Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

PRILOG IZUČAVANJU STRUJANJA ELEKTROPROVODNIH RAZREĐENIH GASOVA

Radomir Ašković

1. Uvod

Izučavanje strujanja razređenih elektroprovodnih gasova u magnetnom polju ima veliki značaj u aeroinženjerstvu velikih brzina, kao i u astronautici i dinamici plazme.

U teorijskom izučavanju strujanja razređenih gasova polazi se od Navije--Stoks-ovih jednačina, sa graničnim uslovima za brzinu klizanja na zidu obstrujavanog tela i skok temperature na površini razdvajanja gas — telo.

Dokazano je, međutim, da se strujanje razređenog gasa može tretirati, takođe, i pomoću jednačina graničnog sloja za nestišljiv fluid ([1], str. 594), uvodeći uslov klizanja, ukoliko su ispunjene još sledeće predpostavke: a) Mahov broj strujanja mali, b) Rejnoldsov broj strujanja dovoljno veliki (što je obezbeđeno malom kinematskom viskoznošću gasa) i c) temperature tela i okolnog gasa se uzajamno malo razlikuju.

Pokazano je još i da se režim strujanja sa klizanjem na zidu javlja pri takvim umereno velikim Rejnoldsovim brojevima ([2], dijagram 12.1, str. 679), pri kojima je praktično uvek laminarni režim strujanja.

2. Osnovne jednačine i metoda rešavanja

Osnovne jednačine tridimenzionog strujanja razređenih elektroprovodnih gasova — uza sve predhodno navedene okolnosti, još i uz prisustvo magnetnog polja, gde je magnetni Rejnoldsov broj mali, električno polje odsustvuje, efekti polarizacije jonizovanog gasa se zanemaruju, oslanjajući se na Prandtlove predpostavke o graničnom sloju i »princip većeg značaja podužnog od transverzalnog pravca« [3] — u Hejsovim koordinatama [4], glase

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial s}+v\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u_e}{\partial t}+u_e\frac{\partial u_e}{\partial s}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\frac{\sigma B^2}{\rho}(u_e-u), \tag{1}$$

$$\frac{\partial(e_2 u)}{\partial s}+\frac{\partial(e_2 v)}{\partial n}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial s}+v\frac{\partial w}{\partial n}-\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z_1}u^2=-\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}u_e^2-\frac{\sigma B^2}{\rho}w+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}, \tag{3}$$

sa graničnim uslovima

$$u=u_e(s, z, t), \quad v=0, \quad w=0 \text{ za } n=0, \text{ pri } t=0, \tag{4}$$

$$u=\lambda\frac{\partial u}{\partial n}, \quad v=0, \quad w=\lambda\frac{\partial w}{\partial n}, \text{ za } n=0, \text{ pri } t>0, \tag{5}$$

$$u\to u_e(s, z, t), \quad w\to 0, \text{ za } n\to\infty, \text{ pri } t>0, \tag{6}$$

gde je λ srednja slobodna molekulska putanja.

Ovde su koordinate (s, z, n) redom: strujnice spoljašnjeg potencijalnog strujanja, ekvipotencijalne linije i spoljašnje normale na površini posmatrane konture. Lokalno rastojanje dveju susednih ekvipotencijalnih linija predstavlja $e_1(s, z)$, a $e_2(s, z)$ — odgovarajuće rastojanje strujnica potencijalnog strujanja, dok je $e_3=1$. To su, dakle, metrički koeficijenti izabranog sistema koordinata. Dalje su: u_e — spoljašnja potencijalna brzina, σ — elektroprovodnost fluida, B — jačina magnetne indukcije, ν — kinematska viskoznost i t — vreme.

Radi tretiranja sistema jednačina (1), (2), (3), primenićemo metodu uzastopnih približenja. Predstavimo komponente brzine strujanja u graničnom sloju pomoću redova

$$u=\sum_{i=0}^{\infty}u_i, \quad v=\sum_{i=0}^{\infty}v_i, \quad w=\sum_{i=0}^{\infty}w_i, \tag{7}$$

gde je $u_i=0(\varepsilon^i)$, ε je mali broj.

