Зборник радова Математичкої института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Racueil des travaux de l'Institut Mathémtique, Nouuelle série, tome 4 (12), 1984.

PRILOG TEORIJI PRVIH INTEGRALA NEHOLONOMNIH MEHANIČKIH SISTEMA

Đ. S. Đukić

1. Uvod

Zakoni održanja igraju važnu ulogu u analitičkoj mehanici. U holonomnoj mehanici oni su izučavani (na primer vidi [2]—[8]) vrlo detaljno. U neholonomnoj mehanici to nije slučaj.

U neholonomnoj mehanici, najčešće su izučavani potrebni i dovoljni uslovi za postojanje linearnih i kvadratnih prvih integrala, kao i veza između prvih integrala neholonomnih sistema i prvih integrala istog mehaničkog sistema oslobođenog veza (vidi [9], [10], [12]—[14]). U radovima [11] i [8] formulisana je teorema E. Neter za neholonomne sisteme. U oba rada, dobijena su različita ograničenja za infinitezimalne transformacije pri kojim postoje prvi integrali. To ograničava primenljivost dobijenih rezultata. Na primer, ograničenja iz rada [8] onemogućuju dobijanje cikličnih prvih integrala.

U ovom radu dati su potrebni uslovi za postojanje prvih integrala, vrlo opšte strukture, za neholonomne sisteme. Ova teorija prvih integrala je razvijena na ideji integracionih faktora diferencijalnih jednačina kretanja neholonomnih mehaničkih sistema.

2. Opšti teorijski rezultati

U ovom radu, mali latinski indeksi uzimaju vrednosti od 1 do n, veliki grčki indeksi od 1 do m a mali grčki indeksi od $m+1$ do n. Takođe se primenjuje uobičajeno pravilo sabiranja po ponovljenom indeksu. Neka je položaj jednog holonomnog mehaničkog sistema sa n stepeni slobode kretanja određen generalisanim koordinatama q^i. Karakteristike ovog sistema, Lagranževa funkcija L i nekonzervativne generalisane sile Qi, zavise od vremena t, generalisanih koordinata q^i i generalisanih brzina $\dot{q}^i = dq^i/dt$. Ako je ovaj mehanički sistem primoran da se kreće u saglasnošću sa m neholonomnih veza

$$\dot{q}^\Delta = b^\Delta_\alpha (q^i, t)\, \dot{q}^\alpha + b^\Delta (q^i, t), \tag{1}$$

gde su b_α^Δ i b^Δ proizvoljne diferencijabilne funkcije generalisanih koordinata i vremena, tada taj, sada neholonoman sistem, ima $n-m$ stepeni slobode kretanja. Pretpostavimo da su veze (1) neintegrabilne (vidi [1] str. 23). To znači da su veličine

$$A_{\alpha\rho}^\Delta = \frac{\partial b_\alpha^\Delta}{\partial q^\rho} - \frac{\partial b_\rho^\Delta}{\partial q^\alpha} + b_\rho^\Gamma \frac{\partial b_\alpha^\Delta}{\partial q^\Gamma} - b_\alpha^\Gamma \frac{\partial b_\rho^\Delta}{\partial q^\Gamma}, \tag{2 a}$$

$$A_\alpha^\Delta = \frac{\partial b_\alpha^\Delta}{\partial t} - \frac{\partial b^\Delta}{\partial q^\alpha} + b^\Gamma \frac{\partial b_\alpha^\Delta}{\partial q^\Gamma} - b_\alpha^\Gamma \frac{\partial b^\Delta}{\partial q^\Gamma}, \tag{2 b}$$

u opštem slučaju, različite od nule.

Eliminacijom, pomoću jednačina veza (1), zavisnih generalisanih brzina $\dot{q}^\Delta$ iz Lagranževe funkcije $\mathscr{L}$ dobijamo funkciju α, tj.

$$\mathscr{L}(q^i, \dot{q}^\alpha, t) = L(q^i, \dot{q}^\alpha, \dot{q}^\Delta(q^i, \dot{q}^\alpha, t), t). \tag{3}$$

Diferencijalne jednačine kretanja ovog neholonomnog sistema možemo dati u obliku Hamiltonovih kanonskih jednačina (vidi [1] str. 24)

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p^\alpha}, \tag{4 a}$$

$$\dot{p}^\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} - b_\alpha^\Delta \frac{\partial H}{\partial q^\Delta} + \overset{*}{Q}_\alpha, \tag{4 b}$$

gde su generalisani impulsi p_α i Hamiltonova funkcija H definisani sa

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}, \qquad H(q^i, p_\alpha, t) = p_\alpha \dot{q}^\alpha - \mathscr{L}(q^i, \dot{q}^\alpha, t). \tag{5}$$

