

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛАМИНАРНОГО ГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ  
 ОБТЕКАНИИ СЖИМАЕМЫМ ФЛЮИДОМ ДЛЯ КОНКРЕТНЫХ  
 ПРАКТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ**

*М. Мирчевски*

(Сообщено 9 ноября 1977)

В статье В. Сальникова и З. Боричич [2] получена система универсальных дифференциальных уравнений для определения ламинарного граничного слоя при обтекании сжимаемым флюидом большими скоростями. Эта система уравнений решена методом математических вычислений в так называемом локально-параметрическом приближении т.е. при  $f_0 \neq 0, f_1 \neq 0, f_2 = f_3 = \dots = 0, \frac{\partial}{\partial f_0} = 0$ . Программу составил З. Боричич. Система универсальных уравнений в локально-двухпараметрическом приближении будет:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^3 \Phi^{(2)}}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2B^2} [a_0 B^2 + f_1 (2-b)] \Phi^{(2)} \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[ 1 + S - \left( \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\
 & = \frac{F^{(2)} \cdot f_1}{B^2} \left( \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial \eta \partial f_1} - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial f_1} \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial \eta^2} \right), \\
 (1) \quad & \frac{\partial^2 S^{(2)}}{\partial \eta^2} + \frac{Pr}{2B^2} [a_0 B^2 + f_1 (2-b)] \Phi^{(2)} \frac{\partial S^{(2)}}{\partial \eta} + 2(Pr-1)f_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial \eta^2} \right) = \\
 & = Pr \cdot \frac{F^{(2)} \cdot F_1}{B^2} \left( \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial S^{(2)}}{\partial f_1} - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial S^{(2)}}{\partial \eta} \right).
 \end{aligned}$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 & \eta = 0 : \Phi^{(2)} = \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \eta} = 0, \quad S^{(2)} = S_w \\
 & \eta \rightarrow \infty : \Phi_\eta^{(2)} = 1, \quad S^{(2)} = 0. \\
 (2) \quad & f_0 \neq 0; \quad f_1 = f_2 = \dots = 0; \quad \Phi^{(2)} = \Phi_0, \quad S^{(2)} = \Phi_0, \quad S^{(2)} = S_0.
 \end{aligned}$$

Здесь:

- $\eta$  — приведенная поперечная координата  
 $X$  — координата абсцисс Стюартсона  
 $U(X, \eta)$  — скорость в граничном слое по Стюартсону  
 $U_e(X, \eta)$  — скорость на внешней границе пограничного слоя по Стюартсону  
 $f_0$  — параметр сжимаемости, нулевой параметр  
 $f_1$  — первый параметр  
 $\Phi(f_1, \eta)$  — приведенная функция тока  
 $S(f_1, \eta)$  — приведенная тепловая функция

По [2] решение системы дифференциальных уравнений [1] с граничными условиями (2), для следующих величин  $S_w=0,4$ ;  $P_r=0,72$ ;  $f_0=0,5$ ;  $f_1=0,95$ ;  $a_0=0,4408$ ; и  $b=5,714$  сравнивая с похожим решением дифференциальных уравнений выведенными С. Капустянским они не отличаются. Преимущество полученной универсальной системы уравнения В. Сальникова и З. Боричича в сравнении с системой С. Капустянского состоит в том что нет необходимости решать никаких дополнительных дифференциальных уравнений.

В статье для системы уравнений (1) с граничными условиями (2), на электронно-счетной машине ИБМ 370, в „СОК“ г. Скопье, получены результаты для следующих входных величин:

$$S_w = 1,0; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2; 0,0; -0,2; -0,4; -0,6;$$

$$-0,8; -1,0 \cdot f_0 = 0,5; P_r = 0,72; a_0 = 0,4408; b = 5,714;$$

Здесь:

- $S_w$  — тепловая функция стенки  
 $P_r=0,72$  — число Прантла для воздуха  
 $a_0=0,4408$  } — постоянные  
 $b=5,714$  }

Результаты с помощью которых определяются характеристики ламинарного динамического и термического граничного слоя, затабулированы на всегда и приведены на более чем 20-ти страницах докторской диссертаций [3].

Сдесь приведены те же, только для  $S_w=0,49$ .

