Зборник радова Математичког института. Нова серија. књ. 3 (11), 1979.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 3 (11), 1979.

APPROXIMATIONS SUPÉRIEURES DANS LA THÉORIE DE LA COUCHE LIMITE NON-STATIONNAIRE ET LEUR TRAITEMENT PARAMÉTRIQUE

PREMIÈRE PARTIE: ANALYSE DES EQUATIONS DE BASE ET LEUR TRAITEMENT

J. Jovanović, R. Ašković, M. Đurić

(Reçu le 14. Septembre 1978)

Résumé. Une théorie générale et systématique des approximations supérieures a été donnée [2] par Van Dyke, en 1962.,à l'aide de la méthode de l'analyse perturbatrice. Le sujet de ce travail est une étude des effets supérieurs dans le cas de la couche limite non-stationnaire en utilisant cette technique de Van Dyke.

1. Introduction.

Il est bien connu que la théorie de la couche limite de Prandtl représente un premier pas dans une intégration asymptotique des équations de Navier-Stokes pour les grands nombres de Reynolds ($R_e \to \infty$). Cependant, tous les essais à trouver les approximations supérieures dans ce développement asymptotique ont rencontré des grosses difficultés, étant en désaccord dans les cas des différents auteurs. Les premiers travaux dans ce domaine ont traité des problèmes particuliers: c'est Murphy [8] qui a étudié l'influence de la courbure longitudinale de l'obstacle à la couche limite; ensuite, Seban et Bond [6] ont considéré l'influnee de la courbure transversale des corps à symétrie de révolution, tandis que Ferry et Libby [11] ont traité l'influence des tourbillons dans l'écoulement extérieur à la couche limite. C'est-à-dire, a on étudié surtout ce mécanisme extrémement complexe de l'effet mutuel entre la couche limite et l'écoulement extérierur (displacement effect) où dans le cas d'une plaque plane Imai [10], Kuo [5] et Goldstein [12] ont donné des contributions remarquables.

Mais une théorie générale et systématique des approximations supérieures a été donné seulement par Van Dyke [2], en 1962., à l'aide de la méthode de l'analyse perturbatrice [5].

Dans ce travail, donc, on étudie le problème des effets supérieurs dans le cas de la couche limite non stationnaire en utilisant cette technique de Van Dyke. En bref, on a dérivé d'abord les équations de la deuxième approximation de la couche limite pour les deux écoulements: extérieur et intérieur, en faisant une décomposition linéaire de la solution, comme c'est expliqué en [2] et [15]. Ensuite, les équations, ainsi obtenues, sont traitées par une méthode, semblable à celle de Đurić [14], i.e. nous avons fait une universalisation [17] du type de Loitsianski des équations de la deuxième approximation. A la base de la „simple solution", où on a même réussi à trouver des solutions analytiques, on a estimé finalement l'influence des nombres de Reynolds à la couche limite dans les deux cas particuliers: d'une plaque plane et d'un cylindre, mis brusquement en translation à une vitesse constante dans un fluide incompressible initialement au repos.

2. Equations de base.

Après avoir décomposé l'écoulement autour d'un corps (problème plan) en deux parties: partie intérieure (couche limite) et partie extérieure, en faisant des expansions asymptotiques pour toues les grandeurs de l'écoulement pour les grandes valeurs de nombre de Reynolds (expansions par rapport à $\varepsilon = R_{e^{-1/2}}$) — en liant deux expansions asymptotiques à l'aide du principe de Stewartson [7], on a obtenu en (15) deux systèmes d'équations pour la première et la deuxième approximation de la couche limite non stationnaire, ou bien plus précisement:

— pour la première approximation de l'écoulement extérieur:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{e_2}{e_1}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{e_1}{e_2}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\right]\Psi_0 = -e_1 e_2 \Omega_0, \tag{1}$$

$$t \leqslant t_a, \quad \Psi_0 = 0 \text{ pour chaque } \zeta,\ \eta,$$

$$t > t_a, \quad \Psi_0 = 0 \text{ à l'obstacle du corps,}$$

$$\Psi_0 \sim \Psi_{0\infty}\ (\xi, \eta, t \text{ à l'infini.}$$

— pour la première approximation de l'écoulement intérieur:

