Зборник радова Математичкоі института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4, (12), 1984.

NEKA TAČNA REŠENJA JEDNAČINE KORTEWEG-DE VRIES-A SA PROMENLJIVIM KOEFICIJENTIMA

Vladan D. Đorđević

Pri proučavanju raznih problema nelinearne teorije talasa, osnovne jednačine ove teorije, kao što su jednačina Korteweg-de Vries-a, nelinearna Schrodinger-ova jednačina i dr. se javljaju ne samo u svome klasičnom obliku, nego i u raznim modifikovanim oblicima. Jedan od najkarakterističnijih modifikovanih oblika je oblik u kome ove jednačine sadrže promenljive koeficijente koji zavise od prostorne koordinate. Ovaj oblik se javlja uvek onda kada je u pravcu prostiranja talasa prisutna neka vrsta nehomogenosti. Izvor nehomogenosti kod talasa na slobodnoj površini neke tečnosti je obično promenljiva dubina tečnosti, kod magneto-akustičkih talasa u plazmi, to je promenljiva gustina plazme, kod »lattice« talasa — promenljiva masa itd. Opštu teoriju ovih jednačina su na primeru jednačine Korteweg-de Vries-a dali Ono [1] i Johnson [2]. Oni su pokazali da shodno toj jednačini (a) jedan solitarni talas zadržava svoju strukturu krećući se preko neravnog dna, u tome smislu što odnosi između amplitude, dužine i brzine talasa ostaju nepromenjeni, pri čemu je amplituda obrnuto proporcionalna dubini tečnosti i (b) jedan solitarni talas može pod određenim uslovima, krećući se iz oblasti veće dubine u oblast manje dubine, da se disintegriše u tačno određeni broj novih solitona — fenomen koji se u literaturi obično naziva fisijom solitona.

U ovome radu nama je pošlo za rukom da pronađemo neka nova rešenja ove jednačine i to:

1. jedno rešenje u vidu razdvojenih promenljivih tipa sličnih rešenja klasične jednačine Korteweg-de Vries-a,

2. jedno rešenje u vidu solitarnog talasa koji se kreće po vremenski promenljivoj slobodnoj površini tečnosti i

3. jedno rešenje u vidu solitarnog talasa konstantne dužine.

Svako od ovih rešenja će sada biti posebno prezentirano. Tom prilikom će se koristiti oblik jednačine Korteweg-de Vries-a izveden od strane Kakutani-ja [3]

$$\frac{d'}{2\,d}u+2u_x+\frac{3}{d^{3/2}}uu_t+\frac{d^{1/2}}{3}u_{ttt}=0. \tag{1}$$

U ovoj jednačini $u(t, x)$ opisuje slobodnu površinu tečnosti, x je Dekartova koordinata uperena u pravcu prostiranja talasa, t je Galilejeva koordinata koja se kreće u pravcu kretanja talasa brzinom rasprostiranja linearnih dugih gravitacionih talasa, tako da $t\to\infty$ označava položaj fronta talasa, pri čemu je proizvoljno izabrano da je u početnom trenutku vremena, $t=0$ u $x=0$, a $d(x)$ predstavlja promenljivu dubinu tečnosti. Indeksi označavaju odgovarajuće parcijalne izvode, a $'$ označava običan izvod.

1. Prostom zamenom u jednačini (1) se može pokazati da ona dozvoljava sledeće rešenje u vidu razdvojenih promenljivih

$$u=d^2(x)f(t), \tag{2}$$

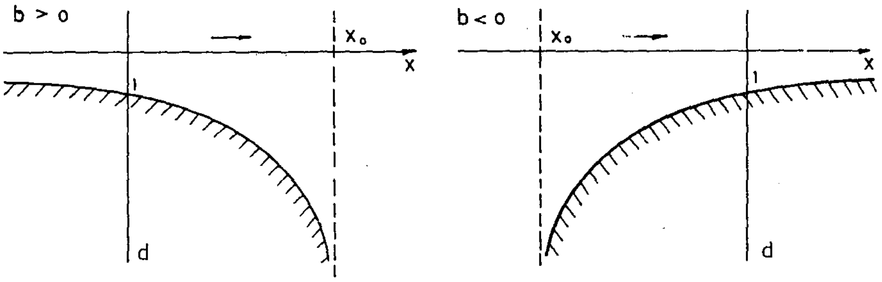
pri čemu $f(t)$ zadovoljava običnu diferencijalnu jednačinu

