

**APPROXIMATIONS SUPÉRIEURES DANS LA COUCHE LIMITE NON  
STATIONNAIRE ET LEUR TRAITEMENT PARAMÉTRIQUE. DEUXIÈME  
PARTIE: APPLICATION DE LA METHODE**

*J. Jovanović, R. Ašković, M. Đurić*

(Reçu le Septembre 14, 1978)

**Résumé.** A l'aide d'une méthode à traiter les approximations supérieures de la couche limite en régime non stationnaire, préparée dans la première partie [1], on va calculer ici les deux problèmes particuliers: les couches limites autour d'une plaque plane et d'un cylindre, mis chaque fois brusquement en mouvement de translation dans un fluide initialement au repos.

**1. Introduction**

Dans la première partie [1] on a fait une universalisation des équations différentielles de la deuxième approximation de la couche limite, obtenues à l'aide de la technique de perturbations de Van Dyke. Toutes ces équations universelles paramétriques peuvent être intégrées soit numériquement avec un calculateur électronique soit en développant les solutions en séries des paramètres de forme. Pour le moment, nous avons traité ces équations sous forme des développements en séries, en trouvant mêmes les solutions analytiques des équations différentielles ordinaires du type parabolique, issues de ce traitement dans le cas de la „simple solution“ [1].

Néanmoins, pour solutionner des problèmes particuliers il est nécessaire à résoudre encore les équations de l'écoulement extérieurs du type elliptique qui donc doivent être traitées tout à fait autrement par rapport aux équations de la couche limite (qui sont du type parabolique). Cette différence essentielle exige que les équations de l'écoulement extérieur doivent être traitées séparément pour chaque cas particulier, bien qu'il existe une certaine possibilité d'application des fonctions analytiques et non-analytiques.

**2. Traitement des équations de l'écoulement extérieur**

Les équations différentielles pour la première et la deuxième approximation de l'écoulement extérieur, accompagnées des conditions limites et initiales, en

système de coordonnées curvilignes, peuvent s'écrire [1] comme suit:

$$(1) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{e_2}{e_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{e_1}{e_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \Psi_0 = -e_1 e_2 \Psi_0,$$

$$t \leq t_a \quad \Psi_0 = 0 \text{ pour chaque } \xi, \eta,$$

$$t > t_a \quad \Psi_0 = 0 \text{ à l'obstacle du corps,}$$

$$\Psi_0 \sim \Psi_0(\xi, \eta, t) \text{ à l'infini.}$$

$$(2) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{e_2}{e_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{e_1}{e_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \Psi_1 = 0,$$

$$t \leq t_a \quad \Psi_1 = 0 \text{ pour chaque } \xi, \eta,$$

$$t > t_a \quad \Psi_1 = -\lim_{N \rightarrow \infty} [U_0(s, o, t)N - \Psi_0(s, N, t)] \text{ à l'obstacle du corps,}$$

$$\Psi_1 \rightarrow \text{const. à l'infini.}$$

sous la supposition que le tourbillon dans l'écoulement extérieur ne dépend du nombre de Reynolds.

Pour résoudre l'équation (2), appelé souvent — le deuxième problème extérieur, il faut connaître le comportement asymptotique du profil de la vitesse au niveau de la première approximation de la couche limite  $\psi_0$  pour les grandes valeurs de la coordonnée  $N$ . En utilisant des résultats obtenus en [1] pour la "simple solution" on a:

$$\Psi_0(s, N, t) = \frac{\delta_p^* \Omega V}{A} [f_{0.0}(\eta) + g_1 f_{0.1}(\eta) + \gamma_1 f_{1.0}(\eta)],$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f_{0.0}(\eta) \rightarrow \eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f_{0.1}(\eta) \rightarrow 0,$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f_{1.0}(\eta) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{12} (4\sqrt{2} - 3) - \frac{1}{9\sqrt{\pi}},$$

de sorte que la première condition limite pour l'équation (2) devient:

$$(3) \quad \Psi_1 = -\frac{\delta_p^* \Omega V}{A} \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\delta_p^* \Omega V}{A} \gamma_1 \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{12} (4\sqrt{2} - 3) - \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \right].$$

Alors, maintenant les équations différentielles (1) et (2) peuvent être traitées pour chaque cas particulier. Dans ce travail nous allons traiter en ce qui suit les deux problèmes: une plaque plane d'une certaine longueur et un cylindre circulaire, mis en mouvement le long d'une trajectoire rectiligne à une vitesse constante dans un fluide initialement au repos.

