

EINPARAMETRIGE LÖSUNGEN DER UNIVERSELLEN GRENZSCHICHTGLEICHUNGEN LAMINARER UND INKOMPRESSIBLER STRÖMUNG AN EINER GLEICHMÄSSIG SCHNELLROTIERENDEN SCHAUFEL

Viktor Saljnikov und Miloš Pavlović

(Dargestellt am 22 Juni 1977)

Zusammenfassung

In dieser Arbeit betrachtet man ein Modell der ebenen stationären laminaren und inkompressiblen Grenzschicht an einer zusammen mit der Grundströmung gleichmässig schnellrotierenden Schaufel. Das entsprechende Grenzschichtgleichungssystem wird mittels der vervollkommeneten Methode von Loitsianski universalisiert. Für die Integration der in einparametriger Näherung ausgedrückten universellen partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung wird das Differenzenverfahren mit implizitem Schema benützt. Dadurch hat man die universellen charakteristischen Funktionen und die für die praktische Anwendung notwendigen universellen Grenzschichtgrössen gewonnen. Mit den vertafelten universellen Lösungen hat man als Beispiele die Grenzschichtberechnungen am umströmten Kreiszylinder und am Profil NACA 0010-34 durchgeführt. Auf Grund erhaltenen und graphisch dargestellten Resultate betrachtet man am Ende den Drehungseinfluss auf die Grenzschichtentwicklung.

1. Einführung

Das von Prandtl eingeführte wohlbekannte Grenzschichtmodell hat auch bei der Strömungsmaschinenuntersuchungen die Berechnung der für die Praxis interessanten Resultate ermöglicht. Dies bezieht sich besonders auf das Durchströmungsproblem radiales Schaufelrades, bei welchem, wegen der gleichzeitigen Drehung des ganzen Systems (Schaufel+Strömung), öfters mit erhöhtem Drehungszahl n , das mathematische Modell, was die Ausgangsgrenzschichtgleichungen betrifft, im Vergleich zum klassischen Gleichungssystem, etwas erweitert sein sollte.

Die nach dieser Konzeption von mehreren Forschern erhaltenen Resultate hängen dabei vom Entwicklungsniveau der Grenzschichttheorie ab. Als einfacheres Model wurde zunächst der Fall der ebenen längstangeströmten Platte unter-

sucht. Dieses Problem, nämlich, hat Jungclaus in seiner Dissertation [1] mittels der Karman-Pohlhausen'schen Methode gelöst. Auf ähnliche Weise kam Yen für analogen Fall der scherenden Strömung zu seiner Lösung [2]. Ting Y.L. hat gleichzeitig an Hand des Blasius'schen Verfahrens die für den Fall der inkompressiblen [3] und kompressiblen Strömung [3a] abgeleiteten Gleichungen gelöst. Den dabei zugelassenen Fehler hat er nach ausführlicher Untersuchung bald in der Arbeit [4] beseitigt und die numerisch gewonnenen verbesserten Lösungen nachträglich in der Arbeit [5] angegeben. Beim Kritisieren der in [3] veröffentlichten Resultate Glauert hat in seiner Arbeit [6] ein neues Modell aufgestellt und die entsprechenden Gleichungen mit Hilfe der Milne'schen Methode numerisch gelöst.

Es soll noch erwähnt werden, dass die in Form einer Polemik publizierten Arbeiten [3], [4], [5] und [6] ein Interesse und lebendige Diskussion in wissenschaftlichen Kreisen erweckt haben, welche mit der in [7] angegebenen Analyse von Jungclaus endgültig abgeschlossen wurden. Mit ausführlicher Untersuchung dieses Modells und mit der in Form einer Reihe dargestellten Lösung bestätigt Murray in der Arbeit [8] die Resultate von Ting Y.L. [5]. Die Betrachtung der ebenen Platte als ein vereinfachtes Modell für die Strömungsmaschinenschaufel wurde damit auf eine befriedigende Weise abgeschlossen.

In nächster Forschungsperiode betrachtet man als Modell die Schaufel mit einem krummlinigen Profil. Für die Untersuchung dieses Problems benützt Saljnikov in der Arbeit [9] ein Verfahren die eine Erweiterung der von Görtler entwickelten Reihenmethode zur Berechnung drehungsfreier Grenzschichten darstellt. Im Zusammenhang damit betrachtet Saljnikov weiter in der Arbeit [10] die entsprechenden „Ähnlichen“ Lösungen. Das, dabei abgeleitete Gleichungssystem stellt eine Erweiterung der wohlbekannten Falkner-Skan'schen Gleichung dar. Die nach Runge-Kutta-Mersson Methode in [11] gewonnene numerische Lösung dieses Systems wurde in derselben Arbeit, von Saljnikov und Djordjević, mit entsprechenden Resultaten von Glauert und Ting Y.L. verglichen. In der, kurz vorher erschienenen Arbeit [12] haben Halleen, Johnston und Reynolds als Modell die Schaufel in Form eines Kreisbogens benützt. Die abgeleiteten Gleichungen wurden mittels der predictorcorrector'schen Methode, und zwar an Hand des Adams'schen Verfahrens numerisch gelöst. Die erhaltenen Resultate hat man dabei mit entsprechenden Lösungen von Jungclaus, Ting Y.L. und Murray verglichen.

Die mehrparametrischen Methode vom Loitsianski's Typus haben die bedeutende Anregung und eine neue Qualität auch in die Untersuchung des Grenzschichtproblems an einer gekrümmten Schaufel eingetragen. Demgemäss Saljnikov und Djordjević haben in der Arbeit [13] die entsprechenden universellen Grenzschichtgleichungen an Hand des Verfahrens von Saljnikov-Oka erhalten, die sich in einparametrischer Näherung zum Gleichungssystem der „Ähnlichen“ Lösungen zurückführen lassen. Mittels der vervollkommenen Methode von Loitsianski, Saljnikov und Pavlović haben in der Mitteilung [14] die verbesserten universellen Gleichungen dieses Grenzschichtproblems gewonnen.

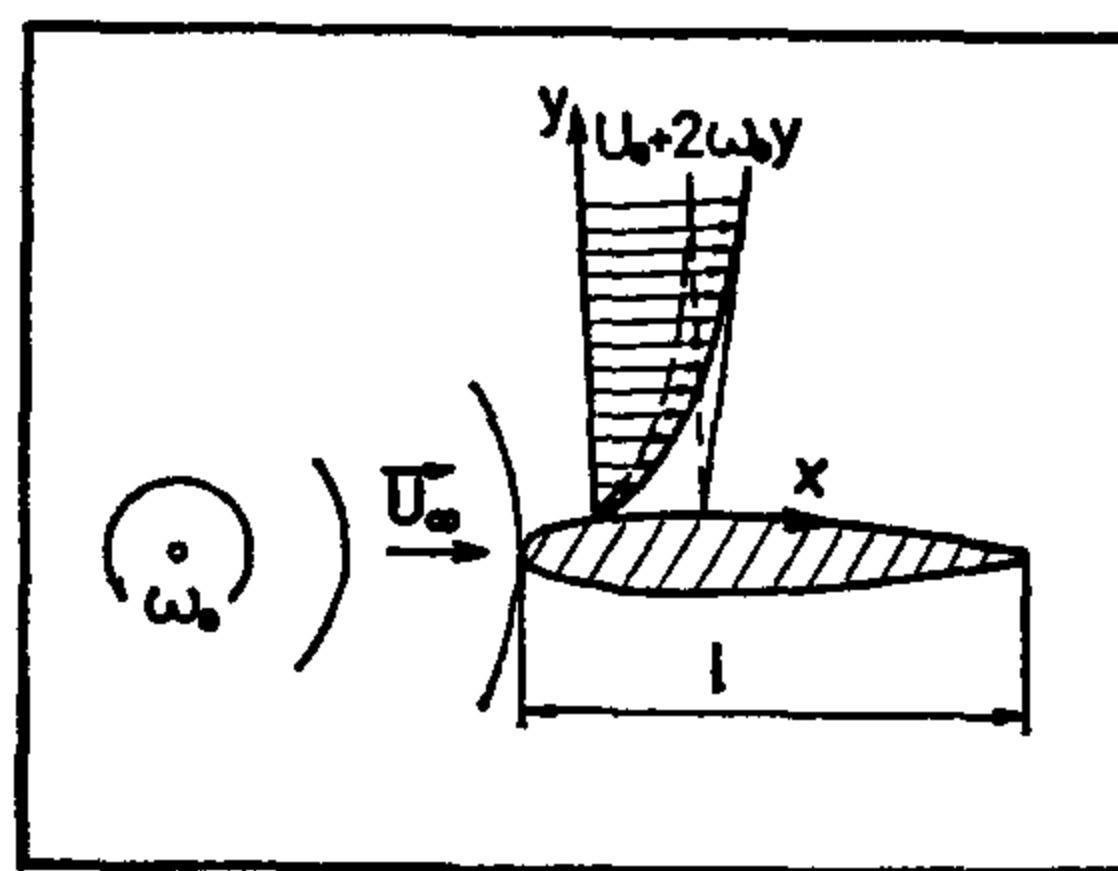


Abb. 1

2. Universalisierung der Grenzschichtgleichungen betrachtetes Problems

Für die Betrachtung der ebenen laminaren und inkompressiblen Grenzschichtströmung an einer Schaufel gleichmässig schnellrotierenden radialen Schaufelrades wurde dabei das auf der Abb. 1 dargestellte Modell aufgestellt. Die Schaufel der Länge l , nämlich, rotiert auf dem Abstand b um einer im Raum ruhenden Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω . Dabei ist das unbewegliche geradlinige Koordinatensystem $O_a x_a y_a$ mit der Rotationsachse zusammenverbunden, während das relative krummlinige System Oxy zum rotierenden Profil befestigt ist. Die für oben definiertes relative Koordinatensystem abgeleitete Navier-Stokes'sche Gleichung lautet