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial N \partial t}+\frac{\partial \psi_0}{\partial N}\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial N \partial s}-\frac{\partial \psi_0}{\partial s}\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial N^2}=\frac{\partial U_0(s, o, t)}{\partial t}+ \tag{2}$$

$$+U_0(s, o, t)\frac{\partial U_0(s, o, t)}{\partial s}+\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial N^3},$$

$$t \leqslant t_a\ \psi_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial N} = 0 \text{ pour chaque } N,$$

$$t > t_a\ \psi_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial N} = 0 \text{ pour } N = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial N} \to U_0(s, o, t) \text{ pour. } N \to \infty.$$

— pour la deuxième approximation de l'écoulement extérieur:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{e_2}{e_1}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{e_1}{e_2}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\right]\Psi_1=0, \tag{3}$$

$$t \leqslant t_a \quad \Psi_1=0 \text{ pour chaque } \xi,\ \eta,$$

$$t>t_a \quad \Psi_1=-\lim_{N\to\infty}[U_0(s,o,t)(N-\psi_0(s,N,t)] \text{ à l'obstacle du corps,}$$

$$\Psi_1 \to \text{const. à l'infini.}$$

— pour la deuxième approximation de l'écoulement intérieur:

$$\frac{\partial^3\psi_1}{\partial N^3}+\frac{\partial^2\psi_0}{\partial N^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial s}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial N\partial s}\frac{\partial\psi_1}{\partial N}+\frac{\partial\psi_0}{\partial s}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial N^2}-\frac{\partial\psi_0}{\partial N}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial N\partial s}-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial N\partial t}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}K\left[NU_0^2(s,o,t)+\int_N^\infty\left\{U_0^2(s,o,t)-\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial N}\right)^2\right\}dN\right]-\frac{\partial U_1(s,o,t)}{\partial t}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}U_0(s,o,t)\,U_1(s,o,t)+\Omega_0\,V(s,o,t)-K\left(N\frac{\partial^3\psi_0}{\partial N^3}+\frac{\partial^2\psi_0}{\partial N^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\psi_0}{\partial N}\frac{\partial\psi_0}{\partial s}-N\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\psi\partial t}\right), \tag{4}$$

$$t\leqslant t_a \quad \psi_1=\frac{\partial\psi_1}{\partial N}=0 \quad \text{pour chaque } s,\ N,$$

$$t>t_a \quad \psi_1=\frac{\partial\psi_1}{\partial N}=0 \quad \text{pour } N=0,$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial N}\to-\Omega_0 N-KNU_0(s,o,t)+U_1 s,o,t) \text{ pour } N\to\infty,$$

où on a introduit des signes usuels (/2/, /15/).

Toutes ces équations sont valables sous la forme donnée ici si le tourbillon Ω_0 reste constant dans l'écoulement extérieur ne dépendant pas du nombre de Reynolds.

Or, comme c'est évident de l'équation (4), la deuxième approximation de la couche limite est une équation linéaire. D'après une idée de Lenard et Rott ([2], [13]), vu les deuxièmes membres de cette équation, la fonction ψ_1 peut être présentée comme une combinaison linéaire de trois fonctions:

$$\psi_1=\psi_1^v+\psi_1^d+\psi_1^k, \tag{5}$$

où: ψ_1^v reflète la présence des tourbillons dans l'écoulement extérieur, ψ_1^d reflète cet effet mutuel entre les deux écoulements: extérieur et intérieur, et ψ_1^k tient-compte de l'effet de courbure.

En introduisant, donc, l'expression (5) dans l'équation (4), nous pouvons alors décomposer cette équation en une succession des équations et de conditions:

(6) $$\frac{\partial^3 \psi_1^v}{\partial N^3}+\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial N^2}\frac{\partial \psi_1^v}{\partial s}-\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial N \partial s}\frac{\partial \psi_1^v}{\partial N}+\frac{\partial \psi_0}{\partial s}\frac{\partial^2 \psi_1^v}{\partial N^2}-\frac{\partial \psi_0}{\partial N}\frac{\partial^2 \psi_1^v}{\partial N \partial s}-$$

$$-\frac{\partial^2 \psi_1^v}{\partial N \partial t}=\Omega_0 V_1(s, o, t),$$

$$t \leqslant t_a \quad \psi_1^v=\frac{\partial \psi_1^v}{\partial N}=0 \quad \text{pour chaque } N,$$

$$t > t_a \quad \psi_1^v=\frac{\partial \psi_1^v}{\partial N}=0 \quad \text{pour } N=0,$$

$$\frac{\partial \psi_1^v}{\partial N} \to -\Omega_0 N \quad \text{pour } N \to \infty,$$

$$\frac{\partial^3 \psi_1^d}{\partial N^3}+\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial N^2}\frac{\partial \psi_1^d}{\partial s}-\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial N \partial s}\frac{\partial \psi_1^d}{\partial N}+\frac{\partial \psi_0}{\partial s}\frac{\partial^2 \psi_1^d}{\partial N^2}-\frac{\partial \psi_0}{\partial N}\frac{\partial^2 \psi_1^d}{\partial N \partial s}-\frac{\partial^2 \psi_1^d}{\partial N \partial t}=$$

(7) $$=-\frac{\partial U_1(s, o, t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial s} U_0(s, o, t)\, U_1(s, o, t),$$

$$t \leqslant t_a \quad \psi_1^d=\frac{\partial \psi_1^d}{\partial N}=0 \quad \text{pour chaque } N,$$

$$t > t_a \quad \psi_1^d=\frac{\partial \psi_1^d}{\partial N}=0 \quad \text{pour } N=0,$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial N} \to U_1(s, o, t) \quad \text{pour } N \to \infty,$$

$$\frac{\partial^3 \psi_1^K}{\partial N^3}+\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial N^2}\frac{\partial \psi_1^K}{\partial s}-\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial N \partial s}\frac{\partial \psi_1^K}{\partial N}+\frac{\partial \psi_0}{\partial s}\frac{\partial^2 \psi_1^K}{\partial N^2}-\frac{\partial \psi_0}{\partial N}\frac{\partial^2 \psi_1^K}{\partial N \partial s}-\frac{\partial^2 \psi_1^K}{\partial N \partial t}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial s} K\left[N U_0^2(s, o, t)+\int_N^\infty \left\{U_0^2(s, o, t)-\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial N}\right)^2\right\} dN\right]-$$

(8) $$-K\left(N\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial N^3}+\frac{\partial \psi_0}{\partial N^2}+\frac{\partial \psi_0}{N \partial}\frac{\partial \psi_0}{\partial s}-N\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial N \partial t}\right),$$

$$t \leqslant t_a \quad \psi_1^K=\frac{\partial \psi_1^K}{\partial N}=0 \quad \text{pour chaque } N,$$

$$t>t_a \quad \psi_1{}^K=\frac{\partial \psi_1{}^K}{\partial N}=0 \quad \text{pour } N=0,$$

$$\frac{\partial \psi_1{}^K}{\partial N} \to -KN\, U_0(s, o, t) \quad \text{pour } N \to \infty.$$

La validité de ce procédé devient confirmée si l'on réussi à resoudre les équations (6), (7) et (8) en satisfaisant les conditions aux limites.

3. Universalisation des équations différentielles.

Pour solutionner les équations différentielles, obtenues précédemment, on va appliqué la méthode de Đurić [14], qui représente au fond une adaptation de la méthode bien-connue de Loitsianski [1] au problème nonstationnaire. Passons, donc, en bref la solution pour la fonction ψ_0 d'après Đurić.

En supposant la fonction ψ_0 sous la forme:

(9)
$$\psi_0(s, u, t)=\frac{U_0(s, o, t\overset{*}{\delta}_p}{A}\mathcal{F}(\eta, \{g_k\}, \gamma_k\}),$$

où on a pris que:

$$U_0(s, o, t)=\Omega(t)\, V(s),$$

et on a introduit:

(10)
$$\eta=A\frac{N}{\overset{*}{\delta}_p},\quad g_k=\frac{1}{\Omega}\frac{d^k\Omega}{dt^k}\overset{*}{z}_p{}^k,\quad \gamma_k=\Omega^k V^{k-1}\frac{\partial^k V}{\partial s^k}\overset{*}{z}_p{}^k,\quad \overset{*}{z}_p=\overset{*}{\delta}_p{}^2$$

$$k\in(1, 2, \ldots)$$

on obtient l'équation universelle pour la fonction $\mathcal{F}$:

$$\frac{\partial^3\mathcal{F}}{\partial\eta^3}+\frac{\gamma_1}{A^2}\left[1-\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}\right)^2+\mathcal{F}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta^2}\right]+g_1\left(1-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}\right)+\frac{F}{A^2}\eta\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta^2}=$$

$$=\frac{1}{A^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta\,\partial g_k}+b_k\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta\,\partial\gamma_k}\right)+\frac{1}{A^2}\sum_{k=1}^{\infty}c_k\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta\,\partial\gamma_k}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\gamma_k}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta^2}\right),$$

$$\eta=0\quad \mathcal{F}=\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}=0;\quad \eta\to\infty\quad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}\to 1.$$

Ici $\delta_p=\int_0^\infty\left(1-\frac{u}{\Omega}\right)$ représente l'épaisseur de refoulement sur une plaque plane et $A=$const.

Si l'on présente la solution de l'équation (11) sous forme du développement en série:

(12)
$$\mathcal{F}=\mathcal{F}_0(\eta, \{g_k\})+\gamma_1\mathcal{F}_1(\eta, \{g_k\})+\gamma_1{}^2\mathcal{F}_{11}(\eta, \{g_k\})+\ldots,$$

I 11

où:

$$\mathcal{F}_0 = f_{0.0}(\eta) + g_1 f_{0.1}(\eta) + g_1^2 f_{0.11}(\eta) + g_2 f_{0.2}(\eta) + \dots,$$
$$\mathcal{F}_1 = f_{1.0}(\eta) + g_1 f_{1.1}(\eta) + g_1^2 f_{1.11}(\eta) + g_2 f_{1.2}(\eta) + \dots, \tag{13}$$
$$\mathcal{F}_{11} = f_{11.0}(\eta) + g_1 f_{11.1}(\eta) + g_1^2 f_{11.11}(\eta) + g_2 f_{11.2}(\eta) + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et la fonction F de l'équation intégrale de la couche limite sur une plaque plane:

$$\frac{d\overset{*}{z}_p}{dt} = 2F \tag{14}$$

comme suit:

$$F = F_0 + g_1 F_1 + g_1^2 F_{11} + g_2 F_2 + \dots, \tag{15}$$

on obtient (14) un système récursif de équations différentielles ordinaires:

$$L_{0.0}(f_{0.0}) = 0,$$

$$L_2(f_{0.1}) = \frac{1}{A^2}(f'_{0.0} - F_1 \eta f''_{0.0} - 1),$$

$$L_2(f_{0.11}) = \frac{1}{A^2}(2F_1 f'_{0.1} - F_1 \eta f''_{0.1} - F_{11} \eta f''_{0.0}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$L_1(f_{1.0}) = \frac{1}{A^2}[(f'_{0.0})^2 - f_{0.0} f''_{0.0} - 1],$$

$$L_2(f_{1.1}) = \frac{1}{A^2}[2(F_1+1) f'_{1.0} - F_1 \eta f''_{1.0} + 2 f'_{0.1} f'_{0.0} - f_{0.0} f''_{0.1} - f_{0.1} f''_{0.0}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$L_2(f_{11.0}) = \frac{1}{A^2}[2 f'_{0.0} f'_{1.0} - f_{0.0} f''_{1.0} - f_{1.0} f''_{0.0}],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

où on a encore:

$$L_n = \frac{d^3}{d\eta^3} + \frac{F_0}{A^2}\eta \frac{d^2}{d\eta^2} - 2n \frac{F_0}{A^2} \frac{d}{d\eta}.$$

Les conditions aux limites sont:

$$f_{0.0}(0) = f'_{0.0}(0) = 0, \; f'_{0.0}(\infty) = 1,$$
$$f_{1.0}(0) = f_{0.11}(0) = f_{1.0}(0) = \dots = f'_{0.1}(0) = f'_{0.11}(0) = f'_{1.0}(0) = \dots = f'_{0.1}(\infty) =$$
$$= f_{0.11}(\infty) = f'_{1.0}(\infty) = \dots = 0.$$

A l'aide de (12), (13), (14) et (15) on trouve que:

(16) $$F_0 = Af''_{0.1}(0) - F_1 = Af''_{0.1}(0) - 1, \quad F_{11} = Af''_{0.11}(0) \cdots$$

Si l'on veut que ces équations différentielles deviennent du type parabolique, résolvables analytiquement, il convient à choisir que

$$\frac{F_0}{A^2} = 2.$$

Alors, dans ce cas les solutions analytiques de toutes les équations mentionnées peuvent être présentées à l'aide des fonctions de cylindre parabolique $D_{-1-2\alpha}$ (16), liées avec l'intégrale de la fonction de Gauss g_a de la façon:

$$g_\alpha(\eta) = \frac{2^{1/2-\alpha}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} D_{-1-2\alpha}(\eta\sqrt{2}).$$

En voici quelques solutions:

$$f_{0.0}(\eta) = \eta + g_{\frac{1}{2}}(\eta) - \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$f'_{0.1}(\eta) = \frac{1}{A^2}\left[\frac{1}{4} g_0(\eta) + \frac{F_1}{16} g_{-1}(\eta) - g_1(\eta)\right],$$

$$f'_{0.11}(\eta) = \left(\frac{F_{11}}{24A^2} - \frac{F_1^2}{48A^4} - \frac{F_1}{96A^4}\right) g_{-1}(\eta) - \frac{F_1^2}{512A^4} g_2(\eta),$$

. . . .

$$f'_{1.0}(\eta) = \frac{\pi}{2} g_0(\eta) - \frac{1}{2}\left(3\pi + \frac{4}{3}\right) g_1(\eta) + \frac{\pi}{16} g_{-1}(\eta) - \frac{\sqrt{\pi}}{16} g_{-\frac{1}{2}}(\eta) -$$

$$- \frac{\pi}{2} g_1(\eta) g_0(\eta) + \frac{\pi}{2} g_{\frac{1}{2}}(\eta),$$

. . . .

. . . .

A l'aide de ces solutions analytiques, les formules (16) nous offrent que:

$$F_0 = \frac{2}{\pi}, \quad F_1 = -\frac{2}{3}, \quad F_{11} = \frac{\pi}{72}, \quad \ldots .$$

Cependant, pour chaque cas d'écoulement particulier if faut résoudre encore l'équation (14) qui est non linéaire. Il est rationnel parfois de la linéariser en négligeant, en première approximation, le terme en Z^{21} et les termes suivants (la „simple solution"). On obtient ainsi l'intégrale:

$$\overset{*}{z}_p(t) = \frac{4}{\pi} \Omega^{-4/3} \int_{t_a}^{t} \Omega^{4/3} dt,$$

qui peut être calculé pour chaque Ω particulier.

3.1. Universalisation de l'équation pour $\psi_1{}^\nu$

Considérons, d'abord, l'équation (6) pour la fonction $\psi_1{}^\nu$. Comme on le voit bien, cette équation contient la composante normale de la deuxième approximation $V_1(s, o, t)$ de la vitesse extérieure, projeté à la paroi, qui est, d'après (2), (15), liée avec la solution de la couche limite, trouvée auparavant, de la façon

$$V_1(s, o, t) = \lim_{N\to\infty}\left(v_0 + \frac{\partial U_0(s, o, t)}{\partial s} N\right), \tag{18}$$

i.e. tenant compte de (9):

$$V_1(s, o, t) = \lim_{\eta\to\infty}\left[\frac{\overset{*}{\delta}_p}{A}\Omega\frac{dV}{ds}(\eta - \mathcal{F}) - \frac{\overset{*}{\delta}_p}{A\overset{*}{z}_p}\sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma_k}\right].$$

