Зборник радова Математичкої института. Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

NELINEARNE TORZIJSKE OSCILACIJE VRATILA SA DISKOVIMA NA KRAJEVIMA

Katica (Stevanović) Hedrih

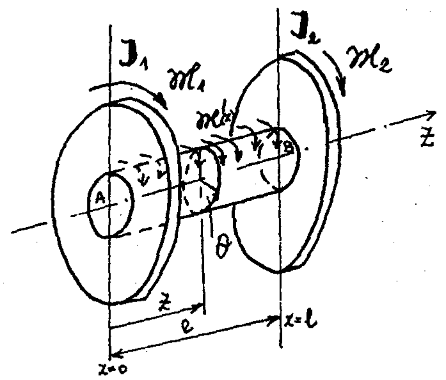
Uvod

U konstrukcijama reduktora kao konstruktivni elementi javljaju se vratila sa zupčanicima na krajevima, ili šire u transmisionim sistemima vratila sa diskovima na slobodnim krajevima. Zato je od interesa izučiti sve specifičnosti torzijskih oscilacija takvog torzijskog sistema. U ovom radu primenom asimptotske metode Krilova-Bogoljubova-Mitropoljskog izvedeni su izrazi za prvu aproksimaciju rešenja i sistem, diferencijalnih jednačina prve aproksimacije za amplitudu i fazu pobuđenog oblika oscilovanja vratila sa diskovima na krajevima u uslovima dejstva poremećajnih raspodeljenih i koncentrisanih torzionih spregova.

Sastavljanje asimptotske aproksimacije rešenja

Pretpostavimo da se model sistema sastoji od vratila kružnog ili kružno-prstenastog poprečnog preseka polarnog momenta inercije I_0, gustine materijala ρ, modula klizanja G, dužine l, i dva kruta diska aksijalnih momenata inercije mase za osu vratila J_1 i J_2, a predstavljen je na slici br. 1. Ako sa $\theta\,(z, t)$ označimo ugao torzije vratila u preseku sa koordinatom z, mereno od levog diska u pravcu ose vratila i za opštije uslove dejstva generalisanih sila možemo napisati sledeću parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \varepsilon f\left(z, \alpha, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t}, \ldots\right), \tag{1}$$



Sl. 1

kao parcijalnu diferencijalnu jednačinu torzijskih oscilacija vratila i sledeće granične uslove

$$\mathbf{J}_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\bigg|_{z=0} = \mathbf{G} I_0 \frac{\partial \theta}{\partial z}\bigg|_{z=0} - \varepsilon g\left(\alpha, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \ldots\right)\bigg|_{z=0}, \tag{2}$$

$$\mathbf{J}_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\bigg|_{z=l} = -\mathbf{G} I_0 \frac{\partial \theta}{\partial z}\bigg|_{z=l} - \varepsilon l\left(\alpha, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \ldots\right)\bigg|_{z=l}, \tag{2''}$$

gde su: t vreme; ε mali parametar; $f\left(z, \alpha, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \ldots\right)$ – nelinearna funicija z, α, θ i njegovih izvoda po z i t, periodička perioda 2π po α i glatka po z na intervalu $[0, l]$; $g\left(\alpha, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \ldots\right)\bigg|_{z=0}$ i $l\left(\alpha, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \ldots\right)\bigg|_{z=l}$ nelinearne cele racionalne funkcije i njegovih izvoda, i periodične funkcije po α perioda 2π. Pretpostavimo da je $\frac{d\alpha}{dt} = \nu(\tau) \approx \omega_1$; $\tau = \varepsilon t$, gde je ω_1 sopstvena kružna frekvencija »neporemećenog« oscilovanja.

Pretpostavimo da su početni uslovi oblika

$$\begin{aligned} \theta(z,0) &= p(\cos \lambda_1 z - \mu_1 \lambda_1 l \sin \lambda_1 z) + \varepsilon \ldots, \\ \frac{\partial \theta}{\theta t}\bigg|_{t=0} &= q(\cos \lambda_1 z - \mu_1 \lambda_1 l \sin \lambda_1 z) + \varepsilon \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

gde su p i q konstante, λ_1 prvi koren frekventne jednačine »neporemećenog« oscilovanja, koje se dobija za $\varepsilon = 0$ iz diferencijalne (1) i graničnih uslova (2), koja glasi