$$(1) \quad \frac{1}{2} \text{grad } \vec{v}^2 - [\vec{v} (\text{rot } \vec{v} + 2\vec{\omega})] = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v},$$

mit entsprechender Kontinuitätsgleichung

$$(2) \quad \text{div } \vec{v} = 0.$$

Nach der Komponentenaufspaltung und unter Verwendung wohlbekannter Grenzschichttheoretischen Grössenordnungsabschätzungen, als auch unter Berücksichtigung der Ergänzungsbedingung über das schnellrotierende Schaufelrad, wobei die Winkelgeschwindigkeit ω von der Grössenordnung

$$(3) \quad \omega \sim \frac{U_\infty}{l} (Re_\infty)^{1/2}, \quad \text{mit } Re_\infty = \frac{U_\infty l}{\nu},$$

sein sollte, erhält man aus dem System (1), (2) die folgenden Grenzschichtgleichungen [9]

$$(4) \quad \begin{aligned} uu_x + vu_y - \nu u_{yy} &= (UU_x + VU_y)_{y \rightarrow \infty}; \\ u_x + v_y &= 0, \end{aligned}$$

mit entsprechenden Randbedingungen

$$(5) \quad y = 0 : u = v = 0; \quad y \rightarrow \infty : u = U_0 \pm 2\omega y.$$

Hier bedeuten u ; v die Geschwindigkeitskomponenten in der Grenzschicht, während

$$(6) \quad U(x, y) = U_0(x, 0) \pm 2\omega y; \quad V = V(x, y)$$

stellen die entsprechenden Grössen in der Grundströmung dar. Dabei bezieht sich das positive Vorzeichen in (5), (6) auf die Profilbrust und das negative auf den Profilrücken.

Durch Einführung der Stromfunktion $\psi = \psi(x, y)$ mittels der üblichen Ausdrücke

$$u = \psi_y; \quad v = -\psi_x,$$

folgt aus dem System (4) die Ausgangsgleichung betrachtetes Problems [9]

$$(7) \quad \psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} - \nu \psi_{yyy} = [U_0 U'_0 \pm 2\psi (U'_{0y} - \psi_x)]_{y \rightarrow \infty}$$

mit entsprechenden Randbedingungen

$$(8) \quad \begin{aligned} y=0 : \psi &= \psi_y = 0; \\ y \rightarrow \infty : \psi_y &= U_0(x) \pm 2\omega y, \end{aligned}$$

wobei die Kontinuitätsgleichung (4), wie bekannt, identisch befriedigt wird.

Als Lösungsverfahren für das Gleichungssystem (7), (8) wird die von Loitsianski [15] für die drehungsfreien Strömungsfälle entwickelte und von Saljnikov [16] vervollkommnete mehrparametrische Methode verwendet. In den Gleichungen (7), (8), nämlich, werden zunächst die folgenden Transformationen

$$(9) \quad \begin{aligned} x &= x; \quad y = \eta U_0^{-b_0/2} (a_0 \nu \int_0^x U_0^{b_0-1} dx)^{1/2} \\ \psi &= (a_0 \nu \int_0^x U_0^{b_0-1} dx)^{1/2} U_0^{1-b_0/2} \Phi(x, \eta) \end{aligned}$$

eingeführt, wobei a_0 und b_0 vorläufig die willkürlichen Konstanten bedeuten und $U_0(x)$ die Geschwindigkeitsverteilung unmittelbar an der Wand im Falle idealer Flüssigkeit darstellt (s. Abb.1).

Die dimensionslose Stromfunktion $\Phi(x, \eta)$ wird in folgender Reihenform

$$(10) \quad \Phi(x, \eta) = \Phi_0(x, \eta) \pm \Phi_1(x, \eta) \Omega(x) + \dots$$

angenommen, wobei die als „Drehungszahl“ bezeichnete dimensionslose Grösse Ω stellt ein Mass für das Verhältnis zwischen der Neigung des Geschwindigkeitsprofils von Grundströmung und dem durchschnittlichen Geschwindigkeitsgradient in der Grenzschicht selbst dar (s. Abb.1). In betrachtetem Falle erhält diese Grösse auf Grund von Transformationen (9) die folgende Form

$$(11) \quad \Omega = 2\omega U_0^{-(1+b_0/2)} (a_0 \nu \int_0^x U_0^{b_0-1} dx)^{1/2}$$

In weiteren Betrachtungen begnügen wir uns mit der Genauigkeit, welche die ersten zwei Glieder der Entwicklung (10) liefern.

Nach Einsetzen dieses linearisierten Ausdrucks in die transformierte Grenzschichtgleichung und darauffolgendem Koeffizientenvergleich, sie lässt sich auf zwei rekursiven partiellen Differentialgleichungen aufspalten, die vom Winkelgeschwindigkeitseinfluss befreit sind. Die erste Gleichung legt dabei die Lösung Φ_0 des drehungsfreien Falles ($\omega=0$) fest, während die zweite, die erste Näherung Φ_1 des durch gleichmässige Rotation ($\omega=\text{const}$) hervorgerufenen Abweichens bestimmt.

Dementsprechend linearisiert man auch die anderen charakteristischen Grenzschichtgrössen, wie folgt:

Die Geschwindigkeit

$$(12) \quad u = u_0 \pm \Omega u_1 = U_0(\Phi_0, \eta \pm \Omega \Phi_1, \eta),$$

die Verdrängungsdicke

$$(13) \quad \delta^* = \delta_0^* \pm \Omega \delta_1^* = U_0^{-b_0/2} (a_0 \nu \int_0^x U_0^{b_0-1} dx)^{1/2} (A_0 \pm \Omega A_1),$$

mit den Integralen:

$$A_0 = \int_0^\infty (1 - \Phi_{0\eta}) d\eta; \quad A_1 = \int_0^\infty (\eta - \Phi_{1\eta}) d\eta,$$

und die Impulsverlustdicke

$$(14) \quad \delta^{**} = \delta_0^{**} \pm \Omega \delta_1^{**} = U_0^{-b_0/2} (a_0 \nu \int_0^x U_0^{b_0-1} dx)^{1/2} (B_0 \pm \Omega B_1),$$

mit den Integralen:

$$B_0 = \int_0^\infty \Phi_{0\eta} (1 - \Phi_{0\eta}) d\eta;$$

$$B_1 = \int_0^\infty [\Phi_{0\eta} (\eta - \Phi_{1\eta}) + \Phi_{1\eta} (1 - \Phi_{0\eta})] d\eta.$$

Führt man nun die von Loitsianski [15] definierten Formparameter

$$(15) \quad f_k = U_0^{k-1} \frac{d^k U_0}{dx^k} \left(\frac{\delta_0^{**2}}{\nu} \right)^k; \quad k = 1, 2, \dots, \infty,$$

als neue unabhängige Veränderlichen ein, wobei man mittels folgender Formeln:

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{U_0'}{U_0 f_1} \sum_{k=1}^\infty \theta_k \frac{\partial}{\partial f_k}; \quad \theta_k = [k(f_1 + F) - f_1] f_k + f_{k+1},$$

mit den üblichen Größen:

$$(17) \quad F = 2 [\zeta_0 - (2 + H_0) f_1]; \quad H_0 = \delta_0^* / \delta_0^{**} = A_0 / B_0;$$

$$\zeta_0 = \left[\frac{\partial (u_0 / U_0)}{\partial (y / \delta_0^{**})} \right]_{y=0} = B_0 (\Phi_{0\eta\eta})_{\eta=0},$$

die Ableitungen nach ursprünglicher Variabel x umformt, so lassen sich die durch Aufspalten entstandenen Gleichungen, auf eine universelle Form zurückführen in dem Sinne, dass weder die endgültigen Differentialgleichungen, wie folgt:

$$(18) \quad \Phi_{0\eta\eta\eta} + \frac{1}{2B_0^2} [a_0 B_0^2 + (2 - b_0) f_1] \Phi_0 \Phi_{0\eta\eta} + \frac{f_1}{B_0^2} (1 - \Phi_{0\eta}^2) =$$

$$= \frac{1}{B_0^2} \sum_{k=1}^\infty \theta_k (\Phi_{0\eta} \Phi_{0\eta f_k} - \Phi_{0\eta\eta} \Phi_{0 f_k})$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 & \Phi_{1\eta\eta\eta} + \frac{1}{2B_0^2} [a_0 B_0^2 + (2-b_0)f_1] (\Phi_0 \Phi_{1\eta\eta} - \Phi_{0\eta} \Phi_{1\eta}) + \\
 (19) \quad & + \frac{1}{B_0^2} (a_0 B_0^2 - b_0 f_1) \Phi_{0\eta\eta} \Phi_1 + \frac{1}{2B_0^2} [a_0 B_0^2 + (2-b_0)f_1] (\eta - \Phi_0)_{\eta \rightarrow \infty} = \\
 & = \frac{1}{B_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k [\Phi_{0\eta f_k} \Phi_{1\eta} + \Phi_{0\eta} \Phi_{1\eta f_k} - \Phi_{0\eta\eta} \Phi_{1f_k} - \Phi_{0f_k} \Phi_{1\eta\eta} + (\Phi_{0f_k})_{\eta \rightarrow \infty}],
 \end{aligned}$$

noch die entsprechenden Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 (20) \quad & \eta = 0 : \Phi_0 = \Phi_{0\eta} = \Phi_1 = \Phi_{1\eta} = 0; \\
 & \eta \rightarrow \infty : \Phi_{0\eta} \rightarrow 1; \quad \Phi_{1\eta\eta} \rightarrow 1,
 \end{aligned}$$

von konkreten Daten spezieller Probleme abhängen.