En supposant, ensuite, la fonction $\psi_1{}^\nu$ comme suit:

$$\psi_1{}^\nu(s, n, t) = \frac{\overset{*}{\delta}_p{}^2 \Omega_0}{A^2}\Phi^\nu(\eta, \{g_k\}, \{\gamma_k\}),$$

on obtient pour Φ^ν une équation universelle:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3 \Phi^\nu}{\partial \eta^3} + \frac{\gamma_1}{A^2}\left(\mathcal{F}\frac{\partial^2 \Phi^\nu}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\frac{\partial \Phi^\nu}{\partial \eta}\right) + \frac{F}{A^2}\eta\frac{\partial^2 \Phi^\nu}{\partial \eta^2} - \frac{F}{A^2}\frac{\partial \Phi^\nu}{\partial \eta} = \\
&= \frac{1}{A^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \frac{\partial^2 \Phi^\nu}{\partial \eta \partial g_k} + b_k \frac{\partial^2 \Phi^\nu}{\partial \eta \partial \gamma_k}\right) + \frac{1}{A^2}\sum_{k=1}^{\infty} C_k\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta \partial \gamma_k}\frac{\partial \Phi^\nu}{\partial \eta} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2}\frac{\partial \Phi^\nu}{\partial \gamma_k} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma_k}\frac{\partial^2 \Phi^\nu}{\partial \eta^2} + \mathcal{F}\frac{\partial^2 \Phi^\nu}{\partial \eta \partial \gamma_k}\right) + \\
&\qquad + \frac{1}{A^2}\lim_{\eta\to\infty}\left[(\gamma_1(\eta - \mathcal{F}) - \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma_k}\right],
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\eta = 0 \quad \Phi^\nu = \frac{\partial \Phi^\nu}{\partial \eta} = 0; \quad \eta \to \infty \quad \frac{\partial^2 \Phi^\nu}{\partial \eta^2} \to -1.$$

Si l'on cherche la solution de l'équation (20) sous forme des développements en séries:

$$\Phi^\nu = \Phi_0{}^\nu(\eta, \{g_k\}) + \gamma_1 \Phi_1{}^\nu(\eta, \{g_k\}) + \gamma_1 \Phi_{11}(\eta, \{g_k\}) + \dots, \tag{21}$$

où:

$$\begin{aligned}
\Phi_0{}^\nu &= f^\nu_{0.0}(\eta) + g_1 f^\nu_{0.1}(\eta) + g_1{}^2 f^\nu_{0.11}(\eta) + g_2 f^\nu_{0.2}(\eta) + \dots, \\
\Phi_1{}^\nu &= f^\nu_{1.0}(\eta) + g_1 f^\nu_{1.1}(\eta) + g_1{}^2 f^\nu_{1.11}(\eta) + g_2 f^\nu_{1.2}(\eta) + \dots, \\
\Phi^\nu_{11} &= f^\nu_{11.0}(\eta) + g_1 f^\nu_{1.11}(\eta) + g_1{}^2 f^\nu_{11.11}(\eta) + g_2 f^\nu_{11.2}(\eta) + \dots, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{22}$$

on aura un système récursif des équations différentielles ordinaires:

$$L_{1/2}(f^{\nu}_{0.0}) = 0,$$

$$L_{3/2}(f^{\nu}_{0.1}) = \frac{1}{A^2}[(f^{\nu}_{0.0})' - F_1 \eta (f^{\nu}_{0.0})''],$$

$$L_{5/2}(f^{\nu}_{0.11}) = \frac{1}{A^2}[3 F_1 (f^{\nu}_{0.1})' - (f^{\nu}_{0.1})' - F_1 \eta (f^{\nu}_{0.1})'' + F_{11}(f^{\nu}_{0.0})' - F_{11} \eta (f^{\nu}_{0.0})''],$$

. . . .

$$L_{3/2}(f^{\nu}_{1.0}) = \frac{1}{A^2}[(f^{\nu}_{0.0})' f^{\nu}_{0.0} - (f^{\nu}_{0.0})'' f_{0.0} + \lim_{\eta \to \infty} (\eta - f_{0.0})],$$

$$L_{5/2}(f^{\nu}_{11.0}) = \frac{1}{A^2}[(f^{\nu}_{1.0})' + 3 F_1 (f^{\nu}_{1.0})' - F_1 \eta (f^{\nu}_{1.0})'' + (f^{\nu}_{0.1})' f'_{0.0} +$$

$$+ (f^{\nu}_{0.0})' f_{0.1} - (f^{\nu}_{0.1})'' f_{0.0} - (f^{\nu}_{0.0})'' f_{0.1} - f_{0.1}(\infty)],$$

. . . .

$$L_{5/2}(f^{\nu}_{11.0}) = \frac{1}{A^2}[(f^{\nu}_{1.0})' f'_{0.0} + (f^{\nu}_{0.0})' f'_{1.0} - f^{\nu}_{1.0})'' f_{0.0} - (f^{\nu}_{0.0})'' f_{1.0} - f_{1.0}(\infty],$$

. . . .