Zamenjujući redove (7) u jednačine (1), (2), (3), dobijamo sledeći rekurzivni sistem diferencijalnih jednačina za pojedine aproksimacije

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2}+Nu_0=\frac{\partial u_e}{\partial t}+Nu_e, \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial(e_2u_0)}{\partial z}+\frac{\partial(e_2v_0)}{\partial n}=0, \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial n^2}+Nw_0=\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}(u_0^2-u_e^2), \tag{8.3}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2}+Nu_1=u_e\frac{\partial u_e}{\partial s}-u_0\frac{\partial u_0}{\partial s}-v_0\frac{\partial u_0}{\partial n}, \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial(e_2u_1)}{\partial s}+\frac{\partial(e_2v_1)}{\partial n}=0, \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 w_1}{\partial n^2}+Nw_1=-u_0\frac{\partial w_0}{\partial s}-v_0\frac{\partial w_0}{\partial n}+\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}2u_0u_1. \tag{9.3}$$

Kombinujući (7), (5) i (6) dobijamo i odgovarajuće granične uslove

$$u_i = \lambda \frac{\partial u_i}{\partial n} \quad (i=0, 1, 2, \ldots) \text{ za } n=0, \tag{10.1}$$

$$v_i = 0 \quad (i=0, 1, 2, \ldots) \text{ za } n=0, \tag{10.2}$$

$$w_i = \lambda \frac{\partial w_i}{\partial n} \quad (i=0, 1, 2, \ldots) \text{ za } n=0, \tag{10.3}$$

$$u_0 \to u_e(s, z, t), \quad u_i \to 0, \quad (i=1, 2, \ldots), \text{ za } n \to \infty \tag{10.4}$$

$$w_i \to 0 \quad (i=0, 1, 2, \ldots) \text{ za } n \to \infty. \tag{10.5}$$

Realno je očekivati da će metoda uzastopnih približenja, zaključno sa prva dva približenja, uspešno kvalitativno opisati nestacionarni granični sloj, imajući u vidu postojeća iskustva ([5], [6], [7]).

3. Proračun strujanja oko tela pri njegovom oscilatornom kretanju u razređenom elektroprovodnom gasu

Prilog na temu »fenomena spoljašnjeg indukovanog strujanja«

Proračun strujanja oko tela pri njegovom harmoniski-oscilatornom kretanju, sa frekvencijom ω, pomoću jednačina dobijenih predloženom metodom u §2, može biti olakšan ako se umesto $u_e = V_e(s, z) \cos \omega t$, uvede izraz $u_e = V_e(s, z) e^{i\omega t}$, sa konvencijom da samo realni delovi svih kompleksnih izraza, proizašlih iz računa, imaju određena fizička značenja.

Posle unošenja izraza za spoljašnju brzinu u_e u jednačinu (8.1) i uvođenja nove promenljive

$$\eta = n\sqrt{\frac{\omega}{\nu}},$$

tražeći rešenje u vidu

$$u_0 = V_e(s, z)\, e^{i\omega t} f_0'(\eta), \tag{11}$$

parcijalna diferencijalna jednačina (8.1) se svodi na običnu diferencijalnu

$$f_0''' - (i+\gamma) f_0' = -(i+\gamma), \tag{12}$$

sa graničnim uslovima, proizašlim iz (10.1) i (10.4)

$$f_0(0) = 0, \quad f_0'(0) = L f_0''(0), \quad f_0'(\infty) \to 1, \tag{13}$$

gde su

$$N = \frac{\sigma B^2}{\rho}, \quad \gamma = \frac{N}{\omega}, \quad L = \lambda\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}. \tag{14}$$

Rešenje jednačina (12), koje zadovoljava granične uslove (13), lako se nalazi

$$f_0'(\eta) = 1 - \frac{a_0 - i a_1}{a_2} e^{-(a+ib)\eta}, \tag{15}$$

gde su

$$\left.\begin{aligned} a_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\gamma^2}+\gamma\right)^{1/2}, \quad b=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\gamma^2}-\gamma\right)^{1/2}, \\ a_0=1+La, \qquad a_1=Lb, \qquad a_2=(1+La)^2+L^2b^2. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Tako je sada prvo približenje podužne komponente brzine strujanja, s obzirom na usvojenu konvenciju

$$u_0=V_e(s,z)\,R_{eal}\cdot\{e^{i\omega t}f_0'(\eta)\},$$

odnosno

$$u_0=V_e(s,z)\left\{\cos\omega t-\frac{1}{a_2}e^{-a\eta}\left[a_0(\cos\omega t\cos b\eta+\sin\omega t\sin\eta)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+a_1(\sin\omega t\cos b\eta-\cos\omega t\sin b\eta)\right]\right\}. \tag{17}$$

Zamenjujući izraz (17) u jednačinu (8.3), posle sređivanja desne strane jednačine, dobijamo

$$\frac{\partial w_0}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial n^2}+Nw_0=\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}V_e^2\left[\frac{1}{2}(f_0'\bar{f}_0'-1)+\frac{1}{2}(f_0'^2-1)e^{2i\omega t}\right], \tag{18}$$

gde crta odozgo označava odgovarajuću konjugovano-kompleksnu vrednost funkcije.