### 3. Profil de la vitesse et contrainte tangentielle

A la base des solutions des équations différentielles universelles pour  $F$ ,  $\Phi^v$ ,  $\Phi^d$  et  $\Phi^k$ , obtenues dans la première partie [1], on peut construire l'expression pour la composante longitudinale de la vitesse dans la couche limite sous la forme:

$$(4) \quad u = u_0 + \varepsilon u_1 = \Omega V \frac{\partial F}{\partial \eta} + \varepsilon \left[ \frac{\delta_p^* \Omega_0}{A} \frac{\partial \Phi^v}{\partial \eta} + U_1(s, o, t) \frac{\partial \Phi^d}{\partial \eta} + \frac{\delta_p^* K \Omega V}{A} \frac{\partial \Phi^k}{\partial \eta} \right] =$$

$$= \Omega V [f'_{0.0}(\eta) + g_1 f'_{0.1}(\eta) + \gamma_1 f'_{1.0}(\eta)] + \varepsilon \left\{ \frac{\delta_p^* \Omega_0}{A} [f''_{0.0}(\eta) + g_1 f''_{0.1}(\eta) + \right.$$

$$+ \gamma_1 f''_{1.0}(\eta)] + U_1(s, o, t) [f^{d''}_{0.0}(\eta) + g_1 f^{d''}_{0.1}(\eta) + f_1 f^{d''}_{11.0}(\eta) + l_1^0 f^{d''}_{110.0}(\eta)]$$

$$\left. + \frac{\delta_p^* K \Omega V}{A} [f^{k''}_{0.0}(\eta) + g_1 f^{k''}_{0.1}(\eta) + \gamma_1 f^{k''}_{1.0}(\eta) + p_1 f^{k''}_{11.0}(\eta)] \right\}.$$

A l'aide de (4) on calcule aussi une autre caractéristique, très importante, de la couche limite — la contrainte tangentielle pariétale:

$$(5) \quad \tau_w = \varepsilon \left\{ \frac{\Omega V A}{\delta_p^*} [f''_{0.0}(0) + g_1 f''_{0.1}(0) + \gamma_1 f''_{1.0}(0)] + \varepsilon \{ \Omega_0 [f''_{0.0}(0) + g_1 f''_{0.1}(0) + \right.$$

$$+ \gamma_1 f''_{1.0}(0)] + \frac{U_1(s, o, t) A}{\delta_p^*} [f^{d''}_{0.0}(0) + g_1 f^{d''}_{0.1}(0) + \gamma_1 f^{d''}_{1.0}(0) f_1 f^{d''}_{11.0}(0) +$$

$$+ l_1^0 f^{d''}_{111.0}(0)] + K \Omega V [f^{k''}_{0.0}(0) + g_1 f^{k''}_{0.1}(0) +$$

$$\left. + \gamma_1 f^{k''}_{1.0}(0) + p_1 f^{k''}_{11.0}(0)] \right\},$$

où, d'après les solutions analytiques obtenues dans la première partie on a:

$$f''_{0.0}(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad f''_{0.1}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}, \quad f''_{1.0}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}, \quad f''_{0.0}(0) = -1,$$

$$f''_{0.1}(0) = 0, \quad f''_{1.0}(0) = -\frac{3\pi}{16}, \quad f^{d''}_{0.0}(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad f^{d''}_{0.1}(0) = -\frac{\sqrt{\pi}}{6},$$

$$f^{d''}_{1.0}(0) = f^{d''}_{11.0}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}, \quad f^{d''}_{11.0}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad f^{k''}_{0.0}(0) = -\frac{1}{2},$$

$$f^{k''}_{0.1}(0) = 0, \quad f^{k''}_{1.0}(0) = \frac{9}{20} - \frac{\pi}{64} (5 + 32\sqrt{2}), \quad f^{k''}_{11.0}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