Такой широкий диапазон табулированных результатов для отдельных значений тепловой функции  $S_w$  позволяют:

— С помощью их интерполяции возможно получение табулярных результатов для любой исследуемой проблемы тепловая функция которой находится в интервале от 1 до  $-1$ .

— Сравнивать полученные характерные величины с соответствующими полученными другими методами.

В системе уравнений (1) очевидно применение координат Стюартсона т.е. полученные результаты не относятся к действительному флюиду а к фиктивному.

Чтобы получить действительные величины для исследуемого флюида (воздуха) необходимо найти связь между действительными величинами и величинами Стюартсона. Для получения действительных величин ламинарного динамического и термического граничного слоя необходимо найти следующие зависимости:

$$X = X(x), \quad U_e = f(U_e(x)), \quad \beta(x), \quad \tau_w(x) \text{ и } Nu(x).$$

Определение этих зависимостей приведено в [3]. Получены следующие конечные уравнения:

$$(3) \quad X = \int_0^x \left(1 - \frac{u_e^{*2}}{C}\right)^{\frac{3x-1}{2(x-1)}} dx$$

где:

$$(4) \quad u_e^* = \frac{u_e}{u_\infty}, \quad C = 1 + \frac{2}{(x-1)M_\infty^2}.$$

$$U_e = \left(1 - \frac{u_e^{*2}}{C}\right)^{-1/2} \cdot u_e = \chi_e^{-1/2} \cdot u_e$$

$$(5) \quad \beta(x) = \frac{a_0 \cdot U_e' \int_0^x U_e^{b-1}(X) dX}{U_e^b}$$

$$(6) \quad \tau_w(x) = \mu_1 \cdot \chi_e^{\frac{3x-1}{x-1}} \cdot \frac{U_e}{\sqrt{\frac{\nu_1 \cdot \beta(x)}{U_e'}}} \cdot \Phi_{\eta\eta}(0)$$

где:

$$\Phi_{\eta\eta}(0) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0}$$

$$(7) \quad Nu(x) = \frac{x \cdot \chi_e^{\frac{3x-1}{2(x-1)}} \cdot T_w \sqrt{\frac{U_e'}{\beta(x) \cdot \nu_1}} \cdot \zeta^*}{(T_w - T_\infty) \cdot (S_w + 1)^2} \cdot \frac{\zeta^*}{B}$$

где:

$$\zeta^* = B \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \quad B = \int_0^\infty \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right) d\eta$$

В этих уравнениях можно заметить сложность зависимостей в них. По ним сделана программа вычислений для определения действительных скоростей, действительных координат, тангенциального давления как и числа Нуселта по стенке любого обтекаемого тела с большими скоростями, здесь важно подчеркнуть, что вычислительная программа носит универсальный характер, как и подпрограмма с помощью которой производится интерполяция и нахождение производной любой непрерывной и дифференциальной графи-

чески данной функции. В этом случае такая графическая функция является действительная скорость исследуемого потока, полученная теоретическим или экспериментальным путем.

Вычислительная программа с подпрограммой приведены в [3].

В статье [4] даны теоретически полученные действительные скорости для обтекания дозвуковым потоком воздуха через радиальную компрессорную решетку.

В этой статье исследования проведены для коррегированных действительных скоростей, полученных из [4], при следующих рабочих режимах радиального компрессора.

$$\alpha_1=57,68^\circ \text{ и } \omega=1627,4 \text{ сек}^{-1}; \alpha_1=55^\circ \text{ и } \omega=1459,5 \text{ сек}^{-1};$$

$$\alpha_1=60^\circ \text{ и } \omega=1782,1 \text{ сек}^{-1}.$$

Исследования в этом случае имеют целью, в первую очередь определение точек отрыва ламинарного граничного слоя воздушного потока от контура исследуемой радиальной компрессорной решетки, как и возможные выводы можно из этого сделать.

В выше приведенных исследованиях рабочих режимов, расчеты произведены по выпуклой и вогнутой стороне. Таким образом всего получены шесть результатов. Эти расчёты проведены на электронно-счетной машине ИБМ 11/30 в счётно-вычислительном центре Электротехнического и механического факультетов в г. Скопье.

