

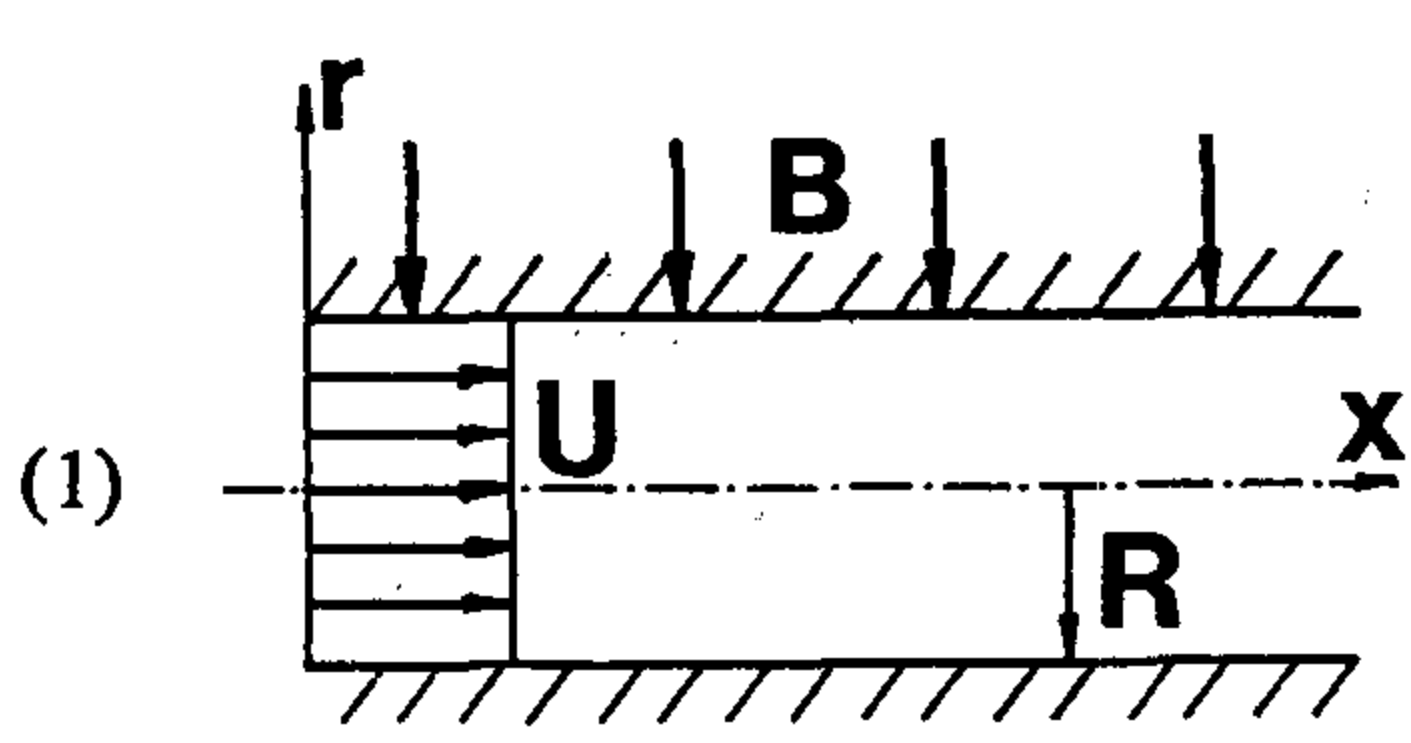
SUR L'ÉCOULEMENT D'UN LIQUIDE CONDUCTEUR DANS LA RÉGION D'ENTRÉE DANS UN TUBE CIRCULAIRE EN PRÉSENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

P. Marjanović, J. Jovanović et R. Ašković

(Reçu le 5 Mars 1978)

Résumé. Dans ce travail on présente une façon approchée à déterminer la longueur du développement de l'écoulement d'un liquide conducteur à travers d'un tube circulaire en présence d'un champ magnétique transversal. On a démontré que cette longueur du développement de l'écoulement diminue si le nombre de Hartmann augmente, ce qui peut être utile pour la pratique.