#### 4. Exemple 1: Plaque plane mis brusquement en mouvement

En cadre du premier exemple, prenons une plaque plane d'une certaine longueur, mis brusquement en mouvement uniforme de translation dans son lit, si  $\Omega_0 = -c$  ( $c > 0$ ), fig. 1.

Alors, l'équation pour la première approximation de l'écoulement extérieur (1) se ramène à l'équation de Poisson:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial s^2} = -\Omega_0$$

$$t \leq 0 \quad \Psi_0 = 0 \text{ pour chaque } s, n,$$

$$t > 0 \quad \Psi_0 = 0 \text{ pour } n = 0,$$

$$\Psi_0 \rightarrow n - \frac{1}{2} \Omega_0 n^2 \text{ pour } s, n \rightarrow \infty,$$

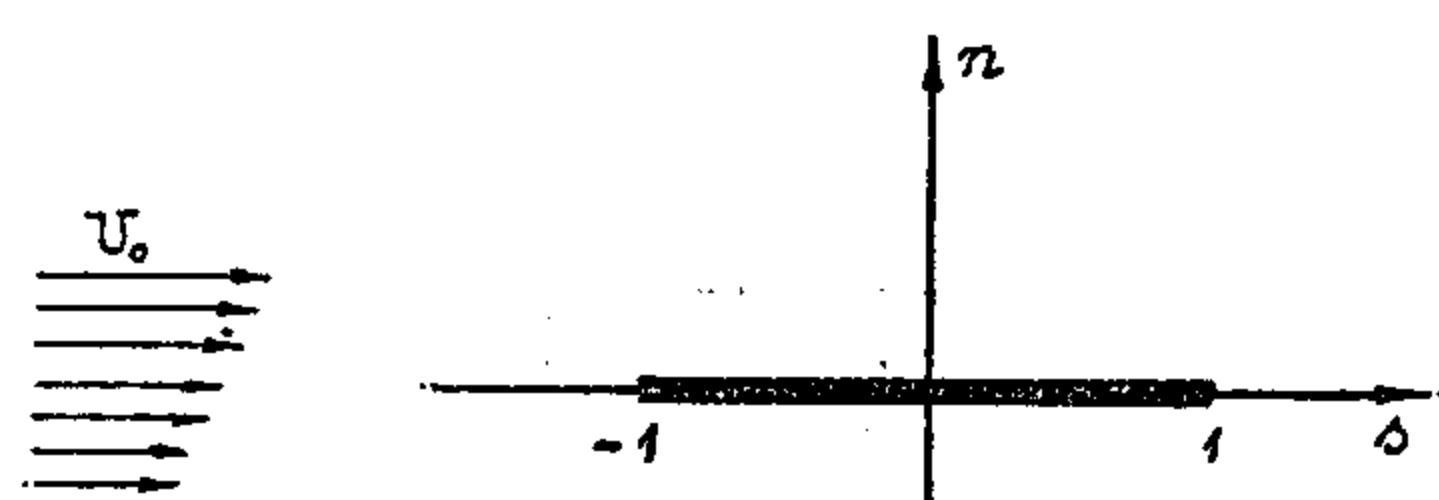


Fig. 1

dont la solution, satisfaisant les conditions mentionnées, pour  $t > 0$ , est définie par:

$$\Psi_0 = n - \frac{1}{2} \Omega_0 n^2,$$

d'où la vitesse à la frontière de la couche limite pour la première approximation:

$$U_0(s, 0, t) = 1.$$

Il nous faut ensuite résoudre l'équation pour le deuxième problème extérieur afin de trouver  $U_1(s, 0, t)$ , appelée: vitesse du déplacement. L'équation (2) se ramène [1] à l'équation de Laplace:

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial n^2} = 0,$$

$$t \leq 0 \quad \Psi_1 = 0 \text{ pour chaque } s, n,$$

$$t > 0 \quad \Psi_1 = -\lim_{N \rightarrow \infty} [N - \psi_0(s, N, t)] \text{ pour } n = 0,$$

$$\Psi_1 \rightarrow \text{const. pour } s, n \rightarrow \infty.$$

En sachant le comportement asymptotique de la fonction  $\psi_0$ , trouvée auparavant, la première condition limite pour  $\psi_1$  devient:

$$(8) \quad \psi_1(s, 0, t) = -\delta_p^*(t),$$

tandis que l'intégration de l'équation du quantité de mouvement [1] nous offre:

$$(9) \quad \delta_p^*(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}.$$

Une combinaison des résultats (8) et (9) avec d'autres formules, obtenues en [1], pareillement à [2], la résolution du même problème mais dans le cas de la

couche limite stationnaire, donne l'information que la fonction de courant  $\psi_1$  de l'écoulement extérieur s'annule à la distance:

$$n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} R_e^{-1/2} \sqrt{t},$$

qui montre que le problème de la résolution de l'équation (7) se ramène au problème du traitement de la deuxième approximation de la théorie linéarisée des profils de Van Dyke [2] pour un profil présenté à la figure 2:

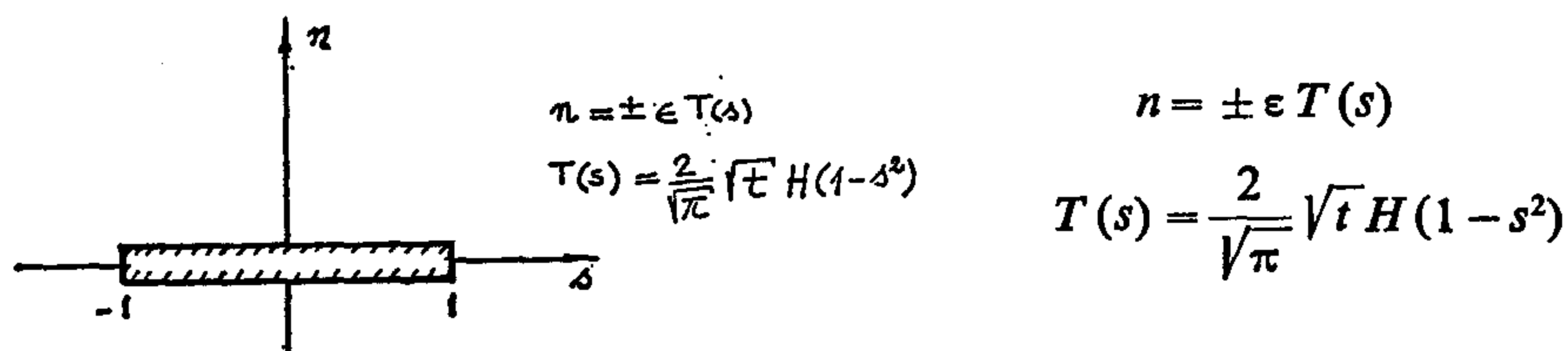


Fig. 2

où  $H$  est une fonction graduelle de Heavyside, identiquement égale à zéro pour des valeurs négatives d'arguments et égale à l'unité pour des valeurs positives d'arguments. Or, d'une telle façon on trouve:

$$(10) \quad U_1(s, o, t) = \frac{4}{\pi \sqrt{\pi}} \sqrt{t} \frac{1}{1-s^2}.$$

Maintenant, toutes les grandeurs de deux écoulement (extérieur et intérieur) sont déterminées et il est facile de calculer les caractéristiques de la couche limite. Par exemple, la contrainte tangentielle:

$$(11) \quad \tau_w = \varepsilon \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} + \varepsilon \left[ -\Omega_0 + \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{1-s^2} + \frac{16}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \right) \frac{s}{(1-s^2)^2} t \right] \right\},$$