3. Die universellen einparametrischen Lösungen

In erster Näherung wurden die einparametrischen Lösungen des Gleichungssystem (18), (19) und (20), berechnet, welche, unter folgenden Bedingungen

$$f_1 \neq 0; \quad f_2 = f_3 = \dots = 0; \quad \theta_1 = f_1 F; \quad \theta_2 = \theta_3 = \dots = 0,$$

vermittels entsprechender universellen Gleichungen

$$\begin{aligned}
 & \Phi_{0\eta\eta\eta}^{(1)} + \frac{1}{2B_0^2} [a_0 B_0^2 + (2-b_0)f_1] \Phi_0^{(1)} \Phi_{0\eta\eta}^{(1)} + \frac{f_1}{B_0^2} (1 - \Phi_{0\eta}^{(1)}) = \\
 (21) \quad & = \frac{Ff_1}{B_0^2} (\Phi_{0\eta}^{(1)} \Phi_{0\eta f_k}^{(1)} - \Phi_{0\eta\eta}^{(1)} \Phi_{0f_k}^{(1)}); \\
 & \eta = 0 : \Phi_{0\eta}^{(1)} = \Phi_{0\eta}^{(1)} = 0; \quad \eta \rightarrow \infty : \Phi_{0\eta}^{(1)} = 1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Phi_{1\eta\eta\eta}^{(1)} + \frac{1}{2B_0^2} [a_0 B_0^2 + (2-b)f_1] (\Phi_0^{(1)} \Phi_{1\eta\eta}^{(1)} - \Phi_{0\eta}^{(1)} \Phi_{1\eta}^{(1)}) + \\
 & + \frac{1}{B_0^2} (a_0 B_0^2 - b_0 f_1) \Phi_{0\eta\eta}^{(1)} \Phi_1^{(1)} + \frac{1}{2B_0^2} [a_0 B_0^2 + (2-b_0)f_1] (\eta - \Phi_0^{(1)})_{\eta \rightarrow \infty} = \\
 (22) \quad & = \frac{1}{B_0^2} Ff_1 [\Phi_{0\eta f_1} \Phi_{1\eta}^{(1)} + \Phi_{0\eta}^{(1)} \Phi_{1\eta f_1}^{(1)} - \Phi_{0\eta\eta}^{(1)} \Phi_{1f_1}^{(1)} - \Phi_{0f_1}^{(1)} \Phi_{1\eta\eta}^{(1)} + (\Phi_{0f_1}^{(1)})_{\eta \rightarrow \infty}; \\
 & \eta = 0 : \Phi_1^{(1)} = \Phi_{1\eta}^{(1)} = 0; \quad \eta \rightarrow \infty : \Phi_{1\eta\eta}^{(1)} \rightarrow 1,
 \end{aligned}$$

bestimmt sind. Nämlich, das erste die drehungsfreie Grundströmung bestimmende nichtlineare Gleichungssystem (21) hat Saljnikov noch in der Arbeit [16] gelöst. Dabei hat man für numerische Integration dieses unabhängigen Systems, als auch des zweiten linearen von (21) abhängigen Systems (22), ein von Simuni und Terentiew entwickelte [17] und auf der Differenzenmethode mit implizitem Schema beruhende Verfahren (sogenanntes „Progonka“-Verfahren) benutzt.

Dementsprechend hat man durch den Ansatz $\varphi_0 = \Phi_{0\eta}$ die Ordnung des Differentialgleichungssystems (21) für eins erniedrigt, wobei nach seiner Lösung,

die Bestimmung der universellen dimensionlosen Stromfunktion Φ_0 selbst, durch die numerische Berechnung des Integrals

$$(23) \quad \Phi_0 = \int_0^{\eta} \varphi_0 d\eta$$

erreicht wurde. Ebenso wird die Ordnung des Systems (22) durch den Ansatz $\varphi_1 = \Phi_{1,\eta}$ erniedrigt, wobei man nach seiner Lösung, die Stromfunktion Φ_1 durch die numerische Integration des Ausdrucks

$$(24) \quad \Phi_1 = \int_0^{\eta} \varphi_1 d\eta$$

berechnet. In beiden Fällen hat dieses Verfahren einen iterativen Charakter. Das heisst, dass bei der Integrationdurchführung, als Werte für die nichtlinearen bzw. unbekannten Glieder, diejenigen aus der vorhergehende Iteration benützt werden. Für die erste Iteration dabei verwendet man die durch eine lineare Extrapolation berechneten Werte, die im Falle der ersten Schichtberechnung ($f_1=0$) dagegen, willkürlich angenommen werden müssen. Es soll noch hinzugefügt werden dass man das Gleichungssystem (22), mit Rücksicht auf die guten, bis jetzt unseres Wissens unübertroffenen Resultate, die im drehungsfreien Fall der Kreiszylinderumströmung mittels der einparametrischen Lösungen des Systems (21), im Vergleich mit exakten Terrill'schen Resultaten, erreicht wurden [16], mit den gleichen Konstantenwerte $a_0=0.4408$; $b_0=5.7140$ integriert hat.

Was die Integration selbst in die Richtung der η - Achse betrifft, soll man bemerken, dass sie im Falle des Systems (21) von 1 bis n mit gleichem Schritt $\Delta\eta$ durchgeführt wurde. Im Falle des Systems (22), aber, um das Verfahren an die dem äusseren Grenzschichttrand entsprechende Randbedingung besser anzupassen wurden die Berechnungen zunächst von 1 bis n (s. Abb. 2) mit dem Schritt $\Delta\eta$, und dann von n bis n_1 mit grösserem Schritt $\Delta\eta_1$ ausgeübt. Dabei hat man an der charakteristischen Grenzschichtfunktionen F , ζ_0 , H_0 , die für

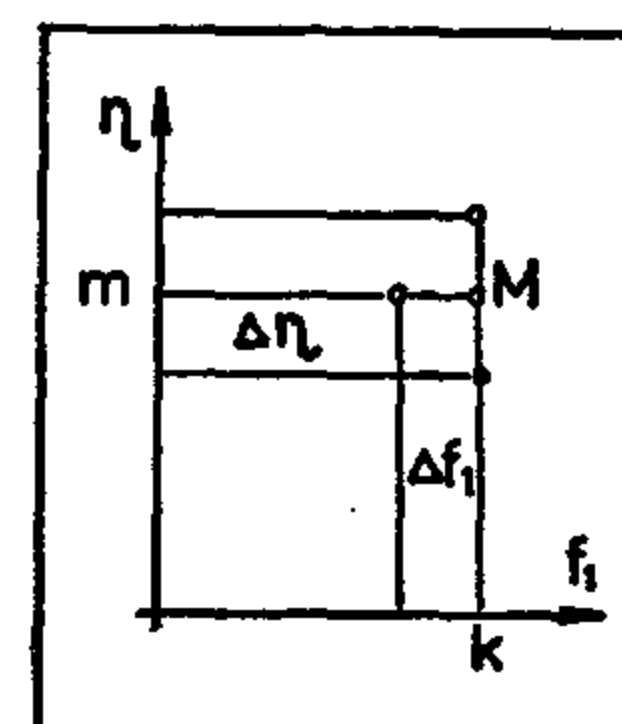


Abb. 2

							T-1
F_1	$F_1/B \cdot B$	FD 0 (0)	B	A	FD1 (0)	B_1	A_1
0.0000	0.0000	0.2205	1.0001	2.5915	3.1256	-0.1295	-16.3035
0.0100	0.0100	0.2375	1.0002	2.5397	2.8213	0.0750	-14.1307
0.0200	0.0200	0.2541	1.0010	2.4929	2.5622	0.2832	-12.3048
0.0300	0.0299	0.2701	1.0025	2.4506	2.3375	0.5015	-10.7303
0.0400	0.0396	0.2856	1.0048	2.4127	2.1395	0.7389	-9.3369
0.0500	0.0492	0.4005	1.0084	2.3792	1.9625	1.0087	-8.0669
0.0600	0.0584	0.4147	1.0138	2.3509	1.8015	1.3338	-6.8630
0.0700	0.0670	0.4278	1.0220	2.3295	1.6515	1.7637	-5.6447
0.0800	0.0745	0.3390	1.0360	2.3202	1.5032	2.4585	-4.2050
-0.0100	-0.0100	0.2029	1.0001	2.6483	3.4848	-0.3245	-18.9035
-0.0200	-0.0200	0.1845	1.0006	2.7118	3.9243	-0.3089	-22.0086
-0.0300	-0.0299	0.1654	1.0015	2.7834	4.4791	-0.6241	-26.2904
-0.0400	-0.0388	0.1453	1.0025	2.8653	5.2144	-0.8546	-32.1126
-0.0500	-0.0496	0.1238	1.0037	2.9612	6.2507	-0.5125	-40.0503
-0.0600	-0.0594	0.1004	1.0050	3.0778	7.8692	-0.9632	-54.2363
-0.0600	-0.0692	0.0737	1.0061	3.2296	10.9685	-0.5598	-82.9265
-0.0800	-0.0787	0.0388	1.0079	3.4755	22.0824	-0.2137	-195.7391

