Зборник радова Математичкоi института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

O KOMUTATIVNOSTI OPERATORA VARIRANJA I DIFERENCIRANJA U MEHANICI NEHOLONOMNIH SISTEMA

Vukman Čović

Cilj ovoga rada je da se pokaže da u slučaju izohronih varijacija, primenjujući pravila varijacionog računa, postoji jedinstven pristup u formiranju integralnog principa za neholonomne mehaničke sisteme. Opovrgava se teza data u [3], [4], [5] i dr., po kojoj postoje dva ravnopravna pravila variranja: jedno koje zastupa Suslov a drugo koje zastupa Helder (videti, na primer, [3] i [4]).

1. Prema shvatanju G. K. Suslova [1] Hamiltonov princip

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = 0, \tag{1}$$

nije primenljiv u slučaju mehaničkih sistema podvrgnutih neholonomnim vezama oblika*

$$\dot{q}^\nu = b^\nu_\alpha \dot{q}^\alpha; \qquad b^\nu_\alpha = b^\nu_\alpha (q^1, \ldots, q^n). \tag{2}$$

Uzimajući, prema [1], da je

$$\delta \dot{q}^\nu = \delta (b^\nu_\alpha \dot{q}^\alpha), \tag{3}$$

zaista se pokazuje da je (1) u razmatranom slučaju neprimenljivo. Naime (zadržimo se radi jednostavnosti na Čapljiginovim sistemima), pošto je

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu} \delta (b^\nu_\alpha \dot{q}^\alpha) \right] dt,$$

---

* Indeksi i, j, k, s uzimaju vrednosti od 1 do n;

$$\alpha, \beta : 1 \div m; \quad \nu, \rho, \theta : m+1, \ldots, m+l = n.$$

i pošto je

$$\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\nu}}b_{\alpha}^{\nu}=\frac{\partial L^{*}}{\partial q^{\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L^{*}}{\partial \dot{q}^{\alpha}}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\nu}}\left(\frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\alpha}}-\frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\beta}}\right)\dot{q}^{\beta},$$

gde je

$$L^{*}=L\,(\dot{q}^{\nu}=b_{\alpha}^{\nu}\dot{q}^{\alpha}),$$

sledi da je

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L^{*}}{\partial q^{\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L^{*}}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right)\delta q^{\alpha}\,dt, \tag{4}$$

što bi pod pretpostavkom da važi (1) dovelo do pogrešnih diferencijalnih jednačina kretanja razmatranog neholonomnog mehaničkog sistema.

Suslov je smatrao da je u slučaju neholonomnih mehaničkih sistema potrebno transformisati Lagranž-Dalamberov princip u integralni princip iz koga će slediti diferencijalne jednačine kretanja.

Pri tome Suslov je uzeo da važi

$$\frac{d}{dt}\delta q^{\alpha}-\delta\dot{q}^{\alpha}=0, \tag{5}$$

i koristeći relacije

$$\dot{q}^{\nu}=b_{\alpha}^{\nu}\dot{q}^{\alpha},\qquad \delta q^{\nu}=b_{\alpha}^{\nu}\,\delta q^{\alpha}, \tag{6}$$

uzeo da je

$$\frac{d}{dt}(\delta q^{\nu})-\delta\dot{q}^{\nu}=\frac{d}{dt}(b_{\alpha}^{\nu}\,\delta q^{\alpha})-\delta\,(b_{\alpha}^{\nu}\dot{q}^{\alpha}), \tag{7}$$

što je dovelo do traženog integralnog principa u obliku

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\nu}}\left(\frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\beta}}+\frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\rho}}b_{\beta}^{\rho}-\frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\alpha}}-\frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\rho}}b_{\alpha}^{\rho}\right)\dot{q}^{\beta}\,\delta q^{\alpha}\right]dt=0, \tag{8}$$

iz koga slede tačne jednačine kretanja razmatranog mehaničkog sistema.

U ovom slučaju lako je pokazati, ako je, prema Suslovu,

$$\delta\dot{q}^{\nu}=\delta\,(b_{\alpha}^{\nu}\dot{q}^{\alpha}), \tag{9}$$

da sledi relacija

$$\delta L=\delta L^{*},$$

što ga je navelo, uzimajući u obzir (4) da formuliše novi integralni princip (8).