S obzirom na strukturu linearne parcijalne jednačine (18), pokazalo se da je potrebno tražiti njeno rešenje u obliku

$$w_0=\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}V_e^2(s,z)\frac{1}{\omega}\left[\zeta_{01}(\eta)e^{2i\omega t}+\zeta_{02}(\eta)\right], \tag{19}$$

da bi se dobilo za funkcije $\zeta_{01}(\eta)$ i $\zeta_{02}(\eta)$

$$\zeta_{01}''-(2i+\gamma)\zeta_{01}=\frac{1}{2}(1-f_0'^2), \tag{20}$$

$$\zeta_{02}''-\gamma\zeta_{02}=\frac{1}{2}(1-f_0'\bar{f}_0'), \tag{21}$$

sa graničnim uslovima, proisteklim iz (10.3) i (10.5)

$$\begin{aligned} \zeta_{01}(0)=L\zeta_{01}'(0), \quad \zeta_{01}(\infty)\to 0, \\ \zeta_{02}(0)=L\zeta_{02}'(0), \quad \zeta_{02}(\infty)\to 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Koristeći potom jednačinu kontinuiteta (8.2) određujemo v_0

$$v_0=-\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\left(\frac{\partial V_e}{\partial s}+\frac{1}{e_2}\frac{\partial e_2}{\partial s}V_e\right)e^{i\omega t}f_0(\eta), \tag{23}$$

a unoseći ovu vrednost (23) u jednačinu (9.1), dobijamo posle sređivanja

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2}+Nu_1=V_e\frac{\partial V_e}{\partial s}\left\{\frac{1}{2}(1-f_0'^2+f_0 f_0'')e^{2i\omega t}+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}f_0'\bar{f}_0'+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}(f_0\bar{f}_0''+\bar{f}_0 f_0'')\right]\right\}+\frac{1}{e_2}\frac{\partial e_2}{\partial s}V_e^2\left[\frac{1}{2}f_0 f_0'' e^{2i\omega t}+\frac{1}{4}(f_0 f_0''+\bar{f}_0 f_0'')\right]. \quad (24)$$

Predpostavljajući rešenje jednačine (24) u obliku

$$u_1=V_e\frac{\partial V_e}{\partial s}\frac{1}{\omega}\left[e^{2i\omega t}f_{1a}'(\eta)+f_{1b}'(\eta)\right]+$$

$$\frac{1}{e_2}\frac{\partial e_2}{\partial s}V_e^2\frac{1}{\omega}\left[e^{2i\omega t}f_{1c}'(\eta)+f_{1d}'(\eta)\right], \quad (25)$$

dobićemo sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$2if_{1a}'-f_{1a}'''+\gamma f_{1a}'=\frac{1}{2}(1-f_0'^2+f_0'' f_0), \quad (24.1)$$

$$-f_{1b}'''+\gamma f_{1b}'=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\bar{f}_0' f_0'+\frac{1}{4}(f_0\bar{f}_0''+\bar{f}_0 f_0''), \quad (24.2)$$

$$2if_{1c}'-f_{1c}'''+\gamma f_{1c}'=\frac{1}{2}f_0 f_0'', \quad (24.3)$$

$$-f_{1d}'''+\gamma f_{1d}'=\frac{1}{4}(f_0\bar{f}_0''+\bar{f}_0 f_0''), \quad (24.4)$$

s odgovarajućim graničnim uslovima

$$f_{1k}(0)=0, \quad f_{1k}'(0)=Lf_{1k}''(0), \quad f_{1k}'(\infty)=0, \quad k=a, b, c, d. \quad (26)$$

U radu su kompletno određena analitička rešenja svih diferencijalnih jednačina (20), (21), (24.1), (24.2), (24.3), (24.4), koja zadovoljavaju granične uslove (22) i (26), a izdvojeni su i realni delovi kompleksnih funkcija (19), (23) i (25), koji definišu fizičke vrednosti odgovarajućih približenja brzina, anlogno postupku za u_0 simbolično predstavljenom pomoću (17), ali zbog izuzetne glomaznosti tih izraza ovde ih nećemo navoditi.