. . . .

avec les conditions aux limites:

$$f^{\nu}_{0.0}(0) = f^{\nu'}_{0.0}(0) = 0, \; f^{\nu''}_{0.0}(\infty) = -1,$$

$$f^{\nu}_{0.1}(0) = f^{\nu}_{0.11}(0) = f^{\nu}_{1.0}(0) = \cdots = f^{\nu'}_{0.1}(0) = f^{\nu'}_{0.11}(0) = f^{\nu'}_{1.0}(0) = \cdots$$

$$= f^{\nu''}_{0.1}(\infty) = f^{\nu''}_{0.11}(\infty) = f^{\nu''}_{0.11}(0) = \cdots = 0.$$

Étant du même type que les équations issues du traitement de la première approximation, ces équations ci-contre peuvent être intégrées de la même façon. En voici quelques solutions correspondant à la „simple solution“:

$$f^{\nu'}_{0.0}(\eta) = -\eta,$$

$$f^{\nu'}_{0.1}(\eta) = 0,$$

$$f^{\nu'}_{1.0}(\eta) = \frac{3\pi}{4} g_{\frac{3}{2}}(\eta) - \frac{\pi}{16} g_{\frac{1}{2}}(\eta).$$

3.2. **Universalisation de l'équation pour $\psi_1{}^d$**

Introduisons, d'abord, encore deux ensembles infinis de paramètres:

$$f_k = \frac{1}{U_1(s,o,t)} \frac{\partial^k U_1(s,o,t)}{\partial t^k} \overset{*}{z}_p{}^k, \quad l_k{}^n =$$

(23) $$\frac{1}{U_1(s,o,t))} \frac{\partial^{k+n} U_1(s,o,t)}{\partial s^{1+n} \partial t^{k-1}} \Omega^{n+1} V^{n+1} \overset{*}{z}_p{}^{k+n}$$

$$k \in (1, 2, \ldots), \; n \in (0, 1, 2, \ldots)$$

qui verifient les formules recurrentes ci-contre:

$$d_k^n = l_k^{n+1} + (n+1)\gamma_1 l_k^n - l_1^0 l_k^n,$$

$$e_k^n - l_{k+1}^0 - l_1^0 f_k,$$

$$j_k^n = -f_1 l_k^n + l_{k+1}^n + l_k^n (n+1) g_1 + 2(k+n) F l_k^n,$$

$$p_k = -f_1 f_k + f_{k+1} + 2kF f_k.$$

Or, si l'on suppose la fonction $\psi_1{}^d$ sous la forme:

(24) $$\psi_1{}^d(s,u,t) = \frac{\delta_p(U_1(s,o,t)}{A} \Phi^d(\eta, \{g_k\}, \{\gamma_k\}, \{f_k\}, \{l_k{}^n\}),$$

on obtiendra aussi pour Φ^d une équation universelle

$$\frac{\partial^3 \Phi^d}{\partial \eta^3} + \frac{l_1{}^0}{A^2}\left(1 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2}\Phi^d - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\frac{\partial \Phi^d}{\partial \eta}\right) + \frac{\gamma_1}{A^2}\left(1 + \mathcal{F}\frac{\partial^2 \Phi^d}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\frac{\partial \Phi^d}{\partial \eta}\right) +$$

$$+ \frac{f_1}{A^2}\left(1 - \frac{\partial \Phi^d}{\partial \eta}\right) + \frac{F}{A^2}\eta \frac{\partial^2 \Phi^d}{\partial \eta^2} = \frac{1}{A^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \frac{\partial^2 \Phi^d}{\partial \eta \partial g_k} + b_k \frac{\partial^2 \Phi^d}{\partial \eta \partial \gamma_k} + \right.$$

$$\left. + j_k{}^n \frac{\partial^2 \Phi^d}{\partial \eta \partial l_k{}^n} + p_k \frac{\partial^2 \Phi^d}{\partial \eta \partial f_k}\right) + \frac{1}{A^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k\left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma}\frac{\partial^2 \Phi^d}{\partial \eta \partial \gamma_k} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta^2}\frac{\partial \Phi^d}{\partial \gamma_k}\right) + \right.\right.$$