ou bien le coefficient de résistance:

$$(12) \quad C_f = 2 \int_{-1}^1 \tau_w ds.$$

En remplaçant (11) en (12) on peut démontrer qu'il est impossible de calculer le coefficient de résistance  $C_f$  parce qu'il contient un intégral qui est, entre les limites désignées par (12), logarithmiquement infini, ce qui s'est attendue d'après l'expression (10) pour  $U_1(s, o, t)$ , étant singulière dans les points  $s = \pm 1$ . Il est à remarquer que le même problème s'est produit dans le cas stationnaire.

Cette singularité à l'expression de  $C_f$  provient de l'intégral:

$$(13) \quad J = \int_{-1}^1 \frac{1}{1-s^2} ds = \frac{1}{2} \ln \left. \frac{1+s}{1-s} \right|_{-1}^1,$$

qui est évidemment, logarithmiquement infini aux points limites. Néanmoins, si l'on remplace ces limites par des autres, proches aux primordiales, ainsi on peut évaluer la valeur de l'intégral (13):

$$(14) \quad J \approx \int_{-b}^b \frac{1}{1-s^2} ds = \frac{1}{2} \ln \left. \frac{1+s}{1-s} \right|_{-b}^b,$$

ce qui est illustré par le tableau ci-contre:

$b$	$J(b) = \ln 2 + a$	$a$
0.9	2.944	2.251
0.99	5.293	4.600
0.999	7.600	6.907
0.9999	9.903	9.210

Tableau 1

D'après les résultats d'une analyse qualitative du tableau 1, la valeur de l'intégrale (13) peut être présentée sous la forme suivante:

$$J = \ln 2 + a,$$

où  $a$  représente une constante indéfinie pouvant être déterminée en développant la solution locale aux environs des points singuliers  $s = \pm 1$  et en la liant, ensuite, avec la solution obtenue dans ce travail. A la base d'une telle analyse on trouve, donc, le coefficient de résistance.

$$(15) \quad C_f = \frac{1}{R_e^{1/2}} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{4 \Omega_0}{R_e} + \frac{1}{R_e} \frac{12}{\pi^2} (\ln 2 + a).$$

Ce résultat (15) est en accord avec des résultats correspondants, obtenus au modèle stationnaire (3/, 4/).

Le développement de la solution locale aux environs des points singuliers et sa liaison avec la solution obtenue ici afin de trouver la constante inconnue  $a$  sera le sujet d'une prochaine étude.

### 5. Exemple 2: Cylindre circulaire mis brusquement en mouvement

Considérons cette fois un cylindre d'un certain rayon, mis aussi brusquement en translation dans un fluide initialement au repos. Pour simplifier le calcul, nous allons supposer que le tourbillon dans l'écoulement extérieur est égal à zéro i.e. la première approximation de l'écoulement extérieur est bien connue:

$$U_0(s, \sigma, t) = 2 \sin \theta,$$

(puisque'on travaille ici avec les coordonnées non dimensionnelles on a que:  $s = \theta$ ). L'équation pour la deuxième approximation de l'écoulement extérieur devient du type Laplace:

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \theta^2} = 0,$$

$$t \leq 0 \quad \Psi_1 = 0 \text{ pour chaque } \theta, r,$$

$$t > 0 \quad \Psi_1 = \Psi_1(\theta, 1, t) \text{ pour } r = 1,$$

$$\Psi_1 \rightarrow \text{const. pour } r \rightarrow \infty,$$

où la fonction  $\Psi_1(\theta, 1, t)$ , d'après ce qu'on a dit auparavant, devient:

$$(17) \quad \Psi_1(\theta, 1, t) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} \sin \theta + \frac{16}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{12} (4\sqrt{2} - 3) - \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \right] t \sqrt{t} \sin 2\theta.$$

Vu la forme de la condition limite (17), il faut supposer la solution de l'équation (16) comme suit:

$$(18) \quad \Psi_1(r, \theta, t) = F(r, t) \sin \theta + X(r, \theta) \sin 2\theta.$$