Dans un système de coordonnées (x, r) , d'après la figure 1, sous la supposition que le champ magnétique radial devient constant dès le début du tube, les équations de Navier-Stokes, simplifiées de la façon bien connue pour l'étude de l'écoulement dans la région d'entrée (linéarisation du type d'Oseen), peuvent s'écrire sous la forme suivante:



$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\sigma B^2}{\rho} u, \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Figure 1

Ici (u, v_r) sont les composantes (longitudinale et radiale) de la vitesse, U - vitesse juste au début du tube, p - pression, ρ - densité du fluide, ν - viscosité cinématique, σ - conductivité électrique du fluide, B - induction magnétique appliquée, R - rayon du tube.

Les conditions à satisfaire sont:

(2) $u = 0, \quad v_r = 0 \quad \text{pour } r = R \text{ et } x > 0,$

(3) $2\pi \int_0^R u r dr = R^2 \pi U,$

(4) $u = U \quad \text{pour } x = 0.$

En multipliant la première et la troisième équation du système (1) par rdr et en les intégrant entre les limites $O-R$ et $O-r$ respectivement, on aura:

$$(5) \quad U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^R ur \, dr = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_0} \int_0^R r \, dr + v \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_0^R - \frac{\sigma B^2}{\rho} \int_0^R ur \, dr,$$

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_0^r ur \, dr = rv_r.$$

Après avoir trouvé la composante principale u de la vitesse, l'équation (6) peut nous servir à calculer la composante v_r . D'autre part, en utilisant (3) l'équation (5) nous donne le gradient de pression:

$$(7) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2\mu}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_R - \sigma B^2 U.$$

Si l'on introduit (7) à (1), il s'en suit:

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{N}{U} (U-u) - \frac{2k}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_R,$$

où:

$$(9) \quad \frac{v}{U} = k, \quad \frac{\sigma B^2}{\rho} = N.$$

Les conditions aux limites sont déjà définies par (2) et (4).

L'équation (8) sous les conditions (2) et (4) peut être traitée à l'aide de la méthode de transformations de Laplace:

$$(10) \quad \int_0^\infty e^{-px} u(r, x) \, dx = \frac{\dot{u}}{p}, \quad \int_0^\infty e^{-px} \frac{\partial u}{\partial x} \, dx = -U + \dot{u}.$$

On obtient ainsi pour la fonction \dot{u} l'équation différentielle ordinaire:

$$(11) \quad \frac{d^2 \dot{u}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{u}}{dr} - \frac{P}{k} \dot{u} = -\frac{P}{k} U + \frac{2}{R} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \right)_R,$$

avec la condition: $\dot{u} = 0$ pour $r = R$,

$$\text{où:} \quad P = p + \frac{N}{U}.$$

La solution générale de l'équation différentielle (11) est présentée par les fonctions de Bessel de l'ordre zéro:

$$(12) \quad u = AI_0 \left(r \sqrt{\frac{P}{k}} \right) + BK_0 \left(r \sqrt{\frac{P}{k}} \right) + U - \frac{2k}{PR} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \right)_R.$$

Vu $K_0 \rightarrow \infty$ pour $r=0$, nous devons prendre que $B=0$. En calculant la constante A à l'aide de la condition mentionnée: $\dot{u}=0$ pour $r=R$:

$$(13) \quad A = \frac{U}{\frac{2}{R} \sqrt{\frac{k}{P}} I_0' \left(R \sqrt{\frac{P}{k}} \right) - I_0 \left(R \sqrt{\frac{P}{k}} \right)},$$

nous trouvons, après quelques transformations, que:

$$(14) \quad \dot{u} = U \frac{I_0 \left(R \sqrt{\frac{P}{k}} \right) - I_0 \left(r \sqrt{\frac{P}{k}} \right)}{I_2 \left(R \sqrt{\frac{P}{k}} \right)}.$$