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{(\mu_1 + \mu_2)\xi}{\mu_1 \mu_2 \xi^2 - 1}, \tag{4}$$

gde je $\xi = \lambda l$, $\mu_1 = \mathbf{J}_1/\mathbf{J}$, $\mu_2 = \mathbf{J}_2/\mathbf{J}$, $\mathbf{J} = \rho I_0 l$, $\omega_n = \frac{\xi_n}{l}\sqrt{\frac{\mathbf{G}}{\rho}}$ – sopstvena kružna frekvencija neporemećenog oscilovanja. Sopstvena funkcija »neporemećenog« oscilovanja za »neporemećene« granične uslove je

$$Z_n(z) = C_n\left(\cos \frac{\xi_n}{l} z - \mu_1 \xi_n \sin \frac{\xi_n}{l} z\right). \tag{5}$$

Kako pretpostavljeni početni uslovi i oblast promene kružne frekvencije $\nu(\tau)$; $\tau = \varepsilon t$, poremećajnog sprega omogućuju formiranje jednofrekventnih oscilacija u prvom obliku dinamičke ravnoteže i kako su zadovoljeni posebni uslovi [1] za primenu metode Krilova-Bogoljubova-Mitropoljskog, te aproksimaciju rešenja tražimo u obliku

$$\begin{aligned} \theta(z, t) &= R(t)\,[\cos \lambda_1 z - \mu_1 \xi_1 \sin \lambda_1 z] \cos \psi + \\ &+ \varepsilon w_1(z, \alpha, R, \psi) + \varepsilon^2 w_2(z, \alpha, R, \psi) + \cdots, \end{aligned} \tag{6}$$

u kome su $R(t)$ amplituda i $\varphi(t)=\psi-\alpha$ faza osnovnog harmonika asimptotske aproksimacije rešenja, koje se kao funkcije vremena određuju iz sistema diferencijalnih jednačina odgovarajuće aproksimacije

$$\frac{dR}{dt}=\varepsilon\mathcal{A}_1(R,\varphi)+\varepsilon^2\mathcal{A}_2(R,\varphi)+\cdots,\qquad \varphi=\psi-\alpha$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega_1-\nu(\tau)+\varepsilon\mathcal{B}_1(R,\varphi)+\varepsilon^2\mathcal{B}_1(R,\varphi)+\cdots,\qquad \frac{d\alpha}{dt}=\nu(\tau) \tag{7}$$

$$\tau=\varepsilon t.$$

Potrebni parcijalni izvodi pretpostavljene aproksimacije rešenja (6) imajući u vidu (7) su

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=-\lambda_1^2R_1(t)\,(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\cos\psi+\varepsilon\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}+\cdots, \tag{8}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=-R\omega_1(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\sin\psi+\varepsilon\Big\{(\cos\lambda_1 z-$$

$$-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\,[\mathcal{A}_1(R,\varphi)\cos\psi-R\mathcal{B}_1(R,\varphi)\sin\psi]+$$

$$+\left(\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right)^{(1)}w_1\Big\}+\varepsilon^2\ldots, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=-R\omega_1^2(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\cos\psi+\varepsilon\Big\{(\cos\lambda_1 z-$$

$$-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\left[\cos\psi\left\langle-2\mathcal{B}_1R\omega_1+\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right\rangle-\right.$$

$$\left.-\sin\psi\left\langle 2\omega_1\mathcal{A}_1+R\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right\rangle\right]+$$

$$+\left[\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{(2)}w_1\Big\}+\varepsilon^2\Big\{(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z) \tag{10}$$

$$\cdot\left\langle\cos\psi\left[-2R\omega_1\mathcal{B}_2+(\omega_1-\nu)\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial\varphi}\right]-\sin\psi\left[2\omega_1\mathcal{A}_2+R(\omega_1-\nu)\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial\varphi}\right]+\right.$$

$$+\cos\psi\left[\mathcal{A}_1\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial R}+\mathcal{B}_1\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\varphi}-R\mathcal{B}_1^2\right]+\sin\psi\left[-2\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1-R\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial R}\mathcal{A}_1-\right.$$

$$\left.\left.-R\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\varphi}\mathcal{B}_1\right]\right\rangle+\left[\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{(2)}w_2+2\mathcal{B}_1\left(\nu\frac{\partial^2 w_1}{\partial\psi\,\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial\psi^2}\right)+$$

$$+\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\varphi}(w_1-\nu)+\frac{\partial w_1}{\partial R}\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)+2\mathcal{A}_1\left(\omega_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial R\,\partial\psi}+\nu\frac{\partial^2 w_1}{\partial R\,\partial\alpha}\right)\Big\}+\varepsilon^3\ldots.$$