2. Helder je u svom radu [2] opovrgao gledište koje je izneo Herc u [6], po kome je Hamiltonov princip neprimenljiv u slučaju neholonomnih mehaničkih sistema.

Naime, Helder je smatrao, potpuno ispravno, da je Hamiltonov princip, uzimajući u obzir da je izveden iz Lagranž—Dalamberovog principa, primenljiv* i u slučaju neholonomnih sistema pošto je i ovaj drugi primenljiv u tom slučaju.

Prema Helderu greška u [6] proističe iz činjenice da se tamo smatra da i na variranoj putanji veze zadovoljavaju isti uslov kao i na stvarnoj, tj. smatra se da važi

$$\delta \dot{q}^{\nu} = \delta (b^{\nu}_{\alpha} \dot{q}^{\alpha}),$$

što predstavlja uslov (9) primenjen u Suslovljevom radu [1].

Helder uopšte ne dovodi u sumnju relaciju

$$\frac{d}{dt} \delta q^{k} - \delta \dot{q}^{k} = 0,$$

za sve koordinate. On napominje poznatu činjenicu da zahtev (9) nametnut variranoj putanji dovodi do varijacionog zadatka

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [L + \lambda_{\rho} (\dot{q}^{\rho} - b^{\rho}_{\alpha} \dot{q}^{\alpha})] \, dt = 0, \tag{11}$$

a veze između varijacija, koje su u skladu sa mehaničkim principima, i koje su date u obliku

$$\delta q^{\nu} = b^{\nu}_{\alpha} \delta q^{\alpha}, \tag{12}$$

dovode do varijacionog zadatka

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta L + \theta_{\rho} (\delta q^{\rho} - b^{\rho}_{\alpha} \delta q^{\alpha})] \, dt = 0. \tag{13}$$

Razlika između (11) i (13) je očigledna. Zadatak (11) predstavlja takozvani vezani varijacioni problem i izražava uslov stacionarnosti razmatranog funkcionala. Zadatak (13) ne izražava uslov stacionarnosti funkcionala i po tome se bitno razlikuje Hamiltonov princip za neholonomne mehaničke sisteme od toga principa za holonomne sisteme. Očigledno, u slučaju neholonomnih sistema Hamiltonov princip gubi svoje osnovno svojstvo.

3. Suslov je u [1] koristio istovremeno relacije (9) i (12) i formirao integralni princip (8) iz koga slede tačne diferencijalne jednačine kretanja. Pokažimo prvo da (9) i (12) predstavljaju različite tipove varijacija i da se ne mogu istovremeno koristiti a zatim, kako je u [1] dobijen tačan rezultat.

Uzimajući da važi (9), tj. da je

$$\delta \dot{q}^{\nu} = \frac{\partial b^{\nu}_{\alpha}}{\partial q^{k}} \dot{q}^{\alpha} \delta q^{k} + b^{\nu}_{\alpha} \delta \dot{q}^{\alpha},$$

* U slučaju neholonomnih sistema Hamiltonov princip nema osobine koje ga bitno razlikuju od transformisanog Lagranž-Dalamberovog principa (videti [8]).

i uzimajući da su operatori variranja i diferenciranja, u skladu sa varijacionim računom, uvek komutativni (varijacije su izohrone), dobijamo da je

$$\frac{d}{dt}\delta q^{\nu}-\left(\frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\rho}}\right)_{(t)}\delta q^{\rho}=\left[\left(\frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\alpha}}-\frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\beta}}-\frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\rho}}b_{\beta}^{\rho}\right)\dot{q}^{\beta}\right]_{(t)}\delta q^{\alpha}+\frac{d}{dt}(b_{\alpha(t)}^{\nu}\,\delta q^{\alpha}), \tag{14}$$

odakle, primenjujući uslov $\delta q_{(t_0)}^{k}=0$, dobijamo

$$\delta q^{\nu}=\Phi_{\theta}^{\nu}\int_{t_0}^{t}\psi_{\rho}^{\theta}\,\gamma_{\alpha\beta}^{\rho}\,\dot{q}^{\beta}\,\delta q^{\alpha}\,dt+b_{\alpha}^{\nu}\,\delta q^{\alpha}, \tag{15}$$

pri čemu je

Φ_{θ}^{ν} — fundamentalna matrica homogenog dela sistema diferencijalnih jed načina (14),

$$\Phi_{\theta}^{\nu}\,\psi_{\rho}^{\theta}=\delta_{\rho}^{\nu},$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^{\rho}=-\gamma_{\beta\alpha}^{\rho}=\frac{\partial b_{\alpha}^{\rho}}{\partial q^{\alpha}}+\frac{\partial b_{\beta}^{\rho}}{\partial q^{\nu}}b_{\alpha}^{\nu}-\frac{\partial b_{\alpha}^{\rho}}{\partial q^{\nu}}b_{\beta}^{\nu}.$$

Sada je očigledna razlika između varijacija određenih relacijama (9) i (12).