$$f'''+9ff'+bf=0, \tag{3}$$

gde je b proizvoljna konstanta, pod uslovom da je

$$d^{-1/2}=1-\frac{x}{x_0}, \quad x_0=\frac{27}{b}.$$

Tom prilikom je proizvoljno izabrano da bude: $d(0)=1$. Na Sl. 1 su prikazani oblici dna kanala za $b>0$ i $b<0$ za koje rešenje (2) egzistira. S obzirom da za $x\to x_0$ dubina postaje neograničena, ovo rešenje neće u toj oblasti važiti jer u toj oblasti nije ispunjen uslov $d'=0$ (1), pri kome je izvedena jednačina (1).



Sl. 1

Jednačina (3) je autonomna i zato joj se može sniziti red. Tom prilikom se pokazuje da dobijena jednačina drugog reda ne pripada ni jednom od 50 tipova analiziranih od strane Ince-a [4], što znači da poseduje pokretne singularitete koji nisu polovi. U opštem slučaju rešenje jedne ovakve jednačine se, razumljivo, ne može upotrebiti da opiše slobodnu površinu tečnosti. Zato ćemo, slično kao što se to čini u kontekstu određivanja sličnih rešenja klasične jednačine Korteweg-de Vries-a (v. Rosales [5]), da potražimo ono rešenje jednačine (3) koje daje front talasa koji opada eksponencijalno. Ako postoji ovakav front, on se tada opisuje približnom linearnom jednačinom:

$$f'''+bf=0.$$

Željeno rešenje ove jednačine glasi

$$f = ae^{-b^{1/3}t} \quad \text{za} \quad b > 0 \quad \text{i}$$

$$f = e^{-\frac{(-b)^{1/3}}{2}t}\left[C_1 \sin\frac{3^{1/2}}{2}(-b)^{1/3}t + C_2 \cos\frac{3^{1/2}}{2}(-b)^{1/3}t\right]$$

za $b<0$, gde su a, C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Prema tome, u slučaju $b<0$ front talasa je periodičan! Ovaj slučaj zaslužuje pažnju, ali ovde neće biti tretiran detaljno. Jednačinu (3) ćemo dalje analizirati samo za $b>0$ koristeći asimptotsko ponašanje funkcije f za $t\to\infty$ kao granični uslov, tj.

$$\text{za } t\to\infty: \quad f \sim ae^{-b^{1/3}t}. \tag{4}$$

Konstanta a se u kontekstu pomenutih sličnih rešenja klasične jednačine Korteweg-de Vires-a naziva amplitudnim parametrom. Pogodnom transformacijom promenljivih se jednačina (3) i granični uslov (4) mogu osloboditi konstante b, a delimično i amplitudnog parametra a, što olakšava buduću numeričku integraciju jednačine. Naime, uvođenjem

$$t_b = b^{1/3}t - \ln b^{-2/3}|a| \quad \text{i} \quad F(t_b) = b^{-2/3}f(t),$$

se dobija

$$F''' + 9\,FF' + F = 0,$$

$$t_b \to \infty: \quad F \sim \pm e^{-t_b}, \quad a \gtrless 0.$$

Rezultati numeričke integracije ove jednačine su prikazani na Sl. 2. Primećuje se da je za pozitivne vrednosti amplitudnog parametra funkcija F blago periodična, pri čemu se oscilacije događaju oko neke prave linije, dok je za negativne vrednosti amplitudnog parametra rešenje neperiodično i veoma brzo opada.

2. Hirota-i [6] je pošlo za rukom da pronađe takvu transformaciju koordinata kojom se jednačina koja opisuje tzv. »cilindrične solitone« svodi na klasičnu jednačinu Korteweg-de Vries-a i time stvori mogućnost korišćenja svih poznatih rešenja klasične jednačine Korteweg-de Vries-a pri proučavanju »cilindričnih solitona«. Podstaknuti ovim radom, nama je pošlo za rukom da postignemo isti rezultat kada je u pitanju jednačina Korteweg-de Vries-a sa promenljivim koeficijentima (1). Odgovarajuća transformacija koordinata glasi:

$$\tau = d^{-9/4}t, \quad \xi = \int_0^x d^{-25/4}\,dx$$

$$u = \frac{3}{2}d^{1/2}d'\,t + d^{-5/2}\,\vartheta(\tau, \xi).$$

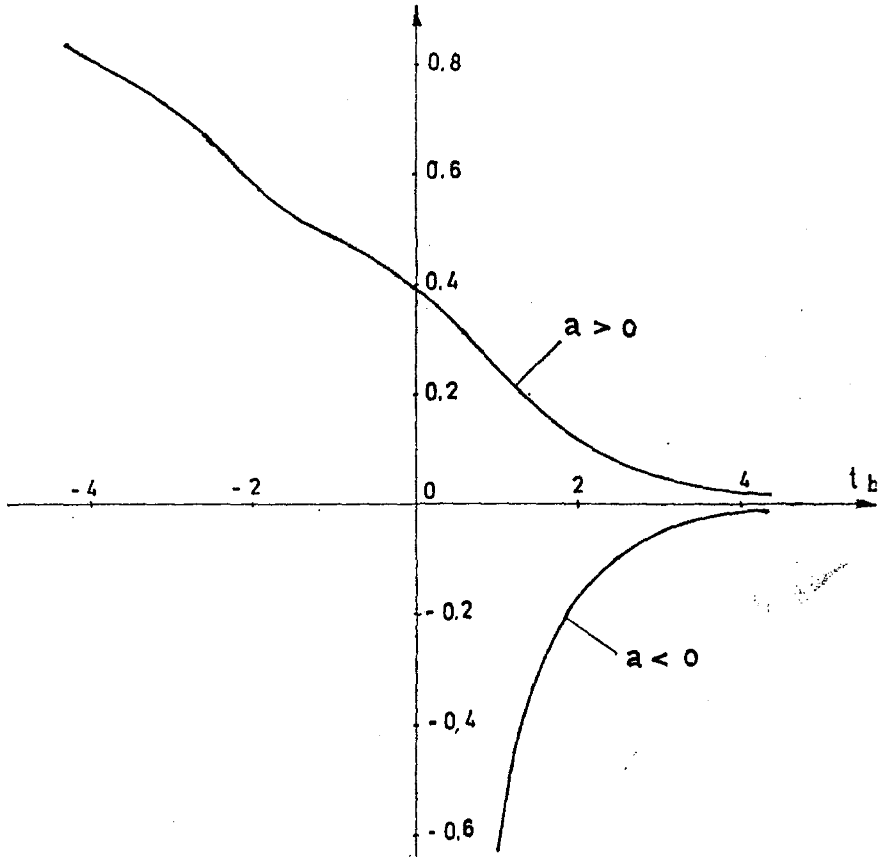
Prostom zamenom u jednačini (1) se može pokazati da funkcija $\vartheta(\tau, \xi)$ zadovoljava klasičnu jednačinu Korteweg-de Vries-a:

$$2\,\vartheta_\xi + 3\,\vartheta\,\vartheta_\tau + \frac{1}{3}\,\vartheta_{\tau\tau\tau} = 0, \tag{5}$$

pod uslovom da je:

$$dd''/d'^2 = -3, \text{ tj. } d = \left|1 - \frac{x}{x_0}\right|^{1/4}, \tag{6}$$

pri čemu je proizvoljno izabrano da bude: $d(0) = 1$ i $d(x_0) = 0$. Sva poznata rešenja jednačine (5) se sada mogu koristiti da se u slučaju promenljivog dna određenog



Sl. 2.

pomoću (6) konstruišu odgovarajuća rešenja jednačine (1). Između ostalih, rešenje jednog solitarnog talasa:

$$\vartheta = \alpha_0 \operatorname{sech}^2 \beta_0 (\tau - \gamma_0 \xi); \; \beta_0 = (3\alpha_0)^{1/2}/2, \; \gamma_0 = \alpha_0/2, \; \alpha_0 > 0$$

daje:

$$u = -3\,t/(8\,x_0\,d^{5/2}) + \frac{\alpha_0}{d^{5/2}} \operatorname{sech}^2 \beta_0 \theta,$$

gde je

$$\theta = d^{-9/4}\left[t - \frac{16\,x_0\gamma_0}{9}\,(1 - d^{9/4})\right].$$

Ovo tačno rešenje jednačine (1) reprezentuje solitarni talas koji se kreće po vremenski promenljivoj slobodnoj površini tečnosti određenoj sa: $-3\,t/(8x_0\,d^{5/2})$. Mora se međutim priznati da je ovo rešenje, kada su u pitanju talasi na slobodnoj površini neke tečnosti, prilično veštačko i teško je zamisliti da može da ima neki praktični značaj. Nije međutim isključeno da odgovarajuće rešenje jednačina sa promenljivim koeficijentima koje opisuju magneto-akustičke talase u plazmi ili »lattice« talase može biti od značaja, pa ga zato ovde i navodimo.