Ainsi, on tire de (16) deux équations différentielles:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2} F = 0,$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} - \frac{4}{r^2} X = 0,$$

dont les solutions peuvent être présentées sous la forme:

$$F = C_1(t)r + \frac{1}{r} C_2(t),$$

$$X = B_1(t)r^2 + \frac{1}{r^2} B_2(t).$$

A l'aide des conditions aux limites, données précédemment, nous trouvons que:

$$C_1 = B_1 = 0, \quad C_2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}, \quad B_2 = \frac{16}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{12} (4\sqrt{2} - 3) - \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \right] t \sqrt{t},$$

de sorte que la solution du deuxième problème extérieur est présentée par:

$$\Psi_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} \frac{1}{r} \sin \theta + \frac{16}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{12} (4\sqrt{2} - 3) - \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \right] t \sqrt{t} \frac{1}{r^2} \sin 2\theta,$$

d'où:

$$(19) \quad U_1(s, 0, t) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} \sin \theta - \frac{32}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{12} (4\sqrt{2} - 3) - \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \right] t \sqrt{t} \sin 2\theta.$$

En passant maintenant au problème de l'écoulement intérieur, il est facile à trouver en utilisant (19) les form-paramètres [1]:

$$(20) \quad g_1 = 0, \quad \gamma_1 = \frac{8}{\pi} t \cos \theta, \quad f_1 = \frac{\frac{8}{\sqrt{\pi}} + \frac{384}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{12} (4\sqrt{2} - 3) - \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \right] t \cos \theta}{4\sqrt{\pi} + 64 \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{12} (4\sqrt{2} - 3) - \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \right] t \cos \theta},$$

$$l_1^0 = \frac{\frac{32}{\sqrt{\pi}} t \cos \theta + \frac{512}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{12} (4\sqrt{2} - 3) - \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \right] t^2 \cos 2\theta}{4\sqrt{\pi} + 64 \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{12} (4\sqrt{2} - 3) - \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \right] t \cos \theta},$$

ce qui est suffisant pour la „simple solution“ afin d'étudier les différents propriétés de la couche limite.

Nous allons étudier ici le problème de l'influence du nombre de Reynolds au temps du premier décollement de la couche limite. En tenant compte, donc, de la condition  $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{n=0} = 0$ , on obtient que le temps du premier décollement au point d'arrêt postérieur  $t_{\text{déc.}}$  vérifie l'équation:

$$(21) \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{8}{\pi} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \right) t_{\text{déc.}} + \varepsilon \left\{ \left( \frac{32}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{12} (4\sqrt{2} - 3) - \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \right] t_{\text{déc.}} \sqrt{t_{\text{déc.}}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t_{\text{déc.}}} \right) \right.$$

$$\left. \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{16}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \right] t_{\text{déc.}} + \frac{8 - \frac{384}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{12} (4\sqrt{2} - 3) - \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \right] t_{\text{déc.}}}{8\sqrt{\pi} - 128 \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{12} (4\sqrt{2} - 3) - \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \right] t_{\text{déc.}}} \right) \right.$$

$$\left. - \sqrt{t_{\text{déc.}}} - \frac{16}{\pi} \left[ \frac{9}{20} - \frac{\pi}{64} (5 + 32\sqrt{2}) t_{\text{déc.}} \sqrt{t_{\text{déc.}}} \right] \right\} = 0,$$

l'équation qui, pourtant, peut être présentée aussi sous la forme plus commode à une intégration numérique par la méthode d'une simple itération:

$$(22) \quad t_{\text{déc.}} = 0.351021 + \varepsilon \left\{ (1.044846 t_{\text{déc.}} \sqrt{t_{\text{déc.}}} - 0.351021 \sqrt{t_{\text{déc.}}}) \left( 1.128379 - \right. \right.$$