Maintenant la vitesse dans la région d'entrée peut être cherchée par le procédé bien connu:

$$u(r, x) = \frac{U}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{px} \dot{u} \frac{dp}{p},$$

ou bien:

$$(15) \quad u(r, x) = \frac{U}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{px} \frac{I_0 \left(R \sqrt{\frac{P}{k}} \right) - I_0 \left(r \sqrt{\frac{P}{k}} \right)}{I_2 \left(R \sqrt{\frac{P}{k}} \right)} \frac{dp}{p}.$$

Pour résoudre l'intégrale (15) nous avons profité du théorème de résidu:

$$(16) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{px} \dot{u} \frac{dp}{p} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(x),$$

où $r_n(x)$ représente le résidu de la fonction $\left\{ e^{px} \frac{\dot{u}}{p} \right\}$ dans le point $p=p_n$, ainsi que le procédé de décomposition de cette fonction sous l'intégrale (15):

$$(17) \quad \frac{F_1(p)}{P_2(p)} = \frac{I_0 \left(R \sqrt{\frac{p+\dot{N}}{k}} \right) - I_0 \left(r \sqrt{\frac{p+\dot{N}}{k}} \right)}{p I_2 \left(R \sqrt{\frac{p+\dot{N}}{k}} \right)} = \frac{C_0}{p} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{p-p_m},$$

où:

$$(18) \quad p_m = -k \frac{b_m^2}{R^2} - \dot{N}, \quad \dot{N} = \frac{N}{U},$$

tandis que b_m vérifie l'équation:

$$J_2(b_m) = 0.$$

On a utilisé ici encore la relation entre les fonctions de Bessel de deux type d'arguments: réel et imaginaire:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix).$$

Les coefficients-constants dans la série (17) sont trouvés sous la forme suivante:

$$(19) \quad C_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pF_1(p)}{F_2(p)} = \frac{I_0\left(R\sqrt{\frac{\dot{N}}{k}}\right) - I_0\left(r\sqrt{\frac{\dot{N}}{k}}\right)}{I_2\left(R\sqrt{\frac{\dot{N}}{k}}\right)},$$

$$(20) \quad C_m = \frac{F_1(p_m)}{P_2'(p_m)} = \frac{2kb_m}{R^2} \frac{J_0\left(\frac{r}{R}b_m\right) - J_0(b_m)}{\left(k\frac{b_m^2}{R^2} + \dot{N}\right)J_2'(b_m)}.$$

Finalement, à l'aide de la relation bien connue:

$$(21) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{px} \frac{dp}{p-p_m} = e^{p_m x},$$

par l'intermédiaire de (17), on obtient:

$$(22) \quad u(r, x) = U \left[C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\left(k\frac{b_m^2}{R^2} + \dot{N}\right)x} \right],$$

i.e. compte-tenu de (19) et (20):

$$(23) \quad \frac{u}{U} = \frac{I_0\left(R\sqrt{\frac{\dot{N}}{k}}\right) - I_0\left(r\sqrt{\frac{\dot{N}}{k}}\right)}{I_2\left(R\sqrt{\frac{\dot{N}}{k}}\right)} + \frac{4k}{R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{J_0\left(\frac{r}{R}b_m\right)}{J_0(b_m)} - 1 \right] \frac{1}{k\frac{b_m^2}{R^2} + \dot{N}} e^{-\left(k\frac{b_m^2}{R^2} + \dot{N}\right)x},$$

ainsi que le gradient de pression (7):

$$(24) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U^2 N - \frac{2\mu U}{R} \left[\sqrt{\frac{\dot{N}}{k}} \frac{I_0' \left(R \sqrt{\frac{\dot{N}}{k}} \right)}{I_2 \left(R \sqrt{\frac{\dot{N}}{k}} \right)} + \frac{2k}{R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m^2}{k \frac{b_m^2}{R^2} + \dot{N}} e^{-\left(k \frac{b_m^2}{R^2} + \dot{N} \right) x} \right].$$