Ovde su

$$\overset{*}{Q}_\alpha = \tilde{\theta}_\Delta \left(A_\alpha^\Delta + \frac{\partial H}{\partial p_\rho} A_{\alpha\rho}^\Delta \right) + \tilde{Q}_\alpha + \tilde{Q}_\Delta b_\alpha^\Delta, \quad \theta_\Delta = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}^\Delta}, \tag{6}$$

dok talasasta linija ($\sim$) iznad neke veličine znači da su u toj veličini eliminisane, pomoću veza (1), zavisne generalisane brzine, a zatim nezavisne generalisane brzine izražene pomoću nezavisnih generalisanih impulsa p_α. Naravno, diferencijalne jednačine (4) treba rešavati zajedno sa jednačinama neholonomnih veza (1), koje zbog korišćenja (5) postaju

$$\dot{q}_\Delta = b_\alpha^\Delta \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + b^\Delta. \tag{7}$$

Jednačine (4) i (7) formiraju sistem od $2n-m$ diferencijalnih jednačina prvog reda po $2n-m$ nepoznatih funkcija q^i i p_α. Pretpostavimo da egzistira jedan skup funkcija G^α, koje zavise od vremena, generalisanih koordinata q^i i nezavisnih generalisanih impulsa p_α, koji je takav da se sledeća invarijanta

$$\left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + b_\alpha^\Delta \frac{\partial H}{\partial q^\Delta} - \overset{*}{Q}_\alpha \right) G^\alpha, \tag{8}$$

identički svodi na totalni izvod po vremenu, tj.

$$\left(\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}+b_\alpha^\Delta\frac{\partial H}{\partial q^\Delta}-\overset{*}{Q}_\alpha\right)G^\alpha\equiv\frac{d}{dt}(p_\alpha G^\alpha-HR-\Lambda), \tag{9}$$

gde su R i Λ proizvoljne funkcije vremena, generalisanih koordinata q^i i nezavisnih generalisanih impulsa p_α. Ako je ispunjen uslov (9), funkcije G^α zvaćemo integracionim faktorima jednačina kretanja (4*b*).

Kombinovanjem (4*b*) i (9) dobijamo

$$\frac{d}{dt}(p_\alpha G^\alpha-HR-\Lambda)=0, \tag{10}$$

i sledeću teoremu:

Teorema I: Ako su funkcije G^α integracioni faktori jednačina (4 *b*) tada je veličina

$$D=p_\alpha G^\alpha-HR-\Lambda, \tag{11}$$

konstanta (prvi integral) duž trajektorije neholonomnog mehaničkog sistema, čije su jednačine kretanja (4) i (7). Potreban uslov (9), koji mora biti zadovoljen za svaki skup funkcija G^α, R i Λ ako su funkcije G^α integracioni faktori jednačina (4 *b*), posle korišćenja jednačina kretanja (4), može se napisati u obliku

$$\frac{\partial H}{\partial t}R+\frac{\partial H}{\partial q^\Delta}b^\Delta R+H\dot{R}+\left(\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}+\frac{\partial H}{\partial q^\Delta}b_\alpha^\Delta\right)G^\alpha-p_\alpha\dot{G}^\alpha+\dot{\Lambda}-$$
$$-\overset{*}{Q}_\alpha\left(G^\alpha-R\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)=0. \tag{12}$$

Napomena. — U slučaju holonomnog nekonzervativnog mehaničkog sistema, uvođenjem Lagranževih promenljivih umesto Hamiltonovih, ovaj potreban uslov se svodi na odgovarajuće potrebne uslove za postojanje prvih integrala iz radova [4] i [5]. Ti potrebni uslovi iz radova [4] i [5] su dobijeni preko D'Alembertovog principa i pomoću teorije E. Neter. U toj teoriji E. Neter, Λ je gradijentno promenljiva funkcija dok funkcije R i G^i definišu jedno-parametarske transformacije vremena i generalisanih koordinata

$$\bar{t}\approx t+\varepsilon R, \quad \bar{q}^i\approx q^i+\varepsilon G^i,$$

gde je ε parametar te transformacije.

Skup funkcija G^α, R i Λ zvaćemo singularnim skupom ako taj skup zadovoljava potreban uslov (12), ali, ako posle zamene tog skupa u desnu stranu jednačine (11), ova postaje proizvoljna konstanta.

