Зборник радова Математичкої института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

PRILOG HAMILTONOVOM PRINCIPU KAO ZADATKU OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Aleksandar Bakša

Razmatranje Hamiltonovog principa kao zadatka optimalnog upravljanja nije nova tema. Suština ovog zadatka se pojavljuje u monografiji [6] kao primena principa maksimuma u rešavanju klasičnog varijacionog problema. Od radova novijeg datuma, koji se bave razmatranjem Hamiltonovog principa kao zadatka optimizacije, možemo navesti [3] i [4] od kojih se prvi odnosi na holonomne a drugi na neholonomne sisteme. U ovom radu želimo izneti jedan aspekt razmatranja ovog problema i uporediti ga sa onim iz navedene literature.

1. Razmatraćemo mehanički sistem čija je konfiguracija određena Lagranžovim (Lagrange) koordinatama q^i $(i=1, \ldots, n)$, koji se kreće u polju sa potencijalom

$$V=V(q;t),^*$$

(gde t označava vreme). Ako kinetičku energiju sistema obeležimo sa

$$T=T(q, \dot{q}; t).$$

Lagranžova funkcija (kinetički potencijal) sistema je

$$L(q, \dot{q}, t)=T(q, \dot{q}, t)-V(q, t). \tag{1.1}$$

Pretpostavimo da kretanje razmatranog sistema ograničavaju neholonomne veze

$$\varphi_\mu(q, \dot{q}, t)=0, \quad (\mu=1, \ldots, k). \tag{1.2}$$

Za ovakav mehanički sistem tvrđenje Hamiltonovog (Hamilton) principa može se izraziti jednakošću [5]

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L \, dt=0, \tag{1.3}$$

*) $F(x, y; t)=F(x_1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n; t)$

pri čemu virtualna pomeranja δq^i pripadaju klasi neprekidno diferencijabilnih funkcija koje zadovoljavaju uslove

$$\delta q^i(t_0)=\delta q^i(t_1)=0, \tag{1.4}$$

gde su t_0 i t_1 fiksirani trenuci.

Diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema se mogu izvesti iz Hamiltonovog principa primenom klasičnog varijacionog računa, što je dobro poznato (videti, npr. [1], [5]). Ovde ćemo pokušati da te jednačine izvedemo rešavanjem odgovarajućeg zadatka optimalnog upravljanja.

Zadatak 1. Neka je zadan dinamički sistem

$$\dot{q}^i=u^i, \quad (i=1, \ldots, n), \tag{1.5}$$

gde su $u^i=u^i(t)$ upravljanja iz skupa neprekidnih funkcija čije vrednosti nisu ograničene posebnim uslovima (restriktivni skup se poklapa sa celim n-dimenzionim prostorom) i neka su zadani početni položaj $(q_0{}^i)$ i cilj $(q_1{}^i)$. Odrediti kretanje koje premešta sistem (5) iz položaja $(q_0{}^i)$ u položaj $(q_1{}^i)$ saglasno vezama

$$\varphi_\mu(q, u, t)=0, \tag{1.6}$$

tako da funkcional

$$\mathcal{J}(u)=\int_{t_0}^{t_1} L(q, u, t)\, dt, \tag{1.7}$$

ima najmanju moguću vrednost.

Ovaj zadatak optimalnog upravljanja, očigledno, nije ekvivalentan Hamiltonovom principu. Naime, dok optimalno upravljanje $\hat{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ i odgovarajuća optimalna trajektorija $\hat{q}(t)$ daju funkcionalu (7) minimalnu vrednost, dotle Hamiltonov princip za neholonomne sisteme ne izražava stacionarnost nikakvog funkcionala. Ispitajmo da li je, pod nekim uslovima, rešenje zadatka 1 ekvivalentno tvrđenju Hamiltonovog principa.