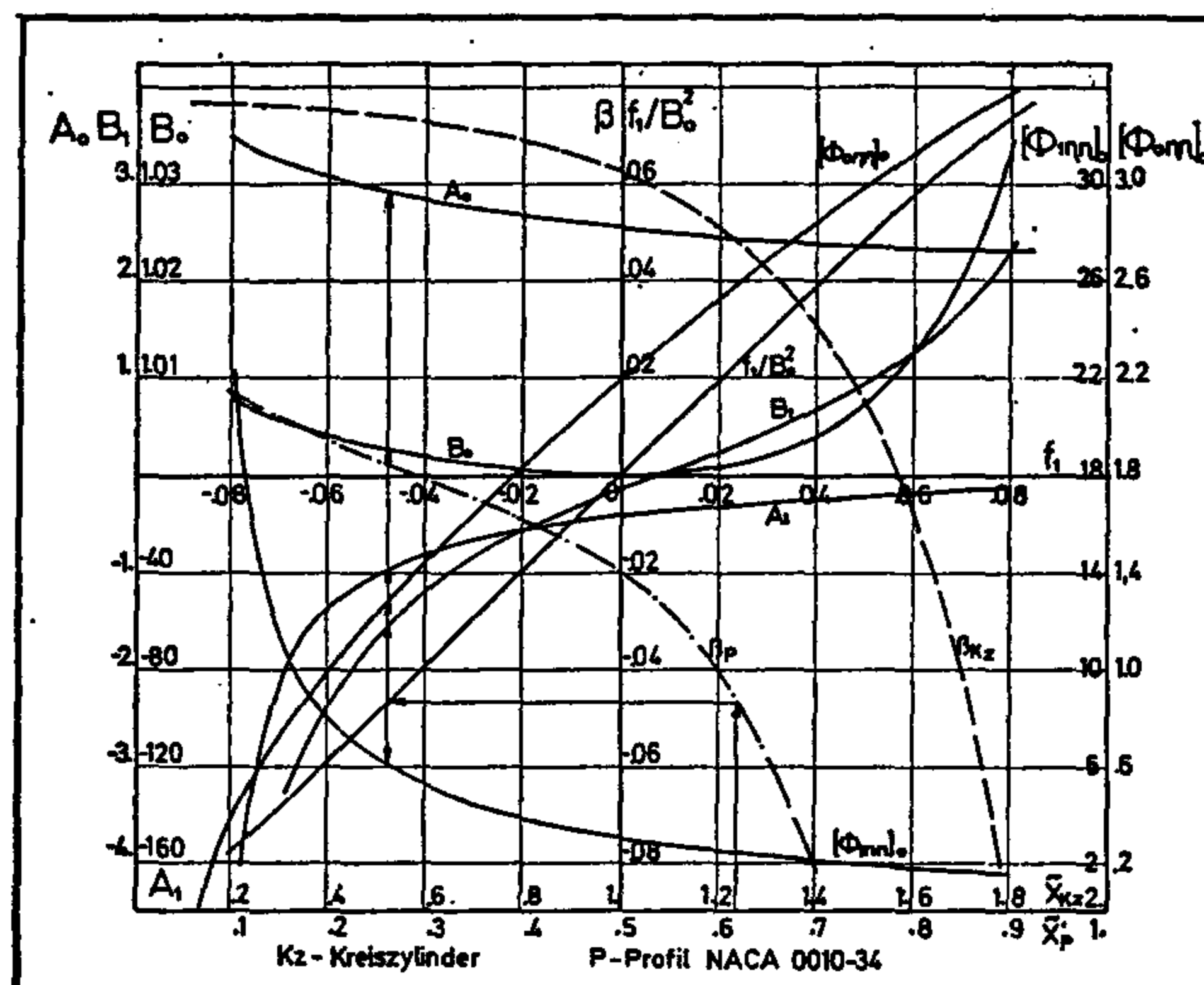


Abb. 3

die Berechnung der Verdrängungsdicke δ^* , der Impulsverlustdicke δ^{**} und der Wandschubspannung τ_w notwendigen universellen Verteilungen $A_0, A_1, B_0, B_1, (\Phi_{0\eta\eta})_0, (\Phi_{1\eta\eta})_0$ und f_1/B_0^2 vertafelt (s. T-1) und auf der Abb. 3 graphisch dargestellt.

Es soll bemerkt werden dass die dargelegte Integration auf der Rechenanlage ICL 1901A der Fakultät für Maschinenbau/Beograd durchgeführt wurde.

4. Beispiele

Für die weitere Anwendung der erhaltenen universellen Lösungen auf die konkreten Strömungsfälle werden die folgenden dimensionlosen Größen eingeführt:

— die Geschwindigkeiten (12)

$$(25) \quad \tilde{U} = U_0/U_\infty; \quad \tilde{u} = u/U_\infty,$$

mit

$$\tilde{x} = x/l \quad Re_\infty = U_\infty l/\nu;$$

— die Verdrängungsdicke (13)

$$(26) \quad \tilde{\delta}^* = \frac{\delta^* (Re_\infty)^{1/2}}{l} = \tilde{U}_0^{-b_0/2} (a_0 \int_0^{\tilde{x}} \tilde{U}_0^{b_0-1} d\tilde{x})^{1/2} (A_0 \pm \Omega A_1);$$

— die Impulsverlustdicke (14)

$$(27) \quad \tilde{\delta}^{**} = \frac{\delta^{**} (Re_\infty)^{1/2}}{l} = \tilde{U}_0^{-b_0/2} (a_0 \int_0^{\tilde{x}} \tilde{U}_0^{b_0-1} d\tilde{x})^{1/2} (B_0 \pm \Omega B_1);$$

— die Wandschubspannung

$$(28) \quad \tilde{\tau}_w = \frac{\tau_w l}{\mu U_\infty (Re_\infty)^{1/2}} = \frac{\tilde{U}_0^{1+b_0/2}}{(a_0 \int_0^{\tilde{x}} \tilde{U}_0^{b_0-1} d\tilde{x})^{1/2}} (\Phi_{0\eta\eta} \pm \Omega \Phi_{1\eta\eta})_{\eta=0} \text{ und}$$

– die Drehungszahl (11)

$$(29) \quad \Omega = \tilde{U}_0^{-(1+b_0/2)} \left(a_0 \int_0^{\tilde{x}} \tilde{U}_0^{b_0-1} d\tilde{x} \right)^{1/2} \Omega_0, \text{ und } \Omega_0 = 2 \omega l / U_\infty (Re_\infty)^{1/2}$$

Als erste Beispiel für das dargelegte Verfahren hat man den zum Vergleich verschiedener Resultate in Literatur als charakteristisch und geeignet geltenden Fall der Kreiszylinderumströmung behandelt. Die entsprechenden Berechnungen hat man mit folgender Geschwindigkeitsverteilung

$$(30) \quad \tilde{U}_0 = 2 \sin \tilde{x} \text{ mit } \tilde{x} = x/R \text{ und } Re_\infty = U_\infty R/\nu$$

durchgeführt. Dabei hat einziger beibehaltenen Formparameter der Menge (15)

$$(31) \quad f_1 = a_0 B_0^2 \frac{U_0'}{U_0^{b_0}} \int_0^x U_0^{b_0-1} dx,$$

der die Lösung entsprechender Impulsgleichung eigentlich darstellt, in folgender dimensionloser Form

$$(32) \quad \frac{f_1}{B_0^2} = a_0 \frac{\tilde{U}_0'}{\tilde{U}_0^{b_0}} \int_0^{\tilde{x}} \tilde{U}_0^{b_0-1} d\tilde{x} = \beta(\tilde{x})$$

ausgedrückt, die verbindende Rolle, wie bekannt aus der Arbeit [16], zwischen den universellen einparametrischen in der T-1 vertafelten Lösungen (vermittels der Verteilung f_1/B_0^2) und den durch $\beta(\tilde{x})$ ausgedrückten speziellen Daten des betrachteten Strömungsfalles spielt. Dies ist auf der Abb. 3 für einen willkürlich ausgewählten Grenzschichtquerschnitt bzw. Koordinate $\tilde{x}_0$, durch die Pfeilrichtungen übersichtlich gezeigt. Es soll hier betont werden, dass damit die nachträgliche Integration der Impulsgleichung, die bei der Anwendung der Methode von Loitsianski (15), in ihrer ursprünglicher Form, unentbehrlich ist, in unserem Falle unnötig wird.