По этим результатам видно что значения тепловой функций на стенке лопатки будет:

$$S_w=0,49; \quad S_w=0,48; \quad S_w=0,47.$$

Теперь необходимы универсальные затабулированные величины полученные как решение в системе универсальных дифференциальных уравнений (1) с граничными условиями (2) для вышеупомянутых значения  $S_w$ . Их можно получить интерполяцией ранее полученных и затабулированных величин  $S_w$  т.е. между значениями  $S_w=0,4$  и  $S_w=0,6$ .

Имея данные для тех же значения тепловой функции (полученные различными путями), в дальнейшем расчёт сводится к выравниванию функции  $\beta(x)$  и  $f_1/B^2$  (см. В. Сальников [1]).

Определение точек отрыва ламинарного граничного слоя от контура лопатки произведено для трёх исследуемых случаев. Для первого случая показано на рис. 1 и рис. 2. Из графически полученных результатов легко увидеть характер обтекания (в смысле тенденции отрыва) по всей длине лопатки компрессора, как по выпуклой так и по вогнутой стороне. Точки отрыва воздушного потока от контура лопатки компрессора показаны на рис. 3.

При угле атаки  $\alpha_1=60^\circ$  и  $\omega=1782,14 \text{ сек}^{-1}$  точки отрыва находятся на следующих расстояниях измеренных от критической точки:

— на выпуклой стороне  $s=105,9$  мм, на рисунке обозначена цифрой 1'.

— на вогнутой стороне  $s=12,2$  мм, на рисунке обозначена цифрой 1.

При угле атаки  $\alpha_1 = 57,68^\circ$  и  $\omega = 1627,4 \text{ сек}^{-1}$  точки отрыва находятся на следующих расстояниях:

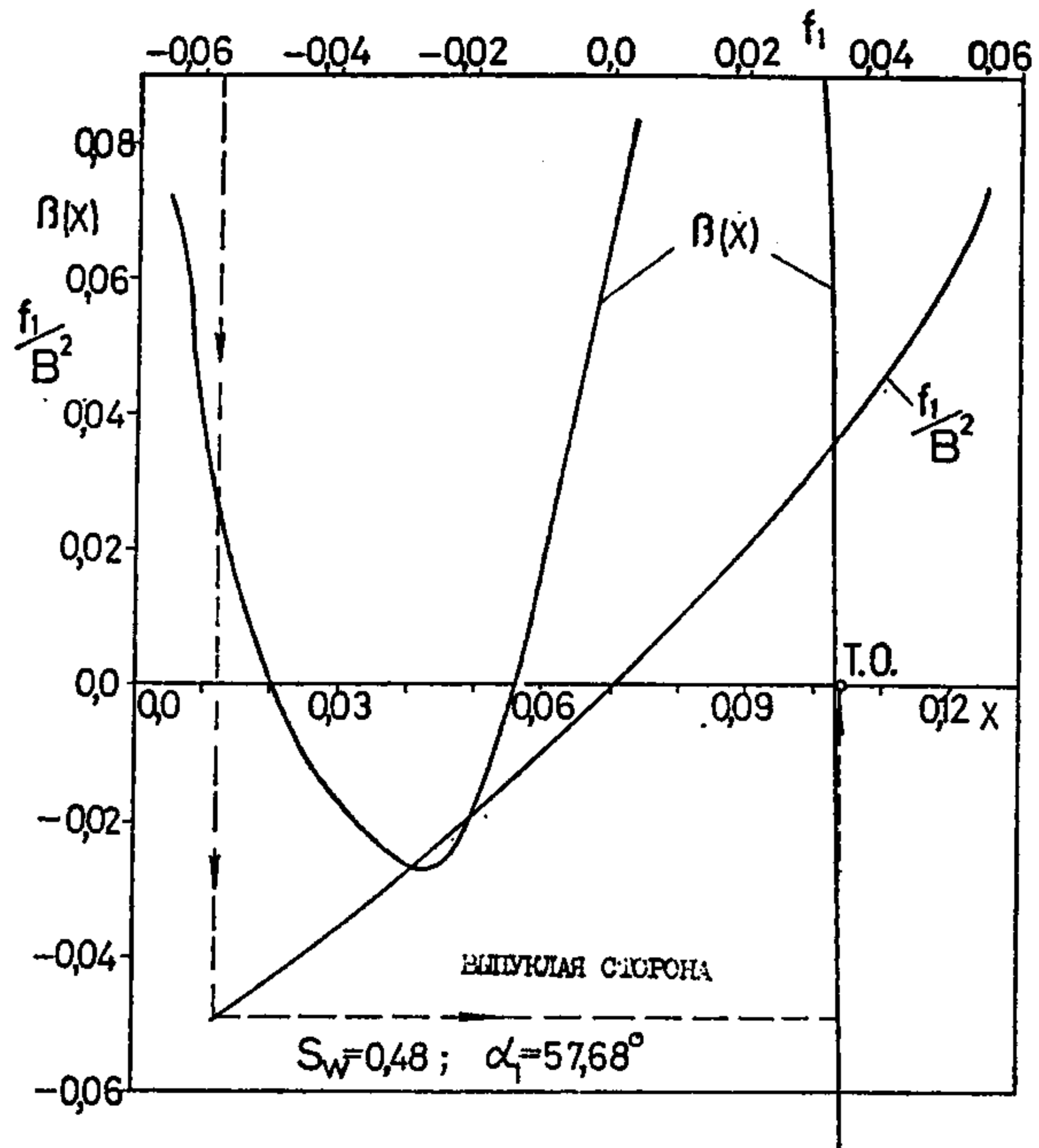


Рис. 1

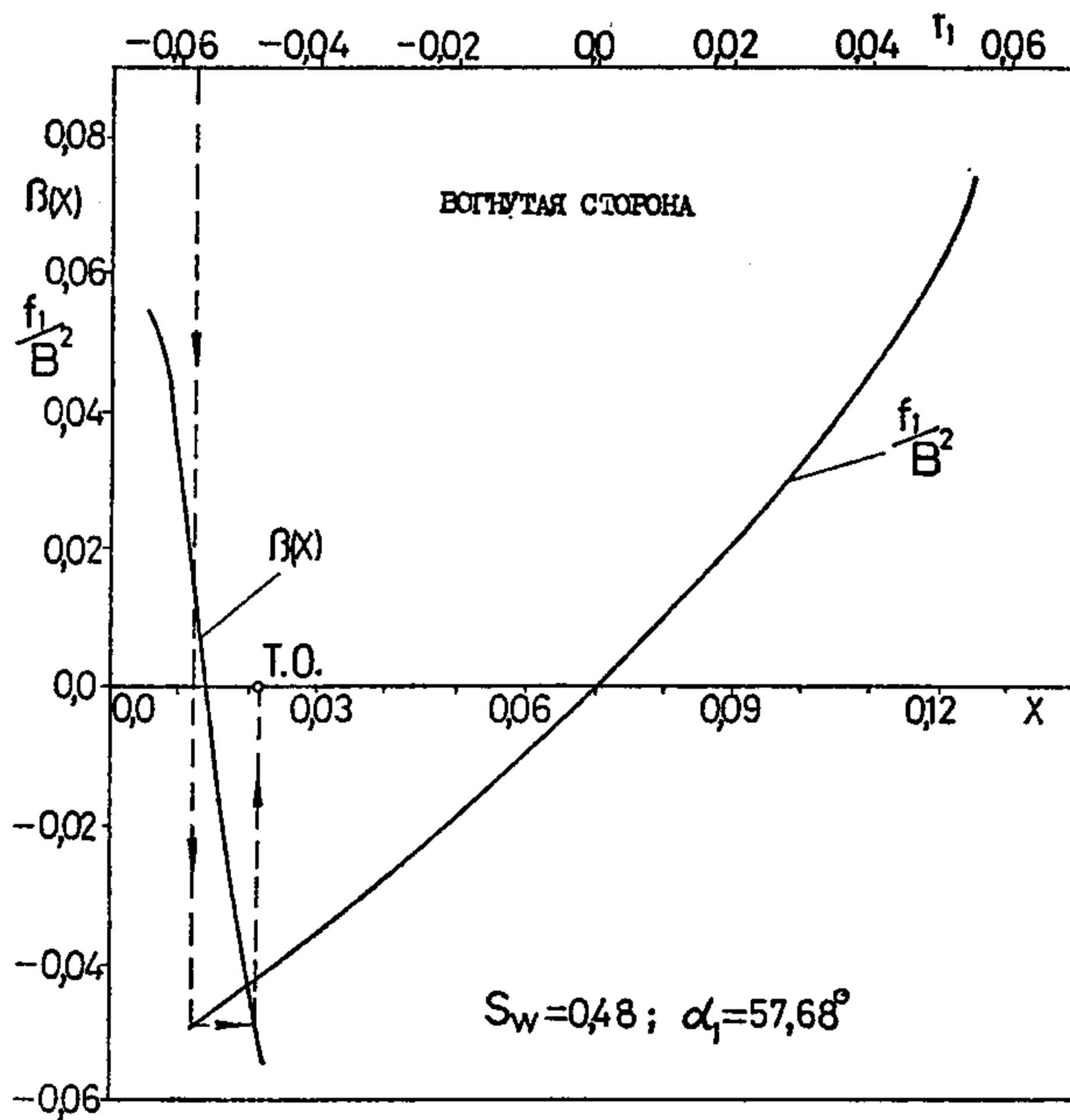


Рис. 2

— на выпуклой стороне  $s=104,5$  мм, на рис. обозначена цифрой 0'.

При угле атаки  $\alpha_0=55^\circ$  и  $\omega=1459,5$  сек<sup>-1</sup> точки отрыва находятся на следующих расстояниях:

— на выпуклой стороне  $s=99,2$  мм, на рис. обозначена цифрой 2'.

— на вогнутой стороне  $s=22,3$  мм, на рис. обозначена цифрой 2.

Из вышесказанного следует, что с увеличением угловой скорости при выше упомянутых углах атаки, по выпуклой стороне точка отрыва перемещается по течению, а по вогнутой стороне контура лопатки, против течения.