U tom cilju, rešimo, najpre, postavljeni zadatak. Primenjujući Lagranžovu metodu množilaca, formirajmo funkcional (koristimo Ajnštajnovu (Einstein) konvenciju o sabiranju po ponovljenim indeksima)

$$\mathcal{J}_1(u)=\int_{t_0}^{t_1}\left[\pi_0 L(q, u, t)+\pi_i(\dot{q}^i-u^i)+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\varphi_\mu(q, u, t)\right]dt, \tag{1.8}$$

gde su π_0, π_i i λ_μ proizvoljne funkcije vremena. Ako obeležimo

$$\mathcal{H}(\pi, q, u, t)=\pi_i u^i-\pi_0 L(q, u, t), \tag{1.9}$$

funkcional (8) se može napisati u obliku

$$\mathcal{J}_1(u)=\int_{t_0}^{t_1}\left[\pi_i\dot{q}^i+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\varphi_\mu(q, u, t)-\mathcal{H}(\pi, q, u, t)\right]dt. \tag{1.10}$$

Pretpostavimo da zadatak 1 ima rešenje i obeležimo sa $\hat{u}(t)$ i $\hat{q}(t)$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$, optimalno upravljanje i odgovarajuću optimalnu trajektoriju. Ako je varirano upravljanje

$$u^i(t) = \hat{u}^i(t) + \delta u^i(t), \tag{1.11}$$

odgovarajuća varirana trajektorija se može napisati u obliku [2]

$$q^i(t) = \hat{q}^i(t) + \delta q^i(t) + O(\delta q^i). \tag{1.12}$$

Prva (Lagranžova) varijacija funkcionala (10), s obzirom na (11) i (12), je

$$\delta \mathcal{J}_1 = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(-\dot{\pi}_i + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \right) \delta q^i + \left(\sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^i} \right) \delta u^i \right] dt \tag{1.13}$$

pri čemu smo iskoristili (4). Da bi funkcional (10) imao minimum za $u = \hat{u}$ potrebno je da bude

$$\delta \mathcal{J}_1 = 0. \tag{1.14}$$

U (13) su $2n$ varijacija δq^i, δu^i ograničene sa $n+k$ uslova koji proističu iz (5) i (6), tako da je broj nezavisnih varijacija $2n-(n+k)=n-k$. Birajući množioce π_i i λ_μ tako da koeficijenti uz zavisne varijacije budu jednaki nuli i koristeći se uslovom (14), dobijamo

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^i}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^i} - \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i} = 0. \tag{1.15}$$

Prva od ovih jednačina, zajedno sa jednačinom (5), koja se s obzirom na (9) može napisati u obliku

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i}, \tag{1.16}$$

daje, za $i = 1, \ldots, n$, sistem diferencijalnih jednačina kretanja razmatranog dinamičkog sistema. Druga jednačina predstavlja uslov stacionarnosti funkcije $\mathcal{H}$ po u.

Napomenimo da se jednačine (15) i (16) mogu dobiti i na osnovu tvrđenja Pontrjaginovog principa maksimuma pri ograničenim faznim promenljivim ([6], teorema 23).

Eliminacijom promenljivih π_i i u^i iz jednačina (15) i (16), uzimajući da je $\pi_0 = 1$, dobijamo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\sum_{\mu=1}^{k} \dot{\lambda}_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i} + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i} \right), \tag{1.17}$$

čime je zadatak 1 rešen.

Ostaje da ispitamo mogu li jednačine (17) predstavljati diferencijalne jednačine kretanja razmatranog mehaničkog sistema. Da bi neko rešenje jednačina (17) moglo predstavljati konačne jednačine kretanja, potrebno je i dovoljno da zadovoljava opštu dinamlku jednačinu

$$\left(\frac{dL}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i=0, \tag{1.18}$$

koja predstavlja analitički izraz Dalamberovog (D'Alembert) principa. Smenjujući (17) u (18), nalazimo

$$\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\lambda}_\mu\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i-\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i=0. \tag{1.19}$$

Varijacije δq^i, razume se, nisu nezavisne već predstavljaju virtualna pomeranja. U slučaju kada kretanje sistema ograničavaju nelinearne neholonomne veze, u literaturi se mogu naći različite definicije virtualnih pomeranja. Ako usvojimo Ćitajevljevu definiciju, tj. ako pod virtualnim pomeranjima podrazumevamo ona koja zadovoljavaju jednačine

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i=0,\quad (\mu=1,\ldots,k), \tag{1.20}$$

iz (19) sledi

$$\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i=0, \tag{1.21}$$

što predstavlja potreban i dovoljan uslov da (17) budu jednačine kretanja sistema (detaljnije u [5]).