$$\left. - 6.429112 t_{\text{déc.}} + \frac{8 - 71.438114 t_{\text{déc.}}}{14.179630 - 42.20692 t_{\text{déc.}}} \right) - 0.3110849 \sqrt{t_{\text{déc.}}} +$$

$$\left. + 3.195426 t_{\text{déc.}} \sqrt{t_{\text{déc.}}} \right\}.$$

Par conséquent, l'équation (22) nous offre cette relation  $t_{\text{déc.}} = f(Re)$  entre le temps du premier décollement et le nombre de Reynolds. Les résultats d'une intégration numérique de cette relation sont présentés dans la figure 3 (courbe 1),



aussi bien que les résultats de Dennis et Staniforth [6] (courbe 2), obtenus par une intégration numérique directement des équations de Navier-Stokes.

On voit, donc, que le temps du premier décollement diminue avec une augmentation du nombre de Reynolds et tend vers la valeur 0.351 de Blasius [7], bien connue. Inversement, en diminuant  $R_e$ , le temps du décollement augmente, ce qui est favorable pour la structure de la couche limite. Les différences entre les valeurs numériques, obtenues ici vis-à-vis celles issues d'une intégration des équations de Navier-Stokes, même pour les très grands nombres de Reynolds (9%) — proviennent du fait qu'on a utilisé ici la „simple solution“ des équations universelles. La solution sera améliorée, bien sûr, en prenant plus de form-paramètres. Pourtant, les différences modérées (même négligeables!) pour les petits nombres de Reynolds (comme le tableau 2 nous le montre: à peine 12% pour  $R_e=100$ ) entre les deux méthodes sert en faveur de la méthode exposé dans ce travail.