Ako uzmemo u obzir činjenicu da su neholonomne veze neintegrabilne, varijacije (9) tj. (15) svode se na varijacije (12) ako je ispunjen uslov

$$\gamma_{\beta\alpha}^{\rho}\,\dot{q}^{\beta}\delta q^{\alpha}=0, \tag{16}$$

koji povećava broj zavisnih varijacija a to nije u skladu sa proizvoljnošću δq_{α}. Izraz (16) može da bude ispunjen i u jednom specijalnom slučaju. Uzmimo, naime, da je

$$\delta q^{\alpha}=\lambda\,dq^{\alpha},$$

odakle je, s obzirom na antisimetriju sistema $\gamma_{\alpha\beta}^{\rho}$ po donjim indeksima,

$$\lambda\,\gamma_{\alpha\beta}^{\rho}\,dq^{\alpha}\,dq^{\beta}=0. \tag{17}$$

Ovaj poslednji slučaj predstavlja variranje trajektorije u sebe samu i on je pomenut u [2] u slučaju jedne neholonomne veze.

U svim ostalim slučajevima varijacije (9) i (12) se ne poklapaju.

Ostaje da se pokaže zašto je Suslovljeva relacija (8) uprkos činjenici da se koriste istovremeno izrazi (9) i (12) — tačna.

Pođimo od izraza*

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,dt=0, \tag{18}$$

pri čemu ćemo uzeti da su operatori variranja i diferenciranja komutativni. Pošto korišćenje mehaničkih principa zahteva da, s obzirom na (2), važi relacija (12), tada će biti

$$\delta\dot{q}^{\nu}=\frac{d}{dt}\,\delta q^{\nu}=\frac{d}{dt}(b_{\alpha}^{\nu}\,\delta q^{\alpha}). \tag{19}$$

* za koji se u [1] pokazuje da ne važi u slučaju neholonomnih mehaničkih sistema.

Sada (18) dobija oblik

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k+\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\delta \dot q^\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot q^\nu}\frac{d}{dt}(b^\nu_\alpha\,\delta q^\alpha)\right]dt=0,$$

pa, uzimajući u obzir da je

$$\frac{\partial L}{\partial q^k}=\frac{\partial L^*}{\partial q^\nu}-\frac{\partial L}{\partial \dot q^\nu}\frac{\partial b^\nu_\beta}{\partial q^k}\dot q_\beta,$$

i

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}=\frac{\partial L^*}{\partial \dot q^\alpha}-\frac{\partial L}{\partial \dot q^\nu}b^\nu_\alpha,$$

konačno dobijamo

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L^*+\frac{\partial L}{\partial \dot q^\nu}\gamma^\nu_{\alpha\beta}\,\dot q^\beta\,\delta q^\alpha\right]dt=0, \tag{20}$$

što prema (10) predstavlja Suslovljev rezultat (8).

Uzimajući u obzir da se Lagranž-Dalamberov princip (na primer za slučaj konzervativnih sistema)

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}-\frac{\partial L}{\partial q^k}\right)\delta q^k=0,$$

može dovesti na oblik

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k+\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\,\delta\dot q^k+\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\frac{d}{dt}(\delta q^k)\;-\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\,\delta\dot q^k\right]dt=0, \tag{21}$$

pri čemu su iskorišćeni uslovi

$$\delta q^k_{(t_0)}=\delta q^k_{(t_1)}=0,$$

jasno je da bilo kakva pretpostavka o vrednosti $\delta\dot q^k$ ne može da utiče na konačni rezultat pri transformaciji (21). Time je i objašnjeno kako se u [1], korišćenjem (9) umesto (19), dobio tačan rezultat.