Iz ovih razmatranja i Teoreme I možemo formulisati i sledeću teoremu:

Teorema II: Svakom nesingularnom skupu funkcija G^α, R, Λ odgovara jedan prvi integral (11) jednačina kretanja datog neholonomnog mehaničkog sistema.

Do nesingularnog skupa funkcija G^α, R, Λ moguće je doći integracijom jednačine (12), ili nekim ad hoc prilazom istom problemu. Ma koje rešenje jednačine (12), po G^α, R i Λ, zvaćemo funkcionalnim rešenjem ako ove funkcije G^α, R i Λ ne sadrže ni jednu integracionu konstantu. Kada jedno nesingularno funkcionalno rešenje jednačine (12) zamenimo u desnu stranu jednačine (11) tada dobijamo uobičajeni prvi integral jednačina kretanja, gde je jedina konstanta integracije konstanta D. Nedavno, Vujanović je uveo pojam kompletnog rešenja jednačine (12) za slučaj holonomnog mehaničkog sistema (vidi [2]). To kompletno rešenje sadrži dovoljan broj integracionih konstanti i omogućuje nalaženje konačnih jednačina kretanja holonomnog nekonzervativnog mehaničkog sistema.

Ako jednačinu (12) posmatramo kao diferencijalnu jednačinu onda ma koja funkcija skupa G^α, R, Λ ima ista svojstva. Naime, svaka funkcija tog skupa može biti nepoznata ili unapred zadata funkcija.

U jednačini (12) izvod neke veličine, koja zavisi od vremena t, generalisanih koordinata q^i i nezavisnih generalisanih impulsa p_α, po vremenu treba interpretirati kao

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\left(b_\alpha^\Delta \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+b^\Delta\right)\frac{\partial}{\partial q^\Delta}+\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\alpha}+\dot{p}_\alpha\frac{\partial}{\partial p_\alpha}. \tag{13}$$

U cilju nalaženja prvih integrala neholonomnih mehaničkih sistema jednačinu (12) možemo upotrebiti na dva načina. Prvo, možemo zahtevati da jednačina (12) bude zadovoljena za svako t, q^i, p_α i $\dot{p}_\alpha$. Tada, koristeći (6), (12) i (13), dobijamo jednu jednačinu linearnu po $\dot{p}_\alpha$. Kako funkcije G_α, R i Λ ne zavise od vremenskog izvoda $(\dot{p}_\alpha)$ generalisanih impulsa, ta se jednačina raspada na sistem linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\Gamma=0, \tag{14}$$

$$H\frac{\partial R}{\partial p_\beta}-p_\alpha\frac{\partial G^\alpha}{\partial p_\beta}+\frac{\partial \Lambda}{\partial p_\beta}=0, \tag{15}$$

gde je

$$\begin{aligned}\Gamma=&\frac{\partial H}{\partial t}R+\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}G^\alpha+\frac{\partial H}{\partial q^\Delta}(b_\alpha^\Delta G^\alpha+b^\Delta R)+\frac{\partial \Lambda}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \Lambda}{\partial q^\alpha}+\\&+\left(b_\alpha^\Delta\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+b^\Delta\right)\frac{\partial \Lambda}{\partial q^\Delta}+H\left[\frac{\partial R}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial R}{\partial q^\alpha}+\left(b_\alpha^\Delta\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+b^\Delta\right)\frac{\partial R}{\partial q^\Delta}\right]-\\&-p_\alpha\left[\frac{\partial G^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial p_\beta}\frac{\partial G^\alpha}{\partial q^\beta}+\left(b_\beta^\Delta\frac{\partial H}{\partial p_\beta}+b^\Delta\right)\frac{\partial G^\alpha}{\partial q^\Delta}\right]-\\&-\left[\theta^\Delta\left(A_\alpha^\Delta+\frac{\partial H}{\partial p_\rho}A_{\alpha\rho}^\Delta\right)+\tilde{Q}_\alpha+\tilde{Q}_\Delta b_\alpha^\Delta\right]\left(G^\alpha-R\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

Ovde imamo $n-m+1$ jednačinu sa jednom više nepoznatom funkcijom (G^α, R, Λ). Očigledno, jednu funkciju skupa $G\alpha$, R, Λ moramo usvojiti da bi sve preostale funkcije tog skupa dobili rešavanjem sistema (14), (15). Najčešće se propisuje oblik funkcije Λ. Sistemi jednačina ovog tipa, nazivaju se (vidi [3]—[8]) generalisanim Kilingovim jednačinama.