Postavimo, sada, pitanje mogu li se pretpostavke u zadatku optimalnog upravljanja modifikovati tako da se, kao njegovo rešenje, bezuslovno dobiju jednačine kretanja sistema. U tom cilju potražimo optimalnu trajektoriju upoređujući je sa zaobilaznim putevima koji zadovoljavaju uslov »kinematičke ostvarivosti kretanja«

$$\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i=0. \tag{1.22}$$

Ako se iskoristi jednakost (22), (13) se može napisati u obliku

$$\delta\mathcal{J}_1=\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(-\dot{\pi}^i+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i}-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i}\right)\delta q^i+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i}-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^i}\right)\delta u^i\right]dt, \tag{1.13'}$$

odakle, analogno prethodnom, slede jednačine

$$\dot{\pi}^i=\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{d}{dt}\frac{\varrho\varphi_\mu}{\partial u^i}-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i},\qquad \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i}-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^i}=0, \tag{1.15'}$$

odnosno, po eliminaciji množilaca π^i i upravljanja u^i i usvajajući da je $\pi_0 = 1$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=-\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\lambda}_\mu\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i}.$$

Do istih jednačina se može doći i primenom principa maksimuma Pontrjagina uz određene »modifikacije« kako je pokazano u [7].

2. Ako se jednačine neholonomnih veza (1.2) mogu napisati u obliku

$$\dot{q}^\mu=f^\mu(q^1,\ldots,q^\mu,\dot{q}^1,\ldots\dot{q}^m.\,t),\quad (m=n-k,\quad \mu=m+1,\ldots,n) \tag{2.1}$$

zadatak 1 se može formulisati na sledeći način.

Zadatak 2. Neka je dat dinamički sistem

$$\dot{q}^\alpha=u^\alpha,\quad (\alpha=1,\ldots,m),$$

$$\dot{q}^\mu=f^\mu(q^1,\ldots,q^n,u^1,\ldots,u^m,t),\quad (\mu=m+1,\ldots,n), \tag{2.2}$$

gde su u^α dopuštena upravljanja iz klase neprekidnih funkcija a restriktivni skup je ceo m-dimenzioni prostor i neka su zadane tačke $(q_0{}^i)$ i $(q_1{}^i)$ konfiguracionog prostora. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema iz položaja (q_0) u položaj (q_1) pri kome se minimizira funkcional

$$y=\int_{t_0}^{t_1}\tilde{L}(q,u,t)\,dt, \tag{2.3}$$

gde je

$$\tilde{L}(q,u,t)=L(q^1,\ldots,q^n,u^1,\ldots,u^m,f^{m+1}_{(q,u,t)},\ldots,f^n_{(q,u,t)}).$$

Primetimo da je u ovom zadatku, za razliku od prethodnog, prostor vektora upravljanja dimenzije $m=n-k$ a ograničenja na fazne promenljive i upravljanja predstavljaju deo jednačina dinamičkog sistema. Ovaj zadatak ćemo rešiti primenom Pontrjaginovog principa maksimuma. U tom cilju formirajmo funkciju

$$\mathcal{H}(q,u,\alpha,t)=\psi_0\tilde{L}(q,u,t)+\psi_\alpha u^\alpha+\psi_\mu f^\mu(q,u,t)+\psi_{n+1}, \tag{2.4}$$

Jednačine, konjugovane jednačinama (2), su

$$\dot{\psi}=-\psi_0\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i}-\psi_\mu\frac{\partial \alpha^\mu}{\partial q^i},\quad (i=1,\ldots,n). \tag{2.5}$$

Iz uslova maksimuma, sledi

$$\psi_0\frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\alpha}+\psi_\alpha+\psi_\mu\frac{\partial \alpha^\mu}{\partial u^\alpha}=0. \tag{2.6}$$

