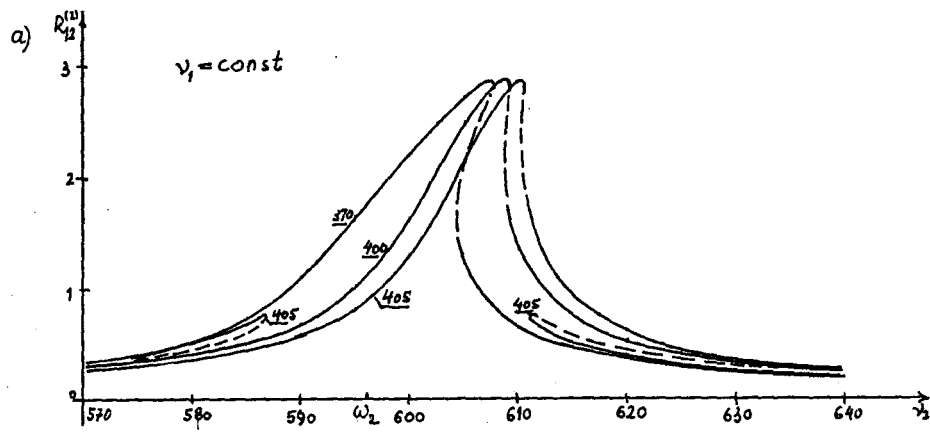
Slične zaključke možemo izvesti i za fazno-frekventne karakteristike.

Na slikama br. 5 a i b., i 6 a i b., prikazane su familije amplitudno-frekventnih karakteristika za diskretne vrednosti frekvencije $\nu_1 = \text{const}$. Za frekventni opseg $\nu_1 \in [\sim 370, \sim 402 [\text{sec}^{-1}]]$ uočava se porast amplitude prvog harmonika $R_{11}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ i suženje frekventnog opsega ν_2 u kome se javljaju nestabilne amplitude sa porastom diskretnih vrednosti frekvencije ν_1 , s tim što se leva granica pomera ka višim frekvencijama dok se desna granica skoro ne pomera. Dopunske grane, pored osnovne grane amplitudno-frekventne karakteristike $R_{11}^{(2)}$ prvog i $R_{12}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ drugog harmonika se javljaju u frekventnom opsegu $\nu_1 \in [\sim 402, \sim 417 [\text{sec}^{-1}]]$, tj. za $\nu > 402 [\text{sec}^{-1}]$. Delovi ovih dopunskih grana koji su bliži osnovnoj grani su sa nestabilnim amplitudama. Sa kontinualnim porastom diskretnih vrednosti frekvencija ν_1 »otvor« dopunskih grana se širi i one »idu u susret« jedna drugoj. Istovremeno se osnovna grana amplitudno-frekventne krive prvog harmonika pomera na više sa tendencijom ispravljanja (ekstremna vrednost je manje izražena).

Za $\nu_1 = 420 \text{ sec}^{-1}$ amplitudno-frekventna kriva $R_{11}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ prvog harmonika sastoji se iz tri grane sa malim, srednjim (nestabilnim) i velikim amplitudama koje kao da su nastale »spajanjem« dopunskih grana i »razdvajanjem« na tri grane sa stabilnim i nestabilnim ili sa samo nestabilnim amplitudama. Kao da je nastalo »spajanje« delova dopunskih grana sa nestabilnim amplitudama čime je nastala nova srednja grana amplitudno-frekventnog grafika, dok je donja grana formirana od stabilnih delova dopunskih grana i jednog odsečka desne dopunske grane sa nestabilnim amplitudama, tako da je to sada grana sa stabilnim i na jednom delu nestabilnim amplitudama.

Slični su zaključci i za amplitudno-frekventnu karakteristiku $R_{12}^{(2)}$ drugog harmonika u istom frekventnom opsegu.

Za $\nu_1 = 425 [\text{sec}^{-1}]$ uočava se da na amplitudno-frekventnoj krivoj prvog harmonika postoje dve grane, od kojih je jedna zatvorena kriva (»osmica«) koja je nastala »vezivanjem« osnovne grane i dopunske grane (sa nestabilnim amplitudama). Isti je zaključak i za amplitudno-frekventnu krivu $R_{12}^{(2)}$ drugog harmonika. »Sažimanje« zatvorene krive (»osmice«) se nastavlja do $\nu_1 = 433 [\text{sec}^{-1}]$ i na toj frekvenciji se gubi, pa na amplitudno-frekventnim karakteristikama ostaje po jedna



Slika 6a, b i c

grana slična onim koje smo dobili za $\nu_1 = 370$ [sec⁻¹], stim što je grana amplitude prvog harmonika vrhom okrenuta na gore.

Iz izloženog se zaključuje da je izraženiji uticaj prvog harmonika na drugi, nego drugog na prvi u ukom rezonantnom frekventnom opsegu prve odno. no druge frekvencije, koji su zbog karaktera nelinearnosti pomereni ka višim frekvencijama. Za slučaj meke karakteristike nelinearnosti sistema rezonantni opsezi bi bili pomereni ka nižim frekvencijama.