3. Jedna druga jednačina Kortweg-de Vries-a sa promenljivim koeficijentima je takođe poznata u literaturi (v. Miles [7] i Đorđević [8])

$$\left(\frac{b'}{b} + \frac{d'}{2\,d}\right)u + 2\,u_x + \frac{3}{d^{3/2}}\,uu_t + \frac{d^{1/2}}{3}\,u_{ttt} = 0. \tag{7}$$

Njome se opisuje pasprostiranje dugih gravitacionih talasa male ali konačne amplitude u kanalu promenljive dubine $d(x)$ i promenljive širine $b\,(x)$. Na isti način kao što je to učinjeno kada je bila u pitanju jednačina (1) u okviru tačaka 1. i 2., mogu se i za jednačinu (7) konstruisati odgovarajuća rešenja. Međutim, ova jednačina dozvoljava i jedno drugo tačno rešenje koje može da bude od interesa, pa ćemo zato ovde njega da navedemo. Ono glasi

$$u = \alpha\,(x)\,\mathrm{sech}^2\,\beta_0\left[t - \int_0^x \gamma\,(x)\,dx\right], \tag{8}$$

gde su

$$\beta_0 = \mathrm{const.},\quad \alpha = \frac{4\,\beta_0^2}{3}\,d^2 \ \text{ i } \ \gamma = \frac{2\,\beta_0^2}{3}\,d^{1/2}. \tag{9}$$

pod uslovom da je: $bd^{9/2} = \mathrm{const.}$ Zapaža se da su veze (9) između veličina $\alpha\,(x), \beta_0$ i $\gamma\,(x)$, koje redom predstavljaju amplitudu, inverznu dužinu i brzinu talasa iste kao kod klasičnog solitona, pa se zato može reći da rešenje (8) predstavlja jedan solitarni talas konstantne dužine, a promenljive amplitude i brzine. Prema tome, jedan početni poremećaj oblika solitarnog talasa će u jednom kanalu promenljive dubine i širine, pri čemu su one povezane odnosom $bd^{9/2} = \mathrm{const.}$ da evoluira zadržavajući svoju prvobitnu strukturu, tj. kao solitarni talas. Vredno je pomena da solitarni talas (6) ne predstavlja tzv. »sporo promenljivi« solitarni talas (v. Miles [7])!

Literatura

[1] Ono H., *Wave propagation in an inhomogeneous anharmonic lattice*, J. Phys. Soc. Japan **32**, p. 332 (1972).

[2] Johnson R. S., *On the development of a solutary wawe moving over an uneven bottom*, Proc. Camb. Phil. Soc. 73, p. 183 (1973).

[3] Kakutani T., *Effect of an uneven bottom on gravity waves*, J. Phys. Soc. Japan 30, p. 282 (1971).

[4] Ince E. L., *Ordinary differential equations*, Dover Publications, Inc. (1956).

[5] R o s a l e s R. R., *The similarity solution for the Korteweg-de Vries equation and the related Painlevé transcendent*, Proc. Roy. Soc. London A **361**, p. 265 (1978).

[6] H i r o t a R., *Exact solutions to the equation describing „cylidrical solitons“*, Phys. Lett, **71** A, p. 393 (1979).

[7] M i l e s J. W., *On the Korteweg-de Vries equation for a gradually varying channel*, J. Fluid Mech. **91**, p 181 (1979).

[8] Đ o r đ e v i ć V. D., *The fission of solitons in a channel of varying width*, Mech. Research Comm. **6** (6), p. 343 (1979).

SOME EXACT SOLUTIONS OF THE KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Summary

A solution in the form of separated variables of the type of similarity solutions of the classical Korteweg-de Vries equation, a solution in the form of a solitary wave moving in a time-dependent and nonuniform background and a solution in the form of a solitary wave of constant length for the Korteweg-de Vires equation with variable coefficients are found to exist by means of suitable transformations of variables and are discussed in the paper.

Vladan D. Đorđević
Mašinski fakultet
ul. 27 marta 80
11000 Beograd