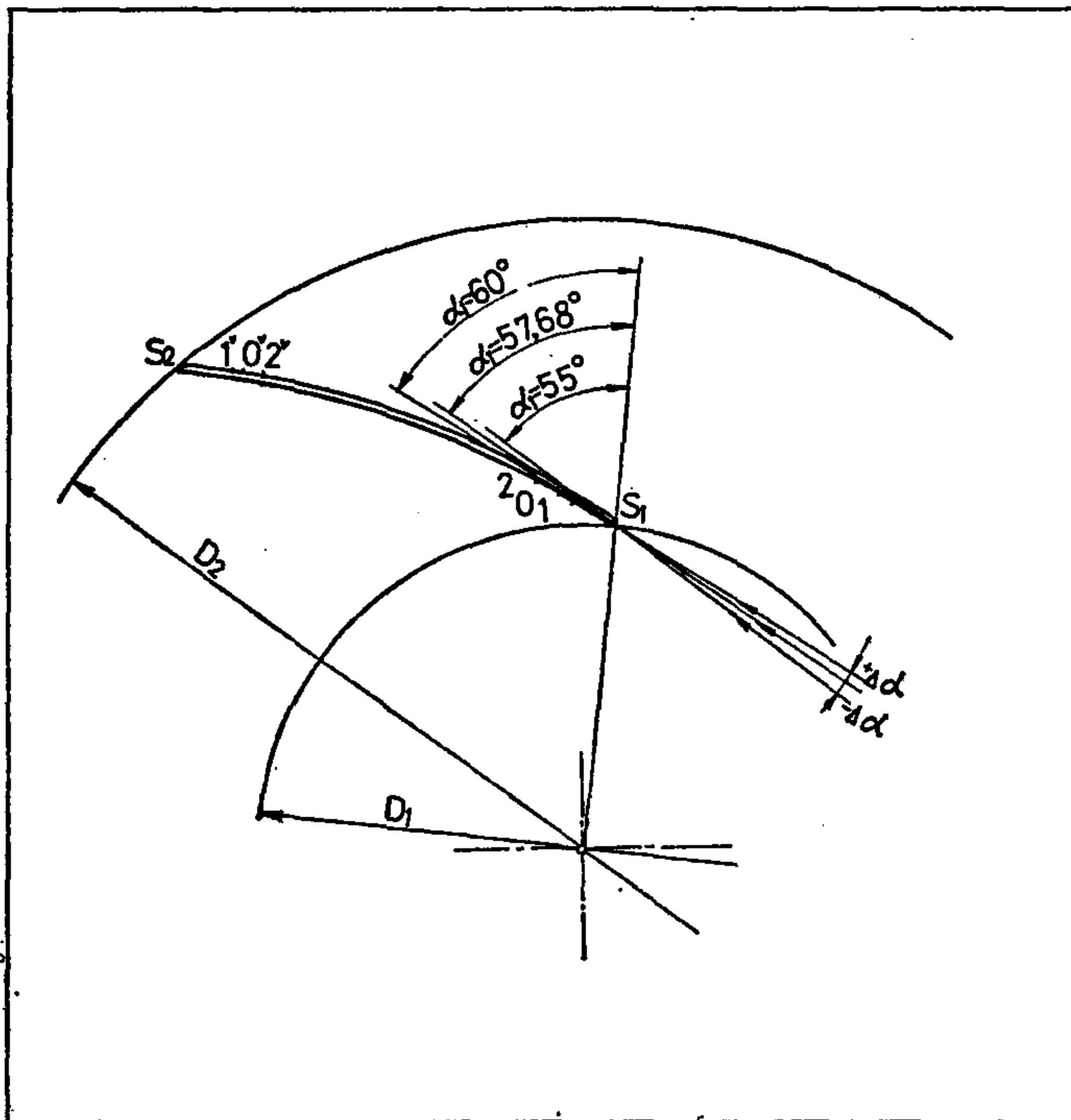


Рис. 3

Из выше сделаного анализа о точках отрыва и их соответствующих обтеканиях воздуха вдоль контура лопатки, заключаем что исследуемая радиально компрессорная решётка, „не подходит“ из за того что сразу на вогнутой стороне появляется вихревое движение.

При конструирований круговых компрессорных лопаток необходимо учитывать большое ускорение газового потока по вогнутой стороне в близи передней критической точки. Поэтому конструкция лопатки должна способствовать уменьшению этого ускорения. Тогда точка отрыва переместилась бы к средней части вогнутой стороны лопатки, а с этим и в целом улучшатся характеристика турбомашин. Этот даёт возможность улучшить качество лопатки конструктивным путем.

Кромя выше сказанного можно сделать другой вывод. Он указывает на наиболее подходящий угол атаки потока при обтекании лопатки.