S obzirom na to da je

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i}=\frac{\partial L}{\partial q^i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\frac{\partial f^\mu}{\partial q^i}.\quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^i}=\frac{\partial L}{\partial u^i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\frac{\partial q^\mu}{\partial u^i}.$$

jednačine (5) i (6), mogu se dovesti na oblik

$$\dot{\psi}_i = -\psi_0 \frac{\partial L}{\partial q^i} - \lambda_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial q^i}, \tag{2.7}$$

$$\psi_0 \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \lambda_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial u^\alpha} + \psi_\alpha = 0, \tag{2.8}$$

gde je uvedena oznaka

$$\lambda_\mu = \psi_0 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} + \psi_\mu. \tag{2.9}$$

Eliminacijom promenljivih ψ_α iz (7) i (8), dobijamo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial f^\mu}{\partial q^\alpha}\right) - \frac{\partial f^\mu}{\partial u^\alpha}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} +$$

$$+ \frac{\dot{\lambda}^\mu}{\psi_0}\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\alpha} + \frac{\lambda_\mu}{\psi_0}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial f^\mu}{\partial q^\alpha}\right) = 0, \tag{2.10}$$

odnosno, pošto se eliminišu $\dot{\lambda}_\mu$ u i u^α,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\gamma^\mu_\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\mu}\frac{\partial f^\mu}{\partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\lambda_\mu}{\psi_0}\gamma^\mu_\alpha = 0, \tag{2.11}$$

gde je

$$\gamma^\mu_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial f^\mu}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial f^\mu}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial f^\mu}{\partial q^\nu}\frac{\partial f^\nu}{\partial \dot{q}^\alpha}.$$

Može se pokazati [5] da su jednačine (11) ekvivalentne Vorončevim jednačinama, tada i samo tada, ako je

$$\lambda_\mu \gamma^\mu_\alpha = 0, \text{ za svako } \alpha.$$

3. Minimizacija funkcionala (1.7) uz ograničenja (1.6) ekvivalentna je minimizaciji funkcionala

$$\mathcal{J}_1(u) = \int_{t_0}^{t_1}\left[L(q, u, t) + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu \varphi_\mu(q, u, t)\right]dt.$$

Posmatrajmo $\mathcal{J}_1(u)$ kao funkciju graničnih vrednosti t_1 i $q_1(t)$ koje ćemo u daljem tekstu obeležavati jednostavno sa t i q:

$$\mathcal{J}_1(u, q, t) = \int_{t_0}^{t}\left[L(q(\tau), u(\tau), \tau) + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu \varphi_\mu(q, (\tau), u(\tau), \tau)\right]d\tau. \tag{3.1}$$

Pretpostavimo da (1), kao funkcija od u (pri fiksiranim t i q) ima, za $\tilde{u}=u$, jedini minimum $S(q, t)$, tj.

$$S(q, t) = \mathcal{J}_1(q, t, \tilde{u}) = \min_{u \in R^n} \mathcal{J}_1(q, t, u).$$

Ispitajmo promenu funkcije $S(q, t)$ duž trajektorije koja odgovara upravljanju $u(t)$ i polazi iz tačke (t_0, q_0). U tom cilju potražimo njen izvod po vremenu sastavljen u smislu jednačina kretanja

$$\frac{dS(q, t)}{dt} = \frac{\partial S(q, t)}{\partial t} + \frac{\partial S(q, t)}{\partial q^i} u^i. \tag{3.2}$$

S druge strane, diferenciranjem (1), dobijamo

$$\frac{dS(q, t)}{dt} = L(q, (t), u(t), t) + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \varphi_\mu (q(t), u(t), t). \tag{3.3}$$

Upoređujući (2) i (3), i uzimajući u obzir (1.9), dobijamo

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S(q, t)}{\partial q}, u, t\right) - \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \varphi_\mu (q, u, t) = 0. \tag{3.4}$$