Pretpostavljeno rešenje i njegove parcijalne izvode (8—10) unesemo u parcijalnu diferencijalnu jednačinu (1) i granične uslove (2), zatim izjednačavanjem koeficijenata uz jednake stepene sa leve i desne strane jednačine i graničnih uslova dobijamo da su za ε^{0} izrazi identički međusobom jednaki; a za slučaj ε treba da je

$$\left[\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{(2)} w_1=c^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}+(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\left\{\cos\psi\left[2\,\mathcal{B}_1 R\,\omega_1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\psi}(\omega_1-\nu)\right]+\sin\psi\left[2\,\mathcal{A}_1\,\omega_1+R\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right]\right\}+f_0(z,\alpha,R,\psi), \tag{11}$$

i

$$G\,I_0\left.\frac{\partial w_1}{\partial z}\right|_{z=0}=J_1 c^2\left.\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}\right|_{z=0}+J_1 f_0(0,\alpha,R,\psi)+g_0(\alpha,R,\psi), \tag{12}$$

$$G\,I_0\left.\frac{\partial w_1}{\partial z}\right|_{z=l}=-J_2 c^2\left.\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}\right|_{z=l}-J_1 f_0(l,\alpha,R,\psi)-l_0(\alpha,R,\psi), \tag{13}$$

čime smo dobili diferencijalnu jednačinu (11) i granične uslove (12—13) po nepoznatim funkcijama $w_1(z,\alpha,R,\psi)$, $\mathcal{A}_1(R,\alpha)$ i $\mathcal{B}_1(R,\alpha)$, koje treba odrediti da bismo sastavili prvu asimptotsku aproksimaciju rešenja. Za sastavljanje druge aproksimacije rešenja odgovarajuću parcijalnu diferencijalnu jednačinu po $w_2(z,\alpha,R,\psi)$ i granične uslove možemo dobiti iz uslova jednakosti funkcija — koeficijenata uz ε^2, što ovde nećemo izračunavati.

U parcijalnoj diferencijalnoj jednačini i graničnim uslovima (12—13) uveli smo oznake

$$f_0(z,\alpha,R,\psi)=\left.f\left(z,\alpha,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial z},\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2},\ldots\right)\right|_{\begin{array}{l} z=z\\ \theta=R(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\cos\psi\\ \frac{\partial\theta}{\partial t}=-\omega_1 R(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\sin\psi\\ \frac{\partial\theta}{\partial z}=\lambda_1 R(-\sin\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\cos\lambda_1 z)\cos\psi\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}} \tag{14}$$

$$g_0(\alpha,R,\psi)=\left.g\left(\alpha,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial z},\ldots\right)\right|_{\begin{array}{l} z=0\\ \theta=R(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\cos\psi\\ \frac{\partial\theta}{\partial t}=-\omega_1 R(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\sin\psi\\ \frac{\partial\theta}{\partial z}=-\lambda_1 R(\sin\lambda_1 z+\mu_1\xi_1\cos\lambda_1 z)\cos\psi\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}} \tag{15}$$

$$l_0(\alpha,R,\psi)=\left.l\left(\alpha,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial z},\ldots\right)\right|_{\begin{array}{l} z=0\\ \theta=R(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\cos\psi\\ \frac{\partial\theta}{\partial t}=-\omega_1 R(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\sin\psi\\ \frac{\partial\theta}{\partial z}=-\lambda_1 R(\sin\lambda_1 z+\mu_1\xi_1\cos\lambda_1 z)\cos\psi\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}} \tag{16}$$