4. Razmotrimo transformisani izraz Lagranž-Dalamberovog principa u obliku (slučaj nekonzervativnih sistema)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\delta q^k\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k+\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\delta\dot q^k\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\left(\frac{d}{dt}\delta q^k-\delta\dot q^k\right)-Q_k\,\delta q^k=0. \tag{22}$$

Pretpostavimo da su varijacije δq^k nezavisne (holonoman sistem) i uvedimo u skladu sa poslednjom primedbom u tački 3., da je

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\left(\frac{d}{dt}\delta q^k-\delta\dot q^k\right)=f_k(q^i,\dot q^i)\,\delta q^k. \tag{23}$$

Integracijom (22), uz uslove

$$\delta q^k_{(t_0)} = \delta q^k_{(t_1)} = 0,$$

dobijamo

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \left(\frac{d}{dt} \delta q^k - \delta \dot{q}^k \right) + Q_k \delta q^k \right] dt = 0,$$

odakle, korišćenjem (23), nalazimo da je

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k + (f_k + Q_k) \delta q^k \right] dt = 0, \tag{24}$$

i ponovnim korišćenjem (23) dobijamo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} \delta q^k - f_k \delta q^k,$$

što, zajedno sa (24), dovodi do

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} \delta q^k + Q_k \delta q^k \right] dt = 0,$$

ili

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + Q_k \right) \delta q^k \, dt = 0, \tag{25}$$

tj. do principa Hamiltona-Ostrogradskog.

Da proizvoljnost funkcije

$$f_k = f_k(q^i, \dot{q}^i),$$

koja figuriše u (23) ne utiče na konačan rezultat primećeno je i u [7] gde je uzeto da je

$$f_k = -Q_k,$$

što je u slučaju nekonzervativnog mehaničkog sistema dovelo do principa

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \, dt = 0.$$

Očigledno je da izmena pravila varijacionog računa može da dovede do formiranja proizvoljnog broja »nekomutativnih« varijacionih principa. Međutim, tada bi bilo svrsishodno prethodno objasniti šta se podrazumeva pod pojmom varijacije funkcije.

5. Kao zaključak primetimo sledeće. Postoji samo jedno pravilo variranja kada su u pitanju izohrone varijacije: operatori variranja i diferenciranja komutativni su. Dva načina variranja koje i do današnjih dana literatura obrazlaže (videti, na primer, [3], [4] i [5]) i ravnopravno ih tretira, posledica su nepreciznosti koju je još Helder uočio a koja je u ovom radu analizirana na primeru rezultata rada [1]. Još manje je opravdano da se uvode i nova pravila variranja a da se pri tome ne izmeni definicija varijacije funkcije.

Literatura

[1] Суслов Г. К., *Об одном видоизменении начала Даламбера*, Математ. сб. т. 22, вып. 4, 1901.

[2] Гёлдер О., *О принципах Гамильтона и Мопертюи*, *Вариационные принципы механики*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1959.

[3] Неймарк Ю И. и Фуфаев Н. А., *Динамика неголономных систем*, „Наука", Москва, 1967.

[4] Румянцев В. В., *О принципе Гамильтона для неголономных систем*, ПММ, т. 42, 1978.

[5] Петкевич В. В., *Теоретическая механика*, „Наука", Москва, 1981.

[6] Hertz H. R., *Gesammelte Werke*, t. 3, Leipzig, 1910.

[7] Vujanović B., *O jednom varijacionom principu mehanike*, XII Jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, Ohrid, 1974., Zbornik radova, sekcija A1.

[8] Čović V. i Lukačević M., *Prilog analitičkoj mehanici neholonomnih sistema* (rad primljen za štampu u Glasu SANU).

SUR LA COMMUTATIVITÉ DES OPÉRATEURS DE VARIATION ET DE DIFFÉRENTIATION DANS LA MÉCANIQUE DES SYSTÈMES NON HOLONOMES

Résumé

Il est démontré qu'on ne peut, lors de l'établissement des principes intégraux dans la mécanique des systèmes non holonomes, appliquer les règles non commutatives de variation et de différentiation. Deux modes différents de variations, qu'on peut trouver dans la littérature ([3], [4], [5] et a.) résultent de inprécision remarquée déjà dans [1].

On montre également que l'introduction de nouveaux principes »non commutatifs« de la mécanique n'est pas justifiée.

Vukman Čović
Mašinski fakultet
11000 Beograd