3. **Zaključak**

Pre pola veka (1932) je Šlihting [6] pokazao da u ravanskom slučaju beskrajnog cilindričnog tela koje harmonski osciluje u *neprovodnom fluidu*, na granici graničnog sloja postoji jedno *stacionarno* podužno strujanje koje ne zavisi od viskoznosti fluida.

Sedamdesetih godina je isti fenomen identifikovan, i teoriski i eksperimentalno ([8], [9]), u tridimenzionom prostornom slučaju; naime, ustanovljeno je da na dovoljnom rastojanju od nekog zatvorenog tela (eksperiment izvršen sa spljoštenim elipsoidom odnosa poluosa 1 : 3 : 6), koje harmonski osciluje u mirnom fluidu, kao posledica intercijalnih (a ne viskoznih) efekata, postoji *stacionarno* strujanje, i to s obe komponente: i *podužnom,* i *transverzalnom* [8]

$$(u_1)_{n\to\infty} = -\frac{3}{4\omega} V_e \frac{\partial V_e}{\partial s} - \frac{1}{2\omega} \frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} V_e^2, \tag{27}$$

$$(w_0)_{n\to\infty} = \frac{1}{4\omega} \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} V_e^2(s, z). \tag{28}$$

Nekoliko godina kasnije (1973.) pokazano je [10], međutim, da u slučaju obrtnog osnosimetričnog tela koje harmonski osciluje u *elektroprovodnom fluidu,* u prisustvu magnetnog polja, ovo spoljašnje indukovano stacionarno strujanje *iščezava.*

I najzad, u ovom radu je bila namera da se prati ovaj fenomen u slučaju elektroprovodnog razređenog gasa, uz uslov klizanja na zidu tela. Pošto su nađena analitička rešenja svih jednačina, bilo je moguće utvrditi sledeće interesantne rezultate

1) Najpre, u opštem slučaju harmoniskog oscilovanja bilo kog tela u elektroprovodnom razređenom gasu u prisustvu magnetnog polja ($L\neq 0$, $B\neq 0$), pomoću limesa izraza (19) i (25) dokazujemo da *spoljašnje indukovano stacionarno strujanje tada ne postoji:*

$$\lim_{n\to\infty} (w_0) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_1) = 0.$$

2) Međutim, *u dva specijalna slučaja,* koji proističu iz ovde nađenih opštih rešenja, *spoljašnje indukovano stacionarno strujanje postoji,* i to:

a) u slučaju *neprovodnog razređenog gasa* ($B=0$, $L\neq 0$), izraz (25) potvrđuje *postojanje* spoljašnjeg stacionarnog strujanja:

$$(u_1)_{n\to\infty} = V_e \frac{\partial V_e}{\partial s} \frac{1}{\omega} \left\{f'_{1b}\right\}_{\substack{n\to\infty \\ B=0}} + \frac{1}{e_2} V_e^2 \frac{\partial e_2}{\partial s} \frac{1}{\omega} \left\{f'_{1d}\right\}_{\substack{n\to\infty \\ B=0}}.$$

$$\left\{f'_{1b}\right\}_{\substack{n\to\infty \\ B=0}} = -\frac{3}{4} \frac{L\sqrt{2}+1}{L^2+L\sqrt{2}+1},$$

$$\left\{f'_{1d}\right\}_{\substack{n\to\infty \\ B=0}} = -\frac{1}{2} \frac{L\sqrt{2}+1}{L^2+L\sqrt{2}+1},$$

b) u slučaju *običnog neprovodnog gasa* ($B=0$, $L=0$), spoljašnje indukovano stacionarno strujanje *postoji* i u limesu se izrazi (19) i (25) svode na (27) i (28).

Konačno, ti izrazi (27) i (28) u posebnom slučaju — dvodimenzionom, ravanskom — identično potvrđuju poznato rešenje Šlihtinga.

Literatura

[1] Rahmatulin H. A., Sagomonyan A. Y., Bunovich A. I., and Zverev I. N., *Cas Dynamics*, Moskva 1965.

[2] Абрамович Г. Н., *Прикл. газ. динамика*, Москва 1969.

[3] Eichelbrenner E. A., *La couche limit laminaire à trois dimensions*, PST du Ministère de l'air, NT **85**, Paris 1959.