Funkciju $w_1(z, \alpha, R, \psi)$ pretpostavimo sada kao zbir dveju nepoznatih funkcija $u_1(z, \alpha, R, \psi)$ i $v_1(z, \alpha, R, \psi)$ pri čemu postavljamo uslov da funkcija $v_1(z, \alpha, R, \psi)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu i homogene granične uslove, a da funkcija $u_1(z, \alpha, R, \psi)$ zadovoljava nehomogene granične uslove. Funkciju $u_1(z, \alpha, R, \psi)$ pretpostavićemo u obliku

$$u_1(z, \alpha, R, \psi) = \mathcal{D}_1(\alpha, R, \psi) z + \mathcal{D}_2(\alpha, R, \psi) z^2, \tag{17}$$

s tim da zadovoljava sledeće granične uslove

$$\begin{aligned} G I_0 \frac{\partial u_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} &= J_1 c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\bigg|_{z=0} + J_1 f_0(0, \alpha, R, \psi) + g_0(\alpha, R, \psi), \\ G I_0 \frac{\partial u_1}{\partial z}\bigg|_{z=l} &= -J_2 c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\bigg|_{z=l} - J_2 f_0(l, \alpha, R, \psi) + l_0(\alpha, R, \psi). \end{aligned} \tag{18}$$

Iz tih uslova dobijamo da je

$$\mathcal{D}_1(\alpha, R, \psi) = \frac{\mu_1 [l_0(\alpha, R, \psi) - J_2 f_0(l, \alpha, R, \psi)] + (1 + \mu_2)[J_1 f_0(0, \alpha, R, \psi) + g_0(\alpha, R, \varphi)]}{C I_0 (1 + \mu_1 + \mu_2)}, \tag{19}$$

$$\mathcal{D}_2(\alpha, R, \psi) = \frac{[l_0(\alpha, R, \psi) - J_2 f_0(l, \alpha, R. \psi)] - [g_0(\alpha, R, \psi) + J_1 f_0(0, \alpha, R, \psi)]}{2 C I_0 (1 + \mu_1 + \mu_2)}, \tag{20}$$

pa je tražena funkcija $u_1(z, \alpha, R, \psi)$ oblika

$$\begin{aligned} u_1(z, \alpha, R, \psi) = \frac{z}{2 G I_0 (1 + \mu_1 + \mu_2)} \{ & [l_0(\alpha, R, \psi) - J_2 f_0(l, \alpha, R, \psi)](2 \mu_1 l + z) + \\ & + [J_1 f_0(0, \alpha, R, \psi) + g_0(\alpha, R, \psi)][2(1 + \mu_2) l - z] \}. \end{aligned} \tag{21}$$

Funkcija $v_1(z, \alpha, R, \psi)$ se sada određuje iz parcijalne diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} \left(\nu \frac{\partial}{\partial \alpha} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \psi}\right)^{(2)} v_1 - c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} &= f_0^*(z, \alpha, R, \psi) + \\ + (\cos \lambda_1 z - \mu_1 \xi_1 \sin \lambda_1 z) \bigg\{ \cos \psi & \left[2 R \omega_1 \mathcal{B}_1 - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varphi}(\omega_1 - \nu) \right] + \\ & + \sin \psi \left[2 \mathcal{A}_1 \omega_1 + R \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial \psi}(\omega_1 - \nu) \right] \bigg\}, \end{aligned} \tag{22}$$

tako da zadovoljava homogene granične uslove

$$\begin{aligned} G I_0 \frac{\partial v_1}{\partial z}\Big|_{z=0} &= J_1 c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}\Big|_{z=0}, \\ G I_0 \frac{\partial v_1}{\partial z}\Big|_{z=l} &= -J_2 c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}\Big|_{z=l}, \end{aligned} \tag{23}$$

u kojima smo uveli oznaku

$$f_0^*(z, \alpha, R, \psi) = f_0(z, \alpha, R, \psi) - \left[\left(\nu \frac{\partial}{\partial \alpha} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \psi}\right)^{(2)} - \right.$$

$$\left. - c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \left\{ \frac{z}{2 G I_0 l (1 + \mu_1 + \mu_2)} \Big\langle [l_0(\alpha, R, \psi) - J_2 f_0(l, \alpha, R, \psi)](2\mu_1 l + z) + \right.$$

$$\left. + [J_1 f_0(0, \alpha, R, \psi) + g_0(\alpha, R, \psi)][2(1+\mu_2) l - z] \Big\rangle \right\}. \tag{24}$$