Die an Hand der Ausdrücke (12) und (29) berechneten Geschwindigkeitsprofile hat man auf Abb. 4 und 5 dargestellt. Nämlich, auf Abb. 4 wurde zunächst seine Entwicklung für verschiedene Formparameterwerte und eine feste, dem Rückenteil des Profils entsprechende, negative Drehungszahl $\Omega_0 = -0.06$ gezeigt. Auf Abb. 5 dagegen, variiert man die Drehungszahl Ω_0 , während der als Beispiel ausgewählten Formparameterwert $f_1 = 0$ (bzw. $\tilde{x} = 1,571$) unverändert bleibt. Die vermittels der Formeln (26), (28), (29) berechneten entsprechenden Verteilungen der Verdrängungsdicke δ^* und der Wandschubspannung $\tilde{\tau}_w$ sind für verschiedene Drehungszahlwerte Ω_0 auf den Abb. 6 und 7 gezeigt.

Um die Anwendung des entwickelten Verfahrens auf die Grenzschichtberechnungen in radialen Strömungsmaschinen vorführen zu können, hat man als nächste Beispiel die Umströmung einer Schaufel in Form passendes normierten Profils NACA 0010-34 gewählt. Dabei hat man die Daten über die Profilform und die entsprechende Geschwindigkeitsverteilung $\tilde{U}_0(\tilde{x})$ (s. Abb. 8) längst der Kontur aus der NACA-Profilesammlung von Abbott und von Doenhoff [18]

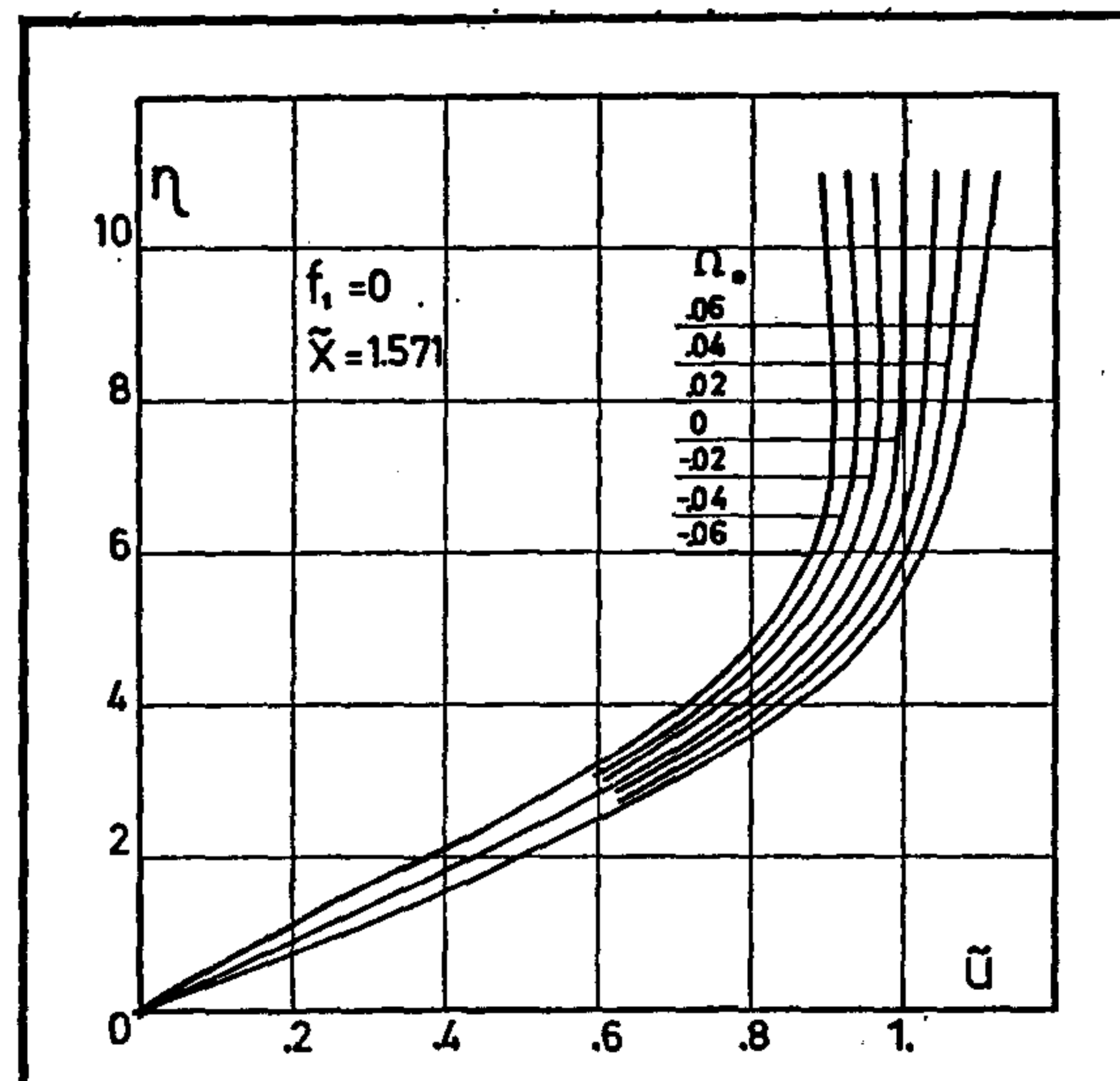


Abb. 4

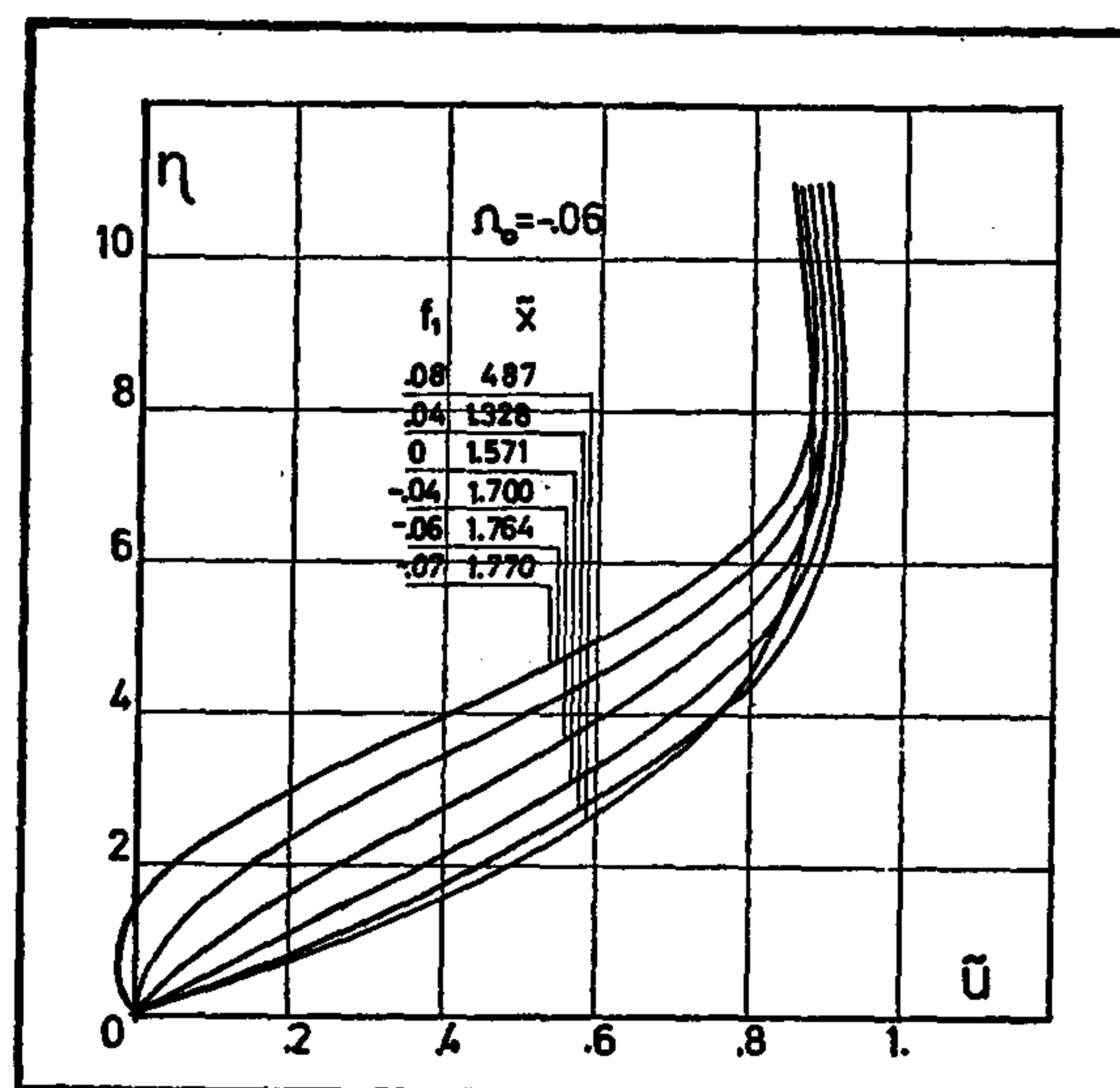


Abb. 5

übernommen. Auf Grund dieser konkreten Daten und der in T-1 vertafelten universellen Lösungen hat man analog zum vorhergehenden Beispiel die Verteilungen der Verdrängungsdicke $\tilde{\delta}^*$ und der Wandschubspannung $\tilde{\tau}_w$ berechnet und für verschiedene Drehungszahlwerte Ω_0 auf den Abb. 9 und 10 graphisch dargestellt.