Pojava rezonantnog skoka je uočljiva na svim amplitudno-frekventnim karakteristikama i prvog i drugog harmonika a u tačkama prelaska sa stabilnih na nestabilne amplitude. Na slikama 4, 5 i 6. su strelicom prikazani mogući rezonantni skokovi. Na primer, na sl. 4 a i b., se uočava da sa povećanjem diskretnih vrednosti frekvencija ν_1 kod amplitude prvog harmonika $R_{11}^{(2)}$ nastupa skok sa većih na manje vrednosti amplitude, a kod amplitude $R_{12}^{(2)}$ drugog harmonika sa manjih vrednosti na veće vrednosti amplitude, i to u dva skoka.

Pri opadanju diskretne vrednosti frekvencije ν_1 , $R_{11}^{(2)}$ ima skok sa manje na veću vrednost amplitude, dok $R_{12}^{(2)}$ ima skok sa većih vrednosti na manje vrednosti amplitude. Ovo važi za oba rezonantna skoka. Karakter rezonantnih skokova zavisi i od karaktera nelinearnosti sistema.

Uopštavajući zaključke kako za diskretni sistem sa dva stepena slobode oscilovanja iz primera 1. i elastično telo iz primera 2., gde se u oba slučaja radi o nelinearnostima istog tipa (tvrda karakteristika) i dvo-frekventno-stacionarnoj analizi dolazimo do sličnih zaključaka o uzajamnom uticaju harmonika. Uočljivo je takođe da je kod elastičnih tela izraženiji uticaj višeg harmonika na osnovni nego što je to slučaj kod diskretnih sistema. U konkretnom primeru oscilovanja ljuke taj uticaj se izražava i u pojavi dopunskih krivih i »talasanju« vrha amplitudno-frekventne krive, dok se kod posmatranog diskretnog sistema taj uticaj ogleda samo u neznatnoj promeni vrednosti amplitude.

Obim rada nije omogućio iznošenje rezultata istraživanja uzajamnog uticaja harmonika pri nestacionarnim dvo-frekventnim asimptotskim analizama.

Literatura

- [1] Митропольский Ю. А., *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний*, „Наука“, Москва 1964.
- [2] Митропольский Ю. А. — Мосеев Б. И., *Асимптотические решения уравнений в частных производных*, „Высшая школа“ Киев 1976.
- [3] Hedrih (Stevanović) K., *Izabrana poglavlja nelinearnih oscilacija*, Niš 1975.
- [4] Hedrih K., *Studija metoda teorije nelinearnih oscilacija*, Niš 1979.
- [5] Hedrih K. i drugi, *Nelinearne oscilacije sistema sa više stepeni slobode oscilovanja*, Naučno-istraživački projekat, Niš, 1979-1981.
- [6] Стеванович-Хедрих К., *Двухчастотные нестационарные вынужденные колебания балки*, „Математическая физика“ вып. 12, 1972.
- [7] Hedrih K. — Kozic R., *Stacionarni i nestacionarni režimi nelinearnih oscilacija tri diska na lakom elastičnom vratilu*, Saopštenje u Institutu mehanike Beograd 9. februar 1983.
- [8] Hedrih K., *One frequency proper nonlinear vibration of thin plate*, Teorijska i primenjena mehanika br 4., Beograd 1978.

[9] Hedrih K. — Pavlović R., *O osobinama rezonantnog skoka u elastičnim sistemima na primeru dvofrekvenih nelinearnih oscilacija plitke cilindrične ljuske*, Saopšteno u Institutu matematike, Beograd 16. februara 1983.

[10] Kozić P., *Izučavanje nelinearnih torzijskih oscilacija vratila asimptotskom metodom*, Magistarski rad, Beograd 1982.

[11] Pavlović R., *Prilog nelinearnim oscilacijama plitkih cilindričnih ljuski*, Magistarski rad, Niš 1982.

О ВЗАИМНОМ ВЛИЯНИИ ГАРМОНИК В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Резюме

В статье пользуя стационарный асимптотический двухчастотный анализ нелинейных систем с малым параметром даются выводы о взаимном влиянии гармоник в нелинейной системе с конечным числом степеней свободы и в распределенной системе. Пользуясь стационарным двухчастотным анализом стационарного режима колебаний указывается на явление одного или выше резонантных скачков для непрерывного увеличения или уменьшения стационарных частот вынужденных сил или моментов, как последствие взаимного влияния гармоник в резонантном опсеге соответствующей частоте.

Dr Katica Hedrih, v. prof. 18000 Niš Vojvode Tankosića 3/22

Mr Predrag Kozić, asistent 18000-Niš Stanka Paunovića 43/2

Mr Ratko Pavlović, asistent 18000-Niš Braće Taskovića 79/16