Neka je $\hat{u}(t)$ optimalno upravljanje i $\hat{q}(t)$ odgovarajuća optimalna trajektorija koja u trenutku t_0 polazi iz tačke q_0. Pretpostavimo da se iz jednačina (1.6) i (1.15) mogu izračunati

$$\hat{u}^i = \hat{u}^i (\hat{q}, \hat{\pi}, t), \quad \hat{\lambda}_\mu = \hat{\lambda}_\mu (\hat{q}, \hat{\pi}, t).$$

Tada se može konstruisati funkcija

$$\mathcal{H}(\hat{q}, \hat{\lambda}, \hat{u}(\hat{q}, \hat{\pi}, t), t) = \mathcal{H}^* (\hat{q}, \hat{\pi}, t),$$

i jednačina (4) napisati u obliku

$$\frac{\partial S(\hat{q}, t)}{\partial t} + \mathcal{H}^* \left(\hat{q}, \frac{\partial S(\hat{q}, t)}{\partial q}, t\right) = 0. \tag{3.5}$$

Poslednja jednačina predstavlja Hamilton — Jakobijevu parcijalnu diferencijalnu jednačinu čiji se potpun integral (ako postoji) može iskoristiti za dobijanje jednačina kretanja sistema

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \pi_i}, \quad \dot{\pi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial q^i}.$$

Jednačina (5) predstavlja jedan od dovoljnih uslova da upravljanje bude optimalno. Na osnovu toga i prethodnih rezultata može se izvesti zaključak da se Hamilton — Jakobijeva teorija može primeniti na neholonomne sisteme samo ako (1.3) predstavlja uslov stacionarnosti Hamiltonovog dejstva, tj. ako važe uslovi (1.21).

Pokazaćemo još kako se funkcija $\mathcal{H}^*$ može dovesti u vezu sa Hamiltonovom funkcijom

$$H(\mathrm{p}, q, t) = [p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}, t)] \; \dot{q} = \dot{q}(q, p, t).$$

Iz druge jednačine (1.15) može se izračunati

$$\pi_i = p_i + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i}, \quad \left(p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i}\right),$$

i smenom u $\mathcal{H}^*$ dobiti

$$\mathcal{H}^*(q, \pi(q, p, t) = \left[p_i \dot{p}^i - L(q, u, t) + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i} u^i \right]_{u=u(q, p, t)},$$

odnosno, ako iskoristimo i jednačine (1.5)

$$\mathcal{H}^*(q, \pi(q, p, t), t) = H(q, p, t) + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i.$$

U slučaju da su neholonomne veze homogene funkciće generalisanih brzina sa stepenom homogenosti m, biće

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = m \varphi_\mu = 0.$$

pa je

$$\mathcal{H}^*(q, \pi(q, p, t), t) = H(q, p, t).$$

Literatura

[1] Anđelić T., *Generalisani Hamiltonov princip za neholonomne sisteme*, I kongres mat. i fiz. Jugoslavije 1949.

[2] Athans M. and Falb P., *Optimal control*, McGraw-Gill Book company 1966.

[3] Đukić Đ., *A note on Hamilton's principle*, Mathematica Japonicae, Vol. **20**, № **2**, 1975.

[4] René van Dooren, *Derivation of the Lagrange equations for nonholonomics Chetaev systems from a modified Pontryagin maximum principle*, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, **28**, **4**, 1977.

[5] Румянцев В. В., *О принципе Гамильтона для неголономных систем*, ПММ, Т. **42**, вып. **3**, 1978.

[6] Понтрягин Л. С., *Математическая теория оптимальных процессов*, „Наука", Москва 1976.

[7] Бакша А., *Принцип максимума Понтрягина и интегральные принципи механики*, Теориjска и примењена Механика **7**, 1981.

ЗАМЕТКА О ПРИНЦИПЕ ГАМИЛЬТОНА КАК ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Резюме

Известно что принцип Гамильтона для неголономных систем не является принципом стационарного действия. В работе получени неопходимие и достаточние условия для формирование принципа Гамильтона как задача оптимального управления. Проанализирован общий случай неголономных связь и, в частности, линейные связи типа Чаплигына.

Aleksandar Bakša
Prirodno-matematički fakultet
11000 Beograd
Studentski trg 16/IV