Or, la solution du problème posé de l'écoulement à l'entrée du tube est définie par (23) et (24). Il est à remarquer que l'expression (23) nous offre dans le cas d'un fluide non-conducteur ($\dot{N} \rightarrow 0$) et pour l'écoulement développé ($x \rightarrow \infty$) la solution bien connue de Stokes [1]:

$$(u)_{x \rightarrow \infty} = 2U \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

ainsi que directement pour $\dot{N} \rightarrow 0$ les résultats de Targ [2], se rapportant au problème analogue du développement de l'écoulement d'un liquide nonconducteur.

En restant à l'axe du tube ($r=0$) et à l'aide de la solution de l'écoulement développé:

$$u_{\text{dév.}} = U \frac{I_0(H) - 1}{I_2(H)},$$

où H est le nombre de Hartmann, nous pouvons calculer la longueur du développement de l'écoulement L d'après le critère suivant:

$$(25) \quad \frac{u_{\text{dév.}} - (u)_{r=0, x=L}}{u_{\text{dév.}}} = 0.01.$$

Si l'on y introduit l'expression (23), on obtient après quelques transformations:

$$(26) \quad \frac{L}{RR_e} = \frac{1}{b_1^2 + H^2} \ln \left[400 \frac{J_0(b_1) - 1}{J_0(b_1)} \frac{1}{b_1^2 + H^2} \frac{I_2(H)}{I_0(H) - 1} \right],$$

où $R_e = \frac{UR}{\nu}$ est le nombre de Reynolds.

Si l'on présente la fonction (16) graphiquement, on obtient que la longueur du développement de l'écoulement diminue si le nombre de Hartmann augmente (figure 2), ce qui est favorable pour la pratique. La même chose est aussi illustrée par le tableau ci-contre, calculé numériquement.