Funkcija $v_1(z, \alpha, R, \psi)$ ne treba da sadrži prve harmonike oblika $\sin \psi$ $(\cos \lambda_1 z - \mu_1 \xi_1 \sin \lambda_1 z)$ i $\cos \psi (\cos \lambda_1 z - \mu_1 \xi_1 \sin \lambda_1 z)$ iz kog uslova ćemo odrediti nepoznate funkcije $\mathcal{A}_1(R, \varphi)$ i $\mathcal{B}_1(R, \varphi)$. Funkciju $v_1(z, \alpha, R, \psi)$ potražimo u obliku reda po sopstvenim funkcijama odgovarajućeg »neporemećenog« sistema

$$v_1(z, \alpha, R, \psi) = \sum_{p=1}^{\infty} v_{1p}(\alpha, R, \psi)(\cos \lambda_p z - \mu_1 \xi_p \sin \lambda_p z), \tag{25}$$

koja identički zadovoljava homogene granične uslove (23), a u kojoj su koeficijenti razvoja $v_1(\alpha, R, \psi)$ nepoznate funkcije koje treba odrediti.

Izraz (25) unesemo u diferencijalnu jednačinu (22) tako da dobijamo

$$\sum_{p=1}^{\infty} (\cos \lambda_p z - \mu_1 \xi_p \sin \lambda_p z) \left[\left(\nu \frac{\partial}{\partial \alpha} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \psi}\right)^{(2)} v_{1p} + \omega_p^2 v_{1p}\right] =$$

$$- \sum_{p=1}^{\infty} f_{0p}^*(\alpha, R, \psi)(\cos \lambda_p z - \mu_1 \xi_p \sin \lambda_p z) + (\cos \lambda_1 z -$$

$$- \mu_1 \xi_1 \sin \lambda_1 z) \left\{ \cos \psi \left[-\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varphi} (\omega_1 - \nu) + 2 \mathcal{B}_1 R \omega_1 \right] + \right.$$

$$\left. + \sin \psi \left[2 \omega_1 \mathcal{A}_1 + R \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varphi} (\omega_1 - \nu) \right] \right\}, \tag{26}$$

u kojoj smo funkciju $f_0^*(z, \alpha, R, \psi)$ pretstavili u vidu reda po sopstvenim funkcijama $Z_p(z)$

$$f_0^*(z, \alpha, R, \psi) = \sum_{p=1}^{\infty} f_{0p}^*(\alpha, R, \psi)(\cos \lambda_p z - \mu_1 \xi_p \sin \lambda_p z), \tag{27}$$

u kome su $f^*_{0p}(\alpha, R, \psi)$ funkcije koeficijenti razvoja poznate funkcije oblika

$$f^*_{0p}(\alpha, R, \varphi)=\frac{\rho I_0 l}{m_p}\left\{\frac{1}{l}\int_0^l f^*_0(z, \alpha, R, \psi)(\cos\lambda_p z-\mu_1\xi_p\sin\lambda_p z)\,dz+\right.$$

$$\left.+\mu_1 f^*_0(0, \alpha, R, \psi)+\mu_2 f^*_0(l, \alpha, R, \psi)(\cos\xi_p-\mu_1\xi_p\sin\xi_p)\right\}, \tag{28}$$

u kojima je uvedena oznaka

$$m_p=\frac{\rho I_0 l}{4\xi_p}\{(1+\mu_1^2\xi_p^2)(2\xi_p+\sin 2\xi_p)+4\sin\xi_p(-\cos\xi_p+\mu_1\xi_p\sin\xi_p)\}+$$

$$+\rho I_0 l\int_0^l Z_p^2(z)\,dz+\mathbf{J}_1 Z_p^2(0)+\mathbf{J}_2 Z_p^2(l). \tag{29}$$

Izjednačavanjem funkcija — koeficijenata sa leve i desne strane jednačine (26) uz iste sopstvene funkcije $(\cos\lambda_p z-\mu_1\xi_p\sin\lambda_p z)$ dobijamo sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\left[\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{(2)}v_{11}+\omega_1^2 v_{11}=\cos\psi\left[2R\omega_1\mathcal{B}_1-\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right]+f^*_{01}(\alpha, R, \psi)+$$

$$\sin\psi\left[2\omega_1\mathcal{A}_1+R\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial p}(\omega_1-\nu)\right], \tag{30}$$

$$\left[\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{(2)}v_{1p}+\omega_{1p}^2 v_{1p}=f^*_{0p}(\alpha, R, \psi),\quad p=2, 3, 4, \ldots. \tag{31}$$