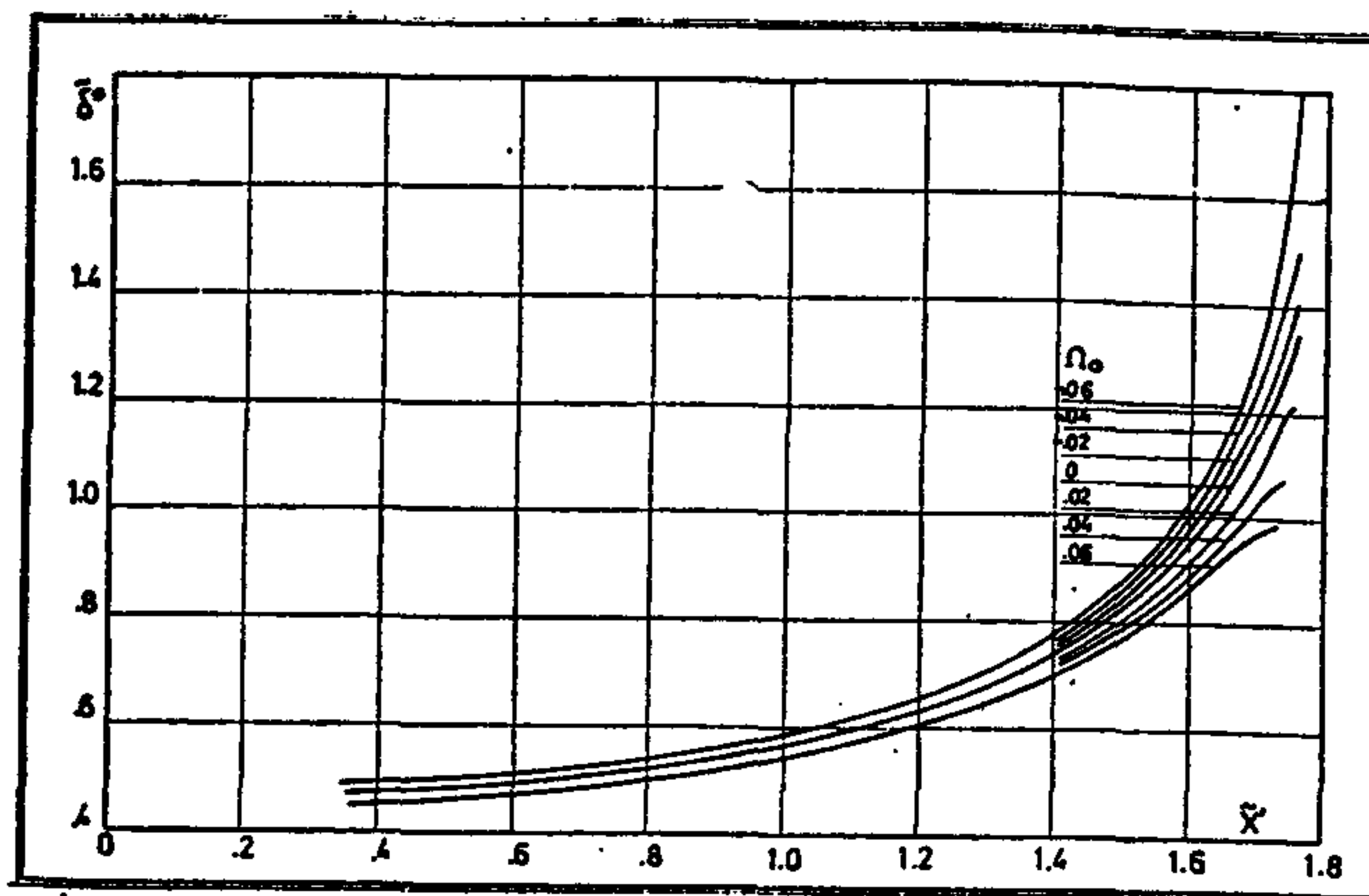


Abb. 6

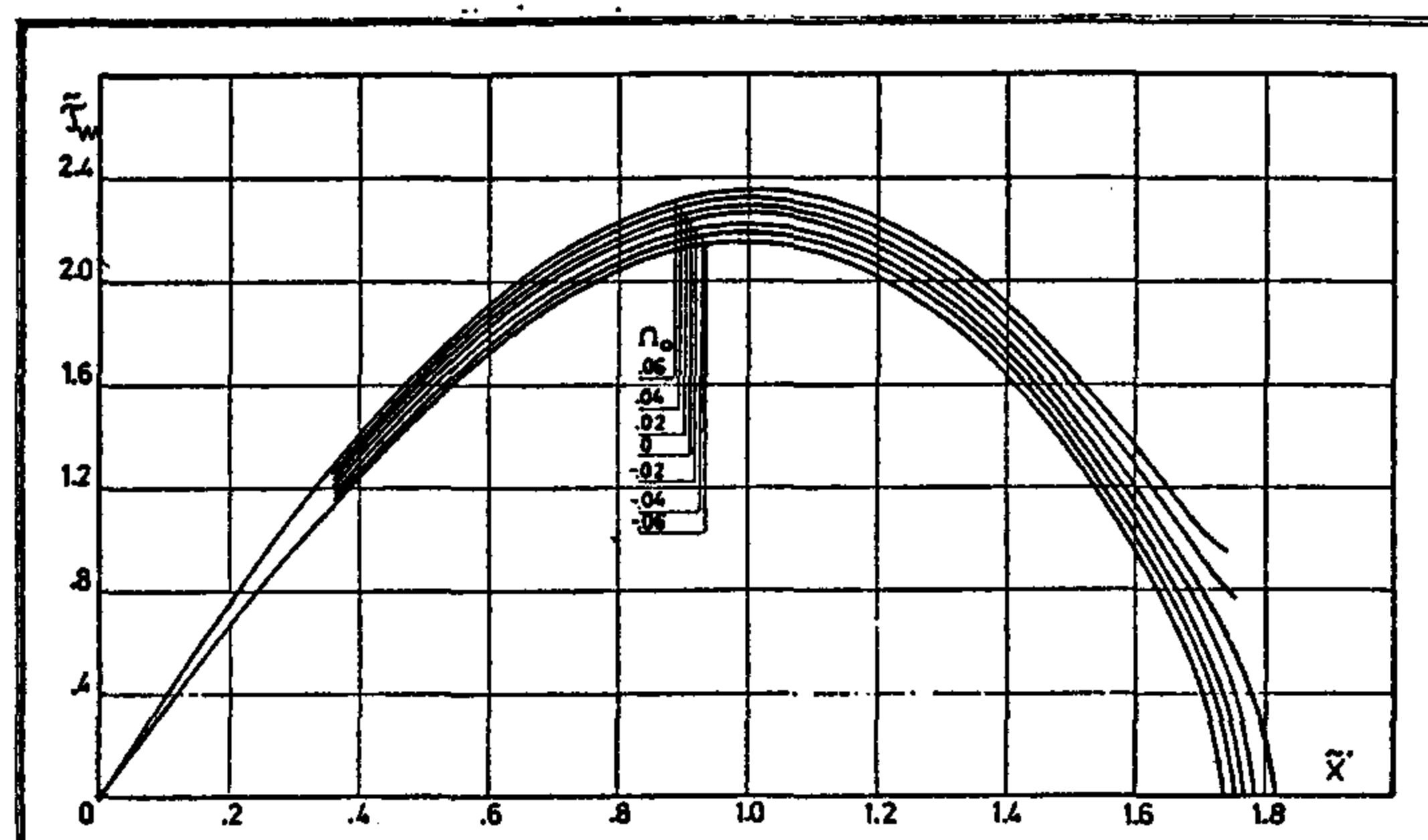


Abb. 7

Es soll noch bemerkt werden, dass für die Durchführung obiger Berechnungen auf der früher erwähnten Rechanlage eine Reihe von verschiedenen Programme entwickelt wurde, und man hat ausserdem alle universellen Lösungen auf die Dauer memorieren lassen. Damit ist die weitere Anwendung dieser Resultate auf die Berechnung anderer konkreten Strömungsfälle betrachtetes Problems ermöglicht.