$S_w = 0,49$

| $f_i$     | 0,5508   | 0,055    | 0,05438  | 0,0525   | 0,05     | 0,04     | 0,03     | 0,02     | 0,01      | 0,0      | -0,01    | -0,02    | -0,03    | -0,04    | -0,05    | -0,055   | -0,0575 |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
| $A$       | 3,662    | 3,66164  | 3,66375  | 3,67602  | 3,693559 | 3,76245  | 3,84162  | 3,92797  | 4,022608  | 4,12669  | 4,25214  | 4,39669  | 4,57071  | 4,79301  | 5,10971  | 5,33590  | 5,48717 |
| $B$       | 0,84434  | 0,85323  | 0,86616  | 0,88515  | 0,900578 | 0,93887  | 0,96115  | 0,97802  | 0,99222   | 1,004536 | 1,01303  | 1,03031  | 1,04315  | 1,05713  | 1,07440  | 1,08283  | 1,08666 |
| $B^2$     | 0,712918 | 0,72800  | 0,75023  | 0,78348  | 0,81104  | 0,88148  | 0,92381  | 0,956513 | 0,984506  | 1,00909  | 1,035785 | 1,06163  | 1,088165 | 1,11753  | 1,15433  | 1,17252  | 1,18083 |
| $F$       | 0,001888 | 0,00911  | 0,019297 | 0,042901 | 0,069722 | 0,153003 | 0,228298 | 0,30089  | 0,37308   | 0,444807 | 0,52126  | 0,60049  | 0,685164 | 0,78182  | 0,91380  | 0,96643  | 0,97548 |
| $\zeta$   | 0,34910  | 0,348898 | 0,34734  | 0,342813 | 0,336973 | 0,313819 | 0,291015 | 0,268073 | 0,2447702 | 0,220916 | 0,16918  | 0,17018  | 0,142362 | 0,11170  | 0,07609  | 0,054062 | 0,04067 |
| $H$       | 4,33762  | 4,2915   | 4,22987  | 4,153008 | 4,101319 | 4,00741  | 3,996897 | 4,016267 | 4,054138  | 4,108066 | 4,178038 | 4,26736  | 4,38163  | 4,53398  | 4,75590  | 4,927750 | 5,04956 |
| $f_{iT}$  | 0,0886   | 0,0830   | 0,0746   | 0,0627   | 0,05330  | 0,0316   | 0,0200   | 0,01170  | 0,00530   | 0,00     | -0,0044  | -0,0082  | -0,0115  | -0,0143  | -0,01670 | -0,01770 | -0,0182 |
| $\zeta^*$ | -0,0912  | -0,0929  | -0,0954  | -0,0990  | -0,10170 | -0,1091  | -0,11070 | -0,11190 | -0,11220  | -0,11170 | -0,11060 | -0,1087  | -0,1060  | -0,10200 | -0,09590 | -0,0910  | -0,0875 |
| $H_T$     | 1,2686   | 1,2282   | 1,17120  | 1,09250  | 1,03230  | 0,8894   | 0,81690  | 0,76640  | 0,72710   | 0,69470  | 0,66680  | 0,64210  | 0,61940  | 0,5980   | 0,57730  | 0,56730  | 0,56240 |
| $F_T$     | 0,14390  | 0,15110  | 0,16130  | 0,1750   | 0,1850   | 0,20380  | 0,21120  | 0,21470  | 0,2160    | 0,21560  | 0,21370  | 0,21030  | 0,2054   | 0,19810  | 0,18720  | 0,17880  | 0,17300 |
| $\zeta_T$ | -0,1156  | -0,1141  | -0,11180 | -0,1081  | -0,10490 | -0,09610 | -0,0905  | -0,08580 | -0,08160  | -0,07760 | -0,0737  | -0,0698  | -0,0656  | -0,06100 | -0,05540 | -0,05160 | -0,0492 |
| $f_i/B^2$ | 0,07726  | 0,07555  | 0,07248  | 0,06701  | 0,061650 | 0,04538  | 0,032047 | 0,02090  | 0,01016   | 0,00     | -0,00966 | -0,01884 | -0,02757 | -0,03580 | -0,04330 | -0,04691 | -0,0487 |
| $\zeta'$  | 0,41356  | 0,40892  | 0,40111  | 0,38735  | 0,3742   | 0,33426  | 0,30280  | 0,27409  | 0,2467    | 0,21991  | 0,19276  | 0,16517  | 0,13647  | 0,10567  | 0,07082  | 0,04993  | 0,03743 |





Из предыдущего анализа очевидно что наилучши условия обтекания получены при угле атаки  $\alpha_1=55^\circ$ . При этом же угле атаки получаем лучшее обтекание по вогнутой стороне чем в двух других исследуемых случаях (при углах атаки  $\alpha_1=57,68^\circ$  и  $\alpha_1=60^\circ$ ). Из этого заключаем что исследуемая круговая решётка должна быть обтекаема под углом атаки который будет отличаться на  $\Delta\alpha=-(2^\circ+3^\circ)$  от оптимального (см. рис. 3), соответственно  $\Delta\alpha=-(3^\circ+5^\circ)$  по отношению к направлению касательной оси в передней критической точки  $S_1$ , чтобы добиться наилучшего обтекания.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] С а л ь н и к о в. В. *Прилої универзалним решењима теорије граничної слоја*, Саопштено 1973 г. на I Југословенском Аерокосмичком конгресу у Београду.
- [2] Saljnikov V. i Boričić Z. *Die universellen Grenzschichtgleichungen für den Fall der kompressiblen laminaren Strömung*. Rad saopšten 1973 g. na kongresu GAMM u Minhenu.
- [3] Мирчевски М. Докторска дисертација, 1976. г. Скопје.
- [4] Мирчевски. М. *Дозвучно сїруење низ шурбомашински решејки*. Соопштено на 13 Југословенски конграс за рационална и применета механика, 1976 г.

М. Мирчевски  
ул. Рајко Жинзифов 28  
91000 Скопље.