U jednačini (30) funkciju $v_{11}(\alpha, R, \psi)$ prikažemo u obliku dvostrukog Fourierovog reda po α i ψ sa nepoznatim koeficijentima razvoja $v_{11}^{mn}(R)$, a takođe i funkciju $f^*_{01}(\alpha, R, \psi)$ sa poznatim koeficijentima razvoja $f_{01}^{*(mn)}(R)$

$$v_{11}(\alpha, R, \psi)=\sum_m\sum_n v_{11}^{mn}(R)\,e^{i(m\psi+n\alpha)},\quad m, n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{32}$$

$$f^*_{01}(\alpha, R, \psi)=\sum_m\sum_n f_{01}^{*(mn)}(R)\,e^{i(m\psi+n\alpha)}, \tag{33}$$

$$f_{0p}^{*(mn)}(R)=\frac{\rho I_0 l}{4\pi^2 m_p}\left\{\frac{1}{l}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*_0(z, \alpha, R, \psi)(\cos\lambda_p z-\right.$$

$$-\mu_1\xi_p\sin\lambda_p z)\,e^{-i(m\psi+n\alpha)}\,dz\,d\psi\,d\alpha+\mu_1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*_0(0, \alpha, R, \psi)\,e^{-i(m\psi+n\alpha)}\,d\psi\,d\alpha+$$

$$\left.+\mu_2(\cos\xi_p-\mu_1\xi_p\sin\xi_p)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*_0(l, \alpha, R, \psi)\,e^{-i(m\psi+n\alpha)}\,d\alpha\,d\psi\right\}, \tag{34}$$

tako da dobijamo

$$\sum_m \sum_n \nu_{11}^{mn}(R)\,[\omega_1^2-(n\nu+m\omega_1)^2]\,e^{i(m\psi+n\alpha)}=\sum_m \sum_n f_{01}^{*\,(mn)}(R)\,e^{i(m\psi+n\alpha)}+$$

$$+\cos\psi\left[2R\omega_1\mathcal{B}_1-\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right]+\sin\psi\left[2\omega_1\mathcal{A}_1+R\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right]. \quad (35)$$

Kako je izraz $\omega_1^2-(n\nu+m\omega_1)^2$ jednak nuli kada je $\pm 1+m+n=0$ to za te vrednosti koeficijenata m i n izraz $e^{i(m\psi+n\alpha)}$ dobija vrednost $e^{i(\pm\psi-n\alpha)}$, te za određivanje nepoznatih funkcija $\mathcal{A}_1(R,\psi)$ i $\mathcal{B}_1(R,\psi)$ dobijamo sledeću jednačinu

$$\cos\psi\left[2R\omega_1\mathcal{B}_1-\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right]+\sin\psi\left[2\mathcal{A}_1\omega_1+2\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right]+$$

$$+\sum_n f_{01}^{*\,(\mp 1-n),\,n}(R)\,e^{i(\pm\varphi-n\varphi)}=0. \quad (36)$$

Iz poslednje jednačine izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos\psi$ i $\sin\psi$ sa nulom dobijamo sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina za određivanje nepoznatih funkcija $\mathcal{A}_1(R,\psi)$ i $\mathcal{B}_1(R,\psi)$

$$\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)-2R\omega_1\mathcal{B}=\sum_\sigma c_\sigma(R)\,e^{i\sigma\varphi},$$

$$2\mathcal{A}_1\omega_1+R\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)=\sum_\sigma d_\sigma(R)\,e^{i\sigma\varphi}, \quad (37)$$

$$\sigma=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots,$$

gde smo stavili da je veza koeficijenata $n=-\sigma$ i $m+1=\sigma$, i uveli oznake

$$c_\sigma(R)=\frac{\rho I_0 l}{4\pi^2 m_1}\left\{\frac{1}{l}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^*(z,\alpha,R,\psi)(\cos\lambda_1 z-\right.$$

$$-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\,e^{-i\sigma\varphi}\cos\psi\,d\psi\,d\alpha\,dz+\mu_1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^*(0,\alpha,R,\psi)\,e^{-i\sigma\varphi}\cos\psi\,d\psi\,d\alpha+$$

$$\left.+\mu_2(\cos\xi_1-\mu_1\xi_1\sin\xi_1)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^*(l,\alpha,R,\psi)\,e^{-i\sigma\varphi}\cos\psi\,d\psi\,d\alpha\right\},\quad \varphi=\psi-\alpha, \quad (38)$$