[4] Hayes W. D., *The three-dimensional boundary layer*, NAVORD Rep. **1313**, Washington 1951.

[5] Đukić S. Đ., *On Unsteady Magnetic Low-Spee Slip Flow in the Boundary Layer*, Acta Mechanika **18**, 35—48 (1973).

[6] Schlchting H., *Boundary Layer Theory*, 6 th ed., McGraw-Hill, 1968.

[7] Ašković R., *O graničnim uslovima pri trodimenzionom magnetohidrodinamičkom strujanju razređenih gasova*, TEHNIKA, 1975, br. 5.

[8] Ašković R., *Etude de la couche limite periodique tridimensionnelle sur un corps en mouvement harmonique*, Zbornik radova preminulom akademiku Jakovu M. Hlitčifevu, Beograd 1970.

[9] Eichelbrenner E. A. et Ašković R., *Observations sur le decollement instationnaire en règime laminaire*, Zbornik radova X Jug. kongresa za rac. i prim. mehaniku, Baško Polje 1970.

[10] Čantrak S. et Ašković R., *Sur un phénomène de la couche limite magnetohydrodynamique d'un écou ement de révolution en régime non stationnaire*, Bull. Math. de la R. S. de Roumanie, Tome **17** (65), No **1**, Bucarest 1974.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS D'UN FLUIDE-CONDUCTEUR AVEC LES »CONDITIONS DE GLISSEMENT« PARIÉTALES

Résumé

On profite dans ce travail le fait bien-connu que l'écoulement d'un gaz raréfié peut être étudié à l'aide des équations de la couche limite d'un fluide incompressible, en y ajoutant des »conditions de glissement« pariétales, si: a) vitesse de l'écoulement est relativement petite, b) nombre de Reynolds est assez grand, et c) différence entre la température de l'obstacle et celle du gaz reste assez petite. D'autre part, on sait aussi que l'écoulement d'un gaz avec le glissement à la paroi arrive pour les nombres de Reynolds si modérés que le régime de cet écoulement reste toujours pratiquement laminaire. Bien sur, le nombre de Knudsen K ne sort pas de l'intervale ($0.01 < K < 0.1$) ou on peut utiliser les équations de dynamique des gaz mais avec les »conditions de glissement« à la paroi.

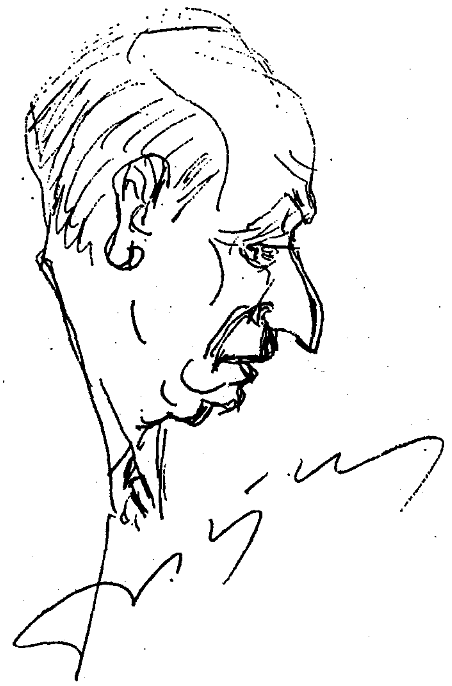
En acceptant encore que le nombre de Reynolds magnétique est petit et que les effets de polarisation du gaz ionisé sont négligeables, on traite ici les équations de la couche limite laminaire tridimensionnelle avec la validité du »principe de prévalence«, en système de coordonnées de Hayes, dans le cas d'un corps en oscillations harmoniques le long d'une trajectoire rectiligne. On examine en détail le phénomène de l'existance d'un *ecoulement stationnaire* induit à la frontière de la couche limite instationnaire périodique d'un gaz raréfié.

Prof. Dr Radomir Ašković
Mašinski fakultet
11000 Beograd

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

УСПОМЕНА

Академик др ***Мирко Д. Стојаковић*** начинио је овај цртеж—портрет академика др ***Татомира П. Анђелића*** 1974. године за време једне седнице Одељења природно—математичких наука Српске академије наука и уметности. —Иначе, др М. Стојаковић био је ученик професора Анђелића у Другој



мушкој гимназији у Београду. Обојица су били директори Математичког института у Београду, а сада су у истом одељењу Српске академије наука и уметности као редовни чланови.

Д. Т.