Druga mogućnost za praktičnu upotrebu jednačine (12) je da zahtevamo njeno zadovoljenje duž trajektorije neholonomnog mehaničkog sistema. To znači da vremenski izvod $(\dot{p}_\alpha)$ nezavisnih generalisanih impulsa zavisi od vremena, generalisanih koordinata i generalisanih impulsa preko jednačina (4*b*). Sada, potrebni uslov (12), posle korišćenja (4*b*) i (13), postaje

$$\Gamma+\left(H\frac{\partial R}{\partial p_\beta}-p_\alpha\frac{\partial G^\alpha}{\partial p_\beta}+\frac{\partial \Lambda}{\partial p_\beta}\right)\left(\overset{*}{Q}_\beta-\frac{\partial H}{\partial q^\beta}-b_\beta^\Delta\frac{\partial H}{\partial q^\Delta}\right)=0, \tag{17}$$

gde je Γ dato sa (16). Ovu linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu zvaćemo generalisanom Kilingovom jednačinom duž trajektorije. U opštem slučaju, svaka od $n-m+2$ funkcije R, Λ, G^α može se smatrati nepoznatom. Prema drugoj teoremi ovog rada, svako njeno nesingularno rešenje po G^α, R, Λ pruža jedan prvi integral oblika (11).

3. Primeri

3.1. Pretpostavimo da su ispunjeni sledeći uslovi

$$R=0,\quad G^{m+1}=G^{m+2}=\cdots=G^{r-1}=G^{r+1}=\cdots=G^n=0,\quad G^r=\text{const.}, \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^r}+b_r^\Delta\frac{\partial H}{\partial q^\Delta}-\overset{*}{Q}_r\right)G^r=\dot V(t,\, q^i,\, p_\alpha),\quad n+1\leqslant r\leqslant n, \tag{19}$$

gde je r fiksirano i gde ne treba sabirati po ponovljenom indeksu r. Ovde je V proizvoljna funkcija vremena t, generalisanih koordinata q^i i nezavisnih generalisanih impulsa p_α. U $\dot V$ izvode $\dot q^i$ i $\dot p_\alpha$ treba eliminisati pomoću jednačina (4). Sada iz (4), (16), (17)—(19) dobijamo

$$\Lambda=-V, \tag{20}$$

a iz (11) odgovarajući prvi integral neholonomnog mehaničkog sistema

$$D=p_r G^r+V(t,\, q^i,\, p_\alpha),\ \text{(ne sabirati po } r). \tag{21}$$

Ako je funkcija V jednaka nekoj konstanti, nezavisnoj od t, q^i i p_α, ovaj integral postaje ciklični prvi integral kretanja.

3.2. Pretpostavimo da su ispunjeni sledeći uslovi

$$G_\alpha=0,\quad R=-1,\quad \frac{\partial H}{\partial t}+b^\Delta\frac{\partial H}{\partial q^\Delta}+\tilde\theta_\Delta A_\alpha^\Delta\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+(\tilde Q_\alpha+\tilde Q_\Delta b_\alpha^\Delta)\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}=$$

$$=\dot W(t,\, q^i,\, p_\alpha), \tag{22}$$

gde je W proizvoljna funkcija i gde u izvodu $\dot W$ izvode $\dot q^i$ i $\dot p_\alpha$ treba eliminisati pomoću jednačina (4). U ovom slučaju, iz (2), (4), (16), (17) i (22) dobijamo

$$\Lambda=W, \tag{23}$$

dok iz (11) sledi prvi integral oblika

$$D=H-W. \tag{24}$$

Za konstantnu vrednost funkcije W ovaj integral se svodi na energijski integral datog neholonomnog mehaničkog sistema.

3.3. Posmatrajmo mehanički sistem sa Lagranževom funkcijom $L=(1/2)\,a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$, gde su a_{ij} funkcije samo od generalisanih koordinata, koji je podvrgnut homogenim ($b=0$) stacionarnim vezama (1). Pretpostavljajući da je $\Lambda=0$, $G^\alpha=0$ i $\overset{*}{Q}_\alpha=p_\alpha\dot{F}$, gde je F proizvoljna funkcija, jednačina (17) postaje

$$H\dot{R}+p_\alpha\dot{q}_\alpha R\dot{F}=0. \tag{25}$$

Rešenje ove jednačine je $R=e^{-2F}$, a odgovarajući prvi integral glasi

$$D=-He^{-2F}. \tag{26}$$

3.4. Neka je mehanički sistem, čija je Lagranževa funkcija

$$L=\frac{M}{2}[(\dot{q}^1)^2+(\dot{q}^2)^2]+\frac{J}{2}(\dot{q}^3)^2-\Pi(q^3), \tag{27}$$