$$d_\sigma(R)=-\frac{\rho I_0 l}{4\pi^2 m_1}\left\{\frac{1}{l}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^*(z,\alpha,R,\psi)(\cos\lambda_1 z-\right.$$

$$-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\,e^{-i\sigma\varphi}\sin\psi\,d\psi\,d\alpha\,dz+\mu_1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^*(0,\alpha,R,\psi)\,e^{-i\sigma\varphi}\sin\psi\,d\psi\,d\alpha+$$

$$\left.+\mu_2(\cos\xi_1-\mu_1\xi_1\sin\xi_1)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^*(l,\alpha,R,\psi)\,e^{-i\sigma\varphi}\sin\psi\,d\psi\,d\alpha\right\}.$$

Rešavanjem sistema (37) dobijamo partikularna rešenja koja se mogu prihvatiti kao funkcije $\mathcal{A}_1(R, \varphi)$ i $\mathcal{B}_1(R, \varphi)$ koje je trebalo odrediti: Pomoću njih sastavljamo jednačine prve aproksimacije za amplitudu i fazu pobuđenog oblika oscilovanja

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon \sum_{\sigma} \frac{i\sigma(\omega_1 - \nu)\, c_\sigma(R) + 2\omega_1 d_\sigma(R)}{4\omega_1^2 - \sigma^2(\omega_1 - \nu)^2} e^{i\sigma\varphi},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 - \nu(\tau) + \varepsilon \sum_{\sigma} \frac{i\sigma(\omega_1 - \nu)\, d_\sigma(R) - 2\omega_1 c_\sigma(R)}{R[4\omega_1^2 - \sigma(\omega_1 - \nu)^2]} e^{i\sigma\varphi}, \tag{39}$$

$$\sigma = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots .$$

Nepoznate funkcije $v_{1p}^{mn}(R)$ koeficijente razvoja u Fourier-ov red dobijamo u obliku

$$v_{11}^{mn}(R) = \frac{f_{01}^{*mn}(R)}{\omega_1^2 - (n\nu + m\omega_1)^2}, \quad \text{za} \quad m \pm 1 + n \neq 0. \tag{40}$$

Na sličan način rešavamo i jednačine (31) tako da za nepoznatu funkciju $v_1(z, \alpha, R, \psi)$ dobijamo

$$v_1(z, \alpha, R, \psi) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m} \sum_{n} \frac{f_{op}^{*(mn)}(R)}{\omega_1^2 - (n\nu + m\omega_1)^2} e^{i(m\psi + n\alpha)} (\cos\lambda_p z - \mu_1 \xi_p \sin\lambda_p z), \tag{41}$$

$$[\text{za } p = 1 \ \ m \pm 1 + n \neq 0] \qquad m, n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots ,$$

čime smo rešili postavljeni zadatak, odredili potrebne funkcije za sastavljanje prve aproksimacije rešenja za opšti model torzijskih oscilacija vratila sa diskovima i malim poremećajnim raspodeljenim i koncentrisanim spregovima. Za određivanje rešenja u drugoj aproksimaciji postupak je sasvim identičan i principijelnih teškoća nema.

Literatura

[1] Митропольский J. A. — Мосейенков В. И.: *Асимптотические решения уравнений в частних производних*, Киев 1976.

[2] Rašković D.: *Teorija oscilacija*, Beograd, 1960.

[3] Vujičić V.: *Teorija oscilacija*, Beograd, 1970.

[4] Хедрих К. *Нелинейние крутильнце колебаније колсолноіа валаа с диском*, ИЦНО 1981 Киев.

NONLINEAR TORSIONAL VIBRATION OF SHAFT WITH TWO DISKS

Summary

In the paper nonlinear torsional vibration of shaft with two disks is stydid with asymptotic method Krilov-Bogoljubov-Mitropoljskij. Also eppersions for the first approximation of the solutions and system differentional equations of the first approximation for amplitude and phase of the one-frequently vibration of the nonlinear torsional vibration of shaft with two disks in the case own vibrations and the case forced vibrations are derrived.

Hedrih dr. ing. Mr. Katica vanr. prof.
18000-Niš
ul. Vojvode Tankosića 3/22
Mašinski fakultet
Jugoslavija