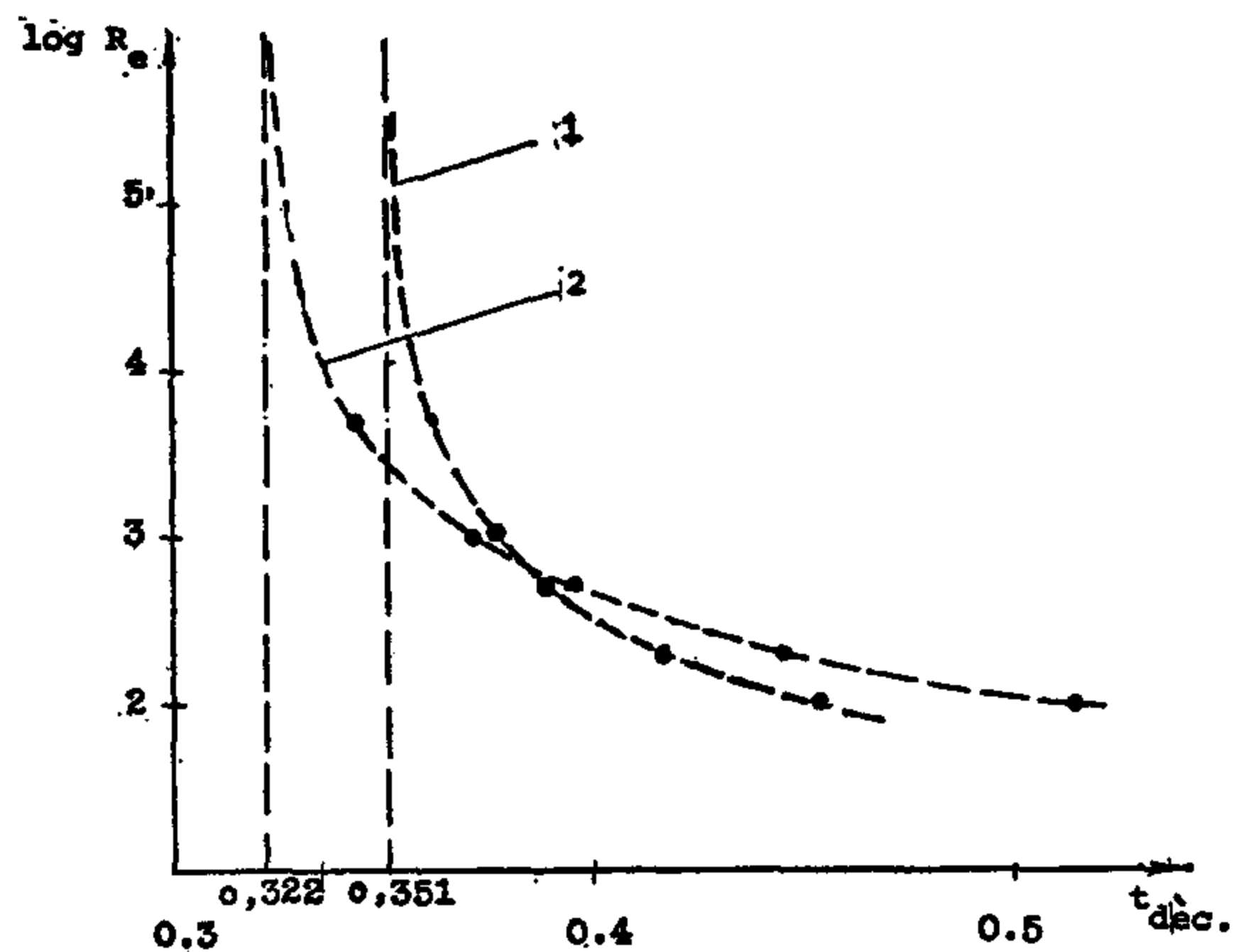


Fig. 3

	$R_e$	100	200	500	1000	5000	$\infty$
Dennis Staniforth	$t_{\text{déc.}}$	0.513	0.445	0.394	0.371	0.343	0.322
Jovanović, Ašk., Đur.	$t_{\text{déc.}}$	0.453	0.416	0.388	0.376	0.361	0.351
Différence	$\Delta\%$	11.70	6.52	1.52	1.35	5.25	9.01

Tableau 2

## 6. Conclusion

Dans ce travail on a développé une méthode du traitement des approximations supérieures de la couche limite non stationnaire d'un fluide incompressible, en utilisant la technique des expansions singulières de Van Dyke. On a analysé en détail la deuxième approximation de la couche limite de la manière que la solution est présentée sous forme d'une combinaison linéaire de trois fonctions, ayant chacune en soi une signification physique assez claire. On a dérivé les équations différentiel-

les universelles du type de Loitsianski, en trouvant même des solutions analytiques pour quelques équations universelles (première partie [1]). A la base de ces solutions on a calculé deux exemples particuliers, où la méthode a donné de bons résultats.

Concernant des possibilités à poursuivre le travail dans ce domaine, on peut dire qu'il serait intéressant, d'abord, à développer une méthode des approximations successives pour traiter les équations d'approximations supérieures de la couche limite afin de confirmer ainsi des résultats obtenus dans ce travail. Ensuite, une autre possibilité consiste dans la résolution du modèle analogue stationnaire par une des méthodes universelles du type paramétrique; de telle manière, la recherche dans ce domaine serait, pour ainsi-dire, menée à bonne fin.

### Références

[1] Jovanović, J., Ašković, R., Đurić, M., *Approximations supérieures dans la théorie de la couche limite non stationnaire et leur traitement paramétrique. Première partie: Analyse des équations de base et leur traitement*, Ibidem.

[2] Van Dyke, M., *Perturbation methods in fluid mechanics*, Academic Press, New York 1964.

[3] Imai I., *Second approximation to the laminar boundary-layer flow over a flat plate*, J.A.S. 24, 1957.

[4] Ting Y.L., *Effect of Free-Stream Vorticity on the Behavior of Viscous Boundary Layer*, J.A.S. 23, 1956.

[5] Jovanović, J., *O aproksimacijama višega reda u Teoriji nestacionarnog graničnog sloja i njihovim parametarskim rešenjima*, Magistarski rad Beograd 1978.

[6] Dennis, C.R., Staniforth, A.N., *Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Berkely 1970*. Springer 1971.

[7] Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co. sixth edition 1968.