gde su M i J date konstante a Π proizvoljna funkcija, primoran da se kreće u saglasnošću sa vezom

$$\dot{q}^1=\dot{q}^2\,\mathrm{tg}\,q^3. \tag{28}$$

U ovom slučaju rešenje jednačine (17) glasi

$$R=1,\quad G^2=0,\quad G^3=\frac{p_3}{2J},\quad \Lambda=-\Pi(q^3), \tag{29}$$

što pruža sledeći prvi integral

$$D=-\frac{(p_2)^2}{2M}\cos^2 q^3. \tag{30}$$

Ovaj prvi integral je posledica energijskog integrala ovog sistema i jednačine kretanja za koordinatu q^3, $\dot{p}_3=-d\Pi/dq^3$.

Literatura

[1] Савин Г. Н. — Путята Т. В. — Фрадлин Б. Н., *Очерки развития некоторых фундаментальных проблем механики*, Киев, Наукова Думка, 1964.

[2] Vujanović B., *On the Integration of the Nonconservative Hamilton's Dynamical Equations*, Int. J. Engng. Sci. **19**, 1981, 1739—1747.

[3] Sarlet W. and Cantrijn F., *Generalizations of Noethers Theorem in Classical Mechanics*, SIAM Review **23**, 1981, 467—494.

[4] Vujanović B., *Conservation Laws of Dynamical Systems via D'Alembert's principle*, Int. J. Non-Linear Mechanics **13**, 1978, 185—197.

[5] Đukić Đ. S. and Vujanović B. D., *Noether's Theory in Classical Nonconservative Mechanice*, Acta Mechanica **23**, 1975, 17—27.

[6] Vujanović B., *A Group-variational Procedure for Finding First Integrals of Dynamical Systems*, Int. J. Non-Linear Mechanics, **5**, 1970, 269—278.

[7] Đukic Đ., *A Procedure for Finding First Integrals of Mechanical Systems with Gauge-variant Lagrangians*, Int. J. Non-Linear Mechanics **8**, 1973, 479—488.

[8] Đukić Đ., *Conservation Laws in Classical Mechanics for Quasi-coordinates*, Archs. ration. Mech. Analysis **56**, 1974, 79—98.

[9] Сумбатов А. С., *О линейных интегралах уравнении движения со множителями связей*, Вестник Московского университета **4**, 1971, 99—101.

[10] Сумбатов А. С., *О линейных интегралах неголономных систем*, Вестник Московского университета **6**, 1972, 77—83.

[11] Бояджиев Т. Л., *Законы сохранения в неголономной механике*, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences **27**, 1947, 169—172.

[12] Илиев Ил., Семерджиев Хр., *Связь между первыми интегралами неголономнои механическои системы и соответствующей системы освобожденной от связей*, П-М.М. **36**, 1962, 405—413.

[13] Илиев Ил., *О первых интегралах неголономной механической системы*. П.М.М. **39**, 1975, 160—162.

]14] Čović V., *O prvim integralima diferencijalnih jednačina kretanja neholonomnih sistema*, **XIV** Jugoslovenski koogres prim. i rac. mehaniku, Portorož, 1978, A1—7.

CONTRIBUTION TO THEORY OF FIRST INTEGRALS FOR NONHOLONOMIC MECHANICAL SYSTEMS

Summary

Necessary conditions for existence of first integrals for nonholonomic mechanical systems are established. The first integrals are of a general structure. The theory is developed using the idea of integrating factors for the differential equations of motion for nonholonomic mechanical systems.

Dr Đorđe S. Đukić
Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu
21000 Novi Sad

УНИВЕРЗИТЕТСКИ УЏБЕНИЦИ

Професор др Татомир П. Анђелић је објавио следеће универзитетске уџбенике:

1. ***Теорија вектора,*** *Београд, 1947, 1949, 1959.*
2. ***Основи механике непрекидних средина,*** *Београд 1950.*
3. ***Тензорски рачун,*** *Београд 1952, 1967, 1973, 1980.*
4. ***Матрице,*** *Београд 1962, 1965, 1970, 1979.*
5. ***Увод у теорију релативности,*** *Београд 1962*
6. ***Рационална механика,*** *Београд 1966 (са Р. Стојановићем).*
7. ***Механика љуски и плоча,*** *Београд 1975 (са П. М. Опбаловим).*
8. ***Увод у астродинамику,*** *Београд 1983.*