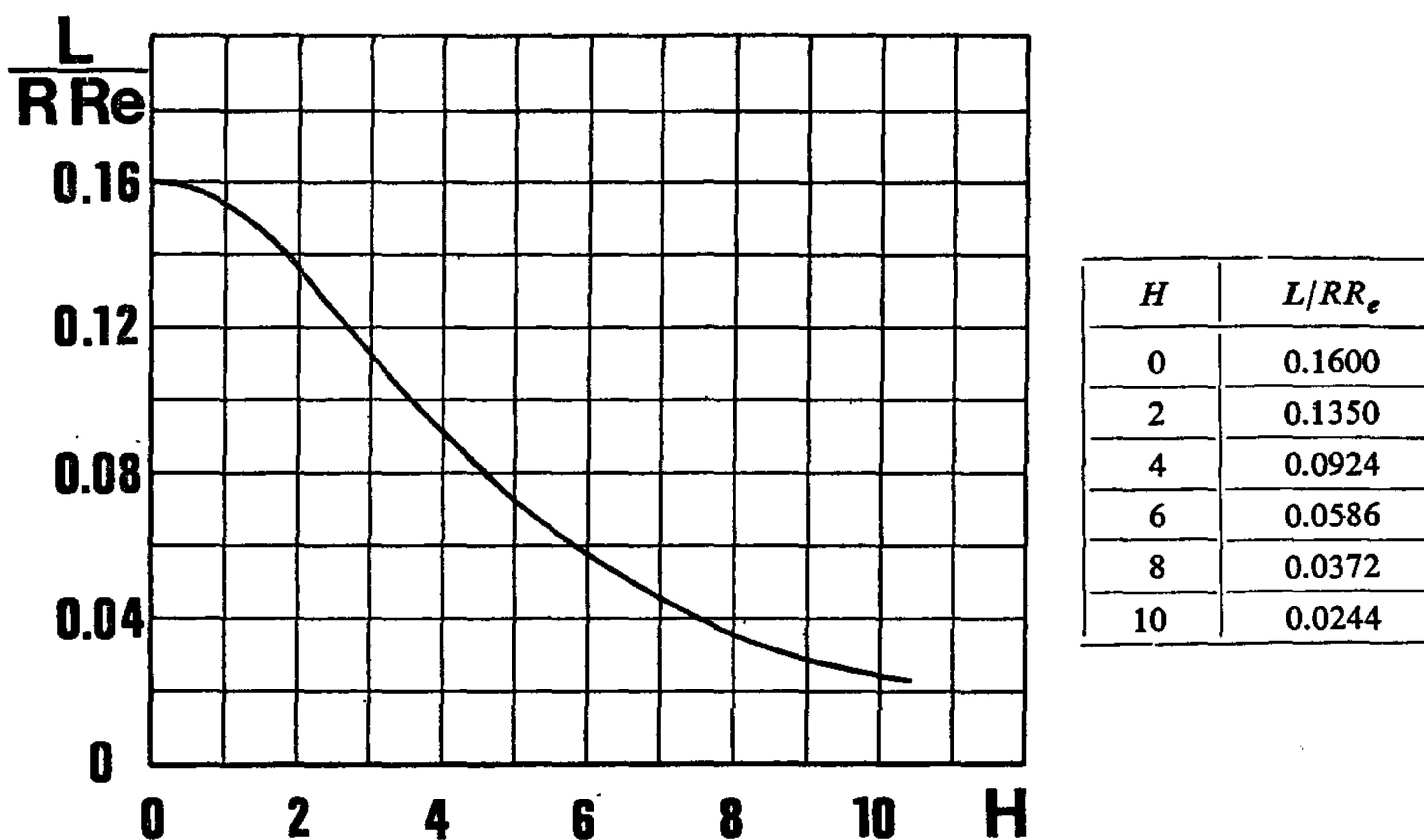


Figure 2

Il est à souligner que ce comportement de L/RR_e (26) pour les grandes valeurs de H comme $1/H^2$ est le même que dans le cas d'un tube annulaire en présence d'un champ magnétique radial (3). Il est à espérer que la solution (26) décrit aussi qualitativement et approximativement le comportement de la longueur du développement de l'écoulement dans le cas analogue mais avec un champ magnétique transversal.

Finalement, il est facile à calculer que:

$$\lim_{H \rightarrow 0} \ln \left[\frac{I_2(H)}{I_0(H) - 1} \right] = -0.6931,$$

de sorte que la formule (26) nous offre ainsi la relation:

$$(27) \quad L = \frac{RR_e}{b_1^2} \ln 200 \frac{J_0(b_1) - 1}{b_1^2 J_0(b_1)},$$

ce qui est celle de Targ [2], bien connue pour un fluide non-conducteur, i.e. $b_1 = 5.136$, $J_0(b_1) = -0.133$ et d'après (27) : $L = 0,16 RR_e$.

Références

- [1] K. Voronjec et N. Obradović, *Mehanika fluida, livre universitaire, 5me édition*, Beograd 1976, p. 155.
- [2] S. M. Targ, *Théorie élémentaire des écoulements laminaires*, GOSTEHIZDAT, 1951 (en russe).
- [3] J. L. Shohet, *Velocity and temperature profiles for laminar magnetohydrodynamic flow in the entrance region of an annular channel*, Phys. Fluids, 1962, 5, N° 8, 879—884.

Adresses des auteurs:

Jovan Jovanović, Institut za nuklearne nauke „Boris Kidrič“, Beograd.
 Predrag Marjanović, Katedra za Meh. fluida Mašinskog fakulteta, Beograd.
 Radomir Ašković, Katedra za Meh. fluida Mašinskog fakulteta, Beograd.