5. Drehungseinfluss auf die Grenzschichtentwicklung

Der Drehungseinfluss auf die Grenzschichtentwicklung kann man auf Grund von Abb. 4,5,6,7,9 und 10 verfolgen. Die, auf diesen Diagrammen dargestellten Verteilungen, deuten zunächst auf die Tatsache hin, dass die Drehung die dem Brustteil bzw. Rückenteil des Profils zugehörnden charakteristischen Grenzschichtgrössen verschiedentlich beeinflusst. Im Vergleich zum drehungsfreien Falle, nämlich,

nimmt die Verdrängungsdicke $\tilde{\delta}^*$ auf dem Brustteil rotierender Profile ab (s. Abb. 6 und 9) bzw. die Wandschubspannung $\tilde{\tau}_w$ zu (s. Abb. 7 und 10), während auf dem Rückenteil die umgekehrten Effekte festgestellt sind. Diese Erscheinung, welche durch die Zunahme der äusseren Geschwindigkeit auf dem Brustteil und die Abnahme auf dem Rückenteil des Profils, bzw. durch die entsprechende Änderung der lokalen Re-Zahlen zu erklären ist, wird mit der Steigerung der Umdrehungsgeschwindigkeit in beiden Profilfällen immer ausdrückvoller.

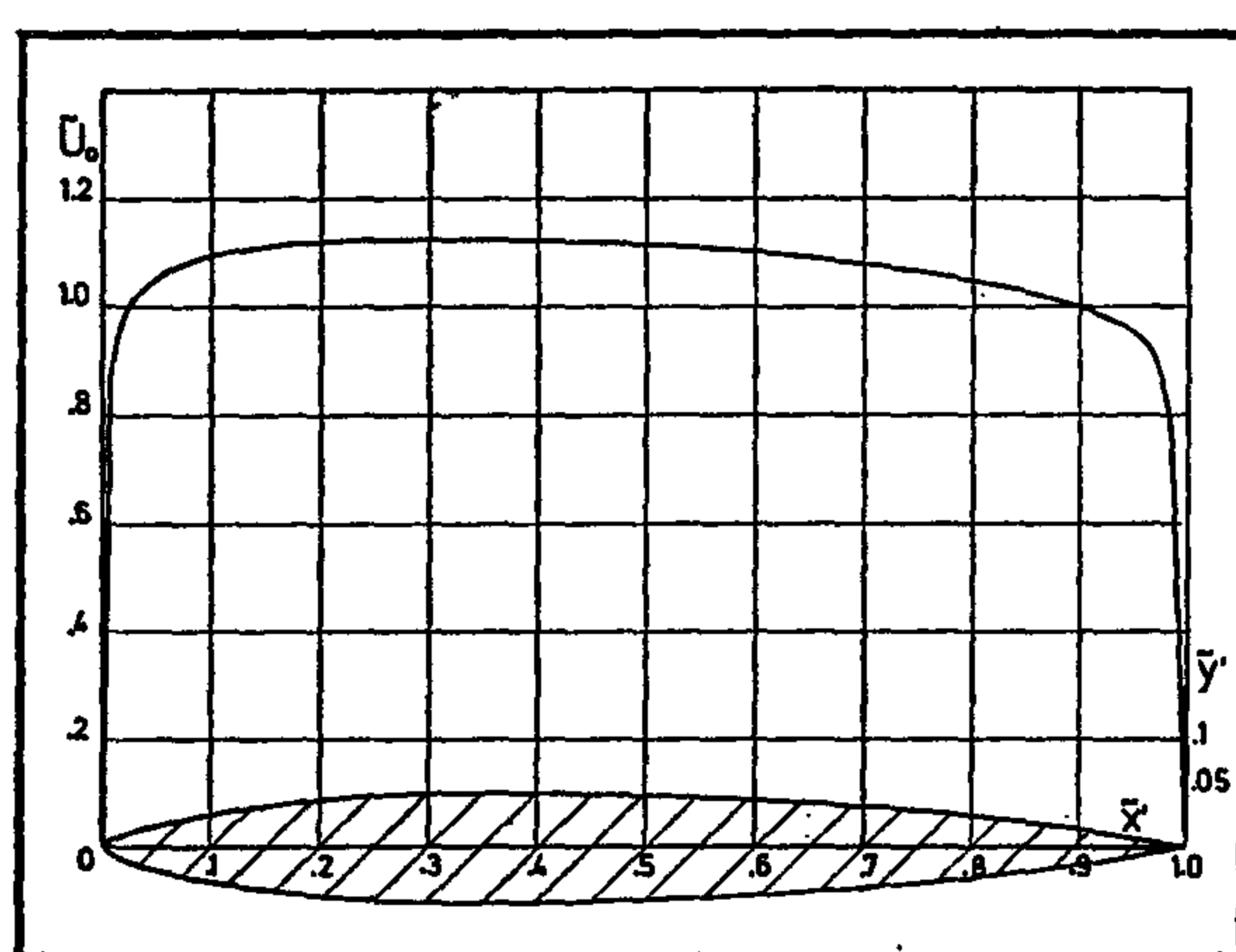


Abb. 8

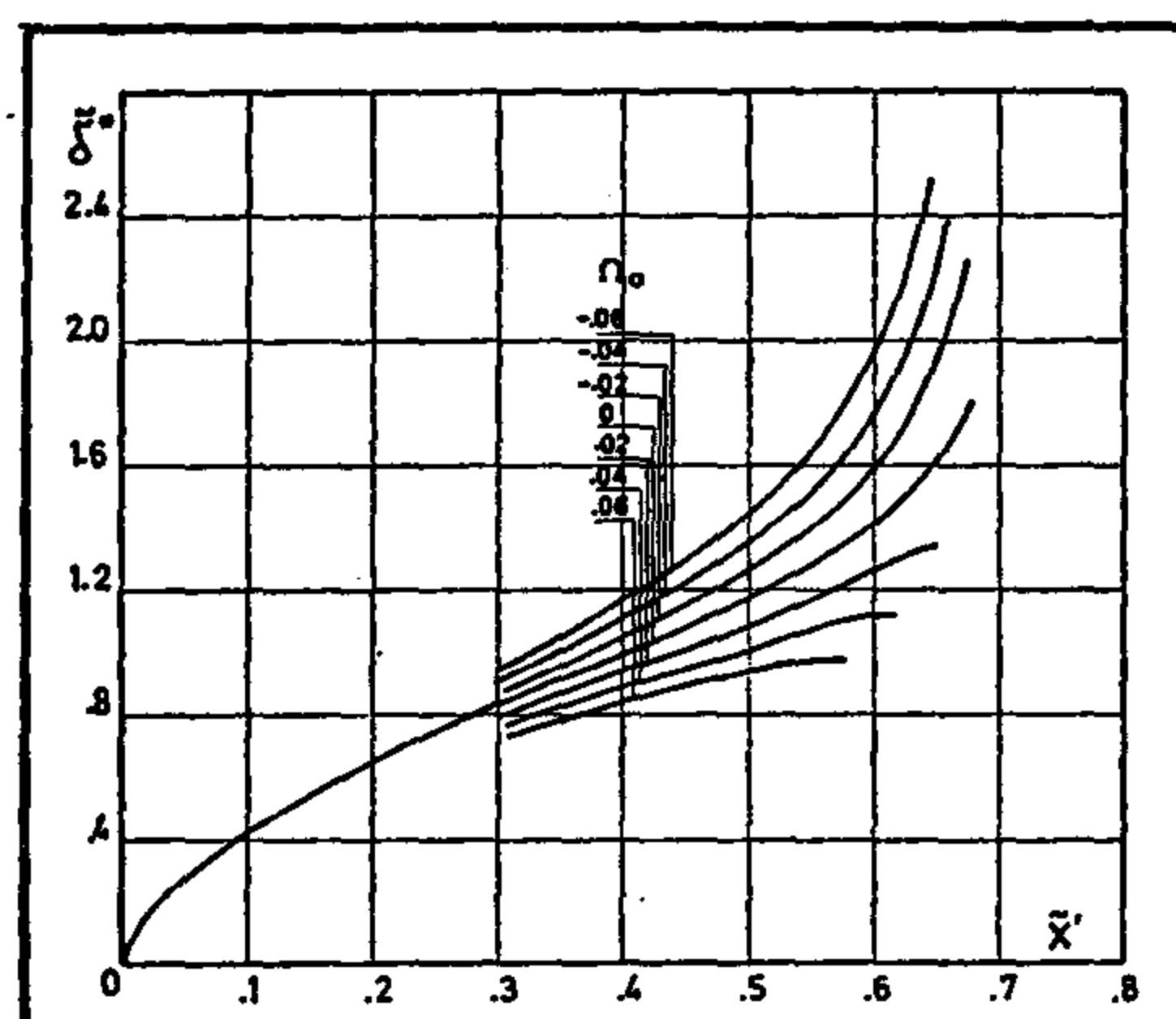


Abb. 9

Aus der Abb. 6 und 9 folgt weiter, dass die Drehungswirkung auf dem Rückenteil grösser als auf dem Brustteil des Profils ist und dass sie mit der Annäherung zum Ablösungspunkt immer zunimmt. Dies sieht man, nämlich, leicht aus der für eine bestimmte Drehungszahländerung $\Delta \Omega_0$ festgestellten absoluten Werte der im Vergleich mit dem drehungsfreien Falle ($\Omega_0=0$) aufgetretenen Ver-

drängungsdickeabweichungen $\Delta \delta^*$. Auf Grund dieser Gegenüberstellung kann man ausserdem schliessen dass die Drehungszahländerung auf die dem schlankeren Profil, NACA 0010-34 entsprechende dickere Grenzschicht bedeutend mehr, als auf die dem Kreiszylinder zugehörige schmalere Grenzschicht wirkt.

Was den Drehungseinfluss auf die Ablösungspunktlage betrifft, so kann man vermittle der Wandschubspannungsverteilungen (s. Abb. 7 und 10) feststellen, dass bei der Steigerung der Drehungszahl Ω_0 (bzw. der Winkelgeschwindigkeit ω) der Ablösungspunkt sich längs der Profilkontur verschiebt. Nämlich, auf dem Profilrückenteil-aufwärts und auf dem Brustteil-abwärts; und zwar in letztem Falle bedeutend mehr. Längs der Kreiszylinderkontur, z. B., verschiebt sich der

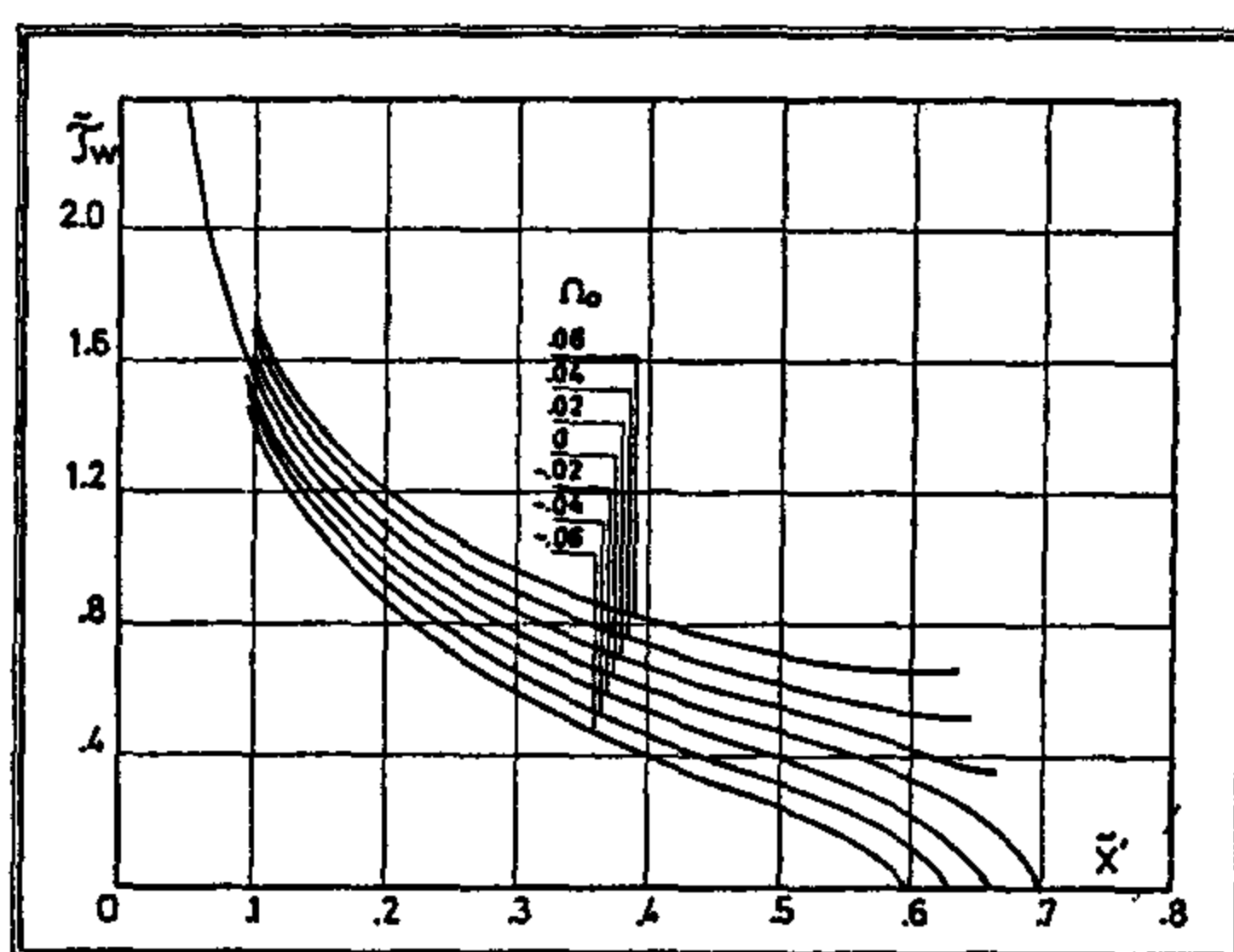


Abb. 10

Ablösungspunkt, im Falle der absoluten Drehungszahlwerte $|\Omega_0| = 0.02$, auf dem Rückenteil für 0.64° aufwärts, und auf dem Brustteil für 1.74° abwärts. Muss man betonen, dass diese Tendenz für das betrachtete NACA-Profil auch gilt. Dabei tritt auf dem Brustteil für die hinreichend grossen Drehungszahl Ω_0 (s. Abb. 7 und 10) die Grenzschichtablösung sogar überhaupt nicht auf. Alle diese Erscheinungen sind andererseits, wie bekannt, bei den experimentellen Untersuchungen auch nachgewiesen.

Literatur

- [1] Jungclaus, G. *Grenzschichtuntersuchungen in rotierenden Kanälen und bei scheinenden Strömungen*, MPI-Mitteilungen, Göttingen, 1955, N° 11, pp. 67
- [2] Yen, K., T., *Approximate Solutions of the Incompressible Laminar Boundary Layer Equations for a Flat Plate in shear Flow*, J. Aeronautical Sci., 1955, V-22, N° 10, pp. 728—730.
- [3] Li, T., Y., *Simple Shear Flow past a Flat Plate in an incompressible Fluid of Small Viscosity*, J. Aeronautical Sci., 1955, V-22, N° 9, pp. 651—652.
- [3a] Li, T., Y., *Simple Shear Flow past a Flat Plate on a Compressible Viscous Fluid*, J. Aeronautical Sci., 1955, V-22, N° 10, pp. 724—725.
- [4] Li, T., Y., *Effects of Free-Stream Vorticity on the Behaviour of a Viscous Boundary Layer*, J. Aeronautical Sci., 1956, V-23, N° 12, pp. 1128—1129.
- [5] Li, T., Y., *Author's Reply*, J. Aeronautical Sci., 1957, V-24, N° 11, pp. 849—850.
- [6] Glaupert, M., B., *The Boundary Layer in Simple Shear Flow Past a Flat Plate*, J. Aeronautical Sci., 1957, V-24, N° 11, pp. 848—849.

- [7] Jungclaus, G., *Some Remarks on the Controversy Regarding Boundary Layer on Shear Flow*, J. Aero/Space Sci, 1959, V-26, No 12, pp. 844.
- [8] Murray, J., D., *The boundary layer on a flat plate in a stream with uniform shear*, J. Fluid. mech., V—11, pp. 309—317.
- [9] Saljnikov, V., *Entwicklung einer Reihemethode zur Berechnung laminarer inkompressibler Grenzschichten bei Strömungen um eine krummlinige Wand mit konstanter Drehung*, ZAMM, 1962, V—42, pp. 155—159.
- [10] Saljnikov, V., *Die „Ähnlichen“ Lösungen der Grenzschichtgleichungen für den Fall der zusammen mit der Grundströmung gleichmässig schnellrotierenden Schaufeln*, Publ. Inst. Math., 1965, T. 5 (19), pp. 79—84.
- [11] Saljnikov, V., Đordjević, V., *An Equation of Theory of the Boundary Layer on Rotating Airfoils*, AIAA Journal, 1968, V—6, No 8, pp. 1567—1568.
- [12] Halleen, R., M., Johnston, J., P., Reynolds, W., C., *The Laminar Boundary Layer on a Rotating Circular Arc. Blade*, Trans. ASME, 1966, D—88, No 1, pp. 111—120.
- [13] Салъников, В., Ђорђевић В., *Универзализације једначине граничног слоја за случај једнолико-брзоротирајућих контура*, Зборник радова посвећен преминулом академику Јакову М. Хлигчијеву, Београд, 1970., стр. 344—348.
- [14] Saljnikov, V., Pavlović, M., *Grenzschicht an einem zusammen mit der Grundströmung gleichmässig schnellrotierenden Profil*, Rad saopšten na Kongresu GAMM, Graz, 1976.
- [15] Лойцянский, Л., Г., *Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя*, ПММ, 1965, т. 29, № I, стр. 70—87.
- [16] Saljnikov, V., *A Contribution to universal solutions of the Boundary Layer Theory*, Теорјска и применјена механика, 1978., V—4, стр. 139—163.
- [17] Симунџи, Л., М. и Терентьев, Н., П., *Численное решение уравнений однопараметрической теории пограничного слоя*, Труды ЛПИ, 1965, № 248, стр. 56—58.
- [18] Abbott, J., H., Von Doenhoff, A., E., *Theory of Wing Section*, Dover. Publ., New York, 1959.