$$+ \left.\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta \partial \eta_k}\frac{\partial \Phi^d}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma_k}\frac{\partial^2 \Phi^d}{\partial \eta^2}\right)\right] + d_k{}^n\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \Phi^d}{\partial \eta \partial l_k{}^n} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2}\frac{\partial \Phi^d}{\partial l_k{}^n}\right) +$$

$$\left. + e_k{}^n\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \Phi^d}{\partial \eta \partial f_k} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2}\frac{\partial \Phi^d}{\partial f_k}\right)\right\},$$

(25) $$\eta = 0 \;\; \Phi^d = \frac{\partial \Phi^d}{\partial \eta} = 0; \;\; \eta \to \infty \; \frac{\partial \Phi^d}{\partial \eta} \to 1,$$

qui pourrait aussi être traitée de la même façon que celle de (20), i.e.

$$\Phi^d = \Phi_0{}^d(\eta, \{g_k\}) + \gamma_1 \Phi_1{}^d(\eta, \{g_k\}) + f_1 \Phi_{11}^d(\eta, \{g_k\}) + l_1{}^0 \Phi_{111}(\eta, \{g_k\}) +$$

$$+ \gamma_1 f_1 \Phi_{12}^d(\eta, \{g_k\}) + f_1 l_1{}^0 \Phi_{23}^d(\eta, \{g_k\}) + \gamma_1 l_1{}^0 \Phi_{13}^d(\eta, \{g_k\}) +$$

(26) $$+ \gamma_1{}^2 \Phi_{1a}^d(\eta, \{g_k\}) + f_1{}^2 \Phi_{11a}^d(\eta, \{g_k\} + l_1^{02} \Phi_{111a}^d(\eta, \{g_k\}) + \ldots,$$

$$\Phi_0^d = f_{0.0}^d(\eta) + g_1 f_{0.1}^d(\eta) + g^2 f_{0.11}^d(\eta) + g_2 f_{0.2}^d(\eta) + \ldots,$$

(27) $$\Phi_1^d = f_{1.0}^d(\eta) + g_1 f_{1.1}^d(\eta) + g_1{}^2 f_{1.11}^d(\eta) + g_2 f_{1.2}^d(\eta) + \ldots,$$

$$\Phi_{11} = f_{11.0}^d(\eta) + g_1 f_{11.1}^d(\eta) + g_1{}^2 f_{11.11}^d(\eta) + g_2 f_{11.2}^d(\eta) + \ldots,$$

. . . .

. . . .

$$L_0(f_{0.0}^d) = 0,$$

$$L_1(f_{0.1}^d) = -\frac{F_1}{A^2}\eta(f_{0.0}^d)'',$$

$$L_2(f_{0.11}^d) = \frac{1}{A^2}[(2F_1 - 1)(f_{0.1}^d)' - F_1\eta(f_{0.1}^d)'' - F_{11}\eta(f_{0.0}^d)''],$$

. . . .

$$L_1(f_{1.0}^d) = \frac{1}{A^2}[f_{0.0}'(f_{0.0}^d)' - f_{0.0}(f_{0.0}^d)'' - 1],$$

$$L_2(f_{1.1}^d) = \frac{1}{A^2}[(2F_1 + 1)(f_{1.0}^d)' - F_1\eta(f_{1.0}^d)'' - (f_{0.0}^d)'' f_{0.1} -$$

$$-(f_{0.1}^d)'' f_{0.0} + (f_{0.0}^d)' f_{0.1}') + (f_{0.1}^d)' f_{0.0}],$$

. . . .

$$L_1(f_{11.0}^d) = \frac{1}{A^2}[(f_{0.0}^d)' - 1],$$

$$L_2(f_{11.1}^d) = \frac{1}{A^2}[2F_1(f_{11.0}^d)' + (f_{0.1}^d)' - F_1\eta(f_{11.0}^d)''],$$

. . . .

$$L_1(f_{111.0}^d) = \frac{1}{A^2}[f_{0.0}'(f_{0.0}^d)' - f_{0.0}'' f_{0.0}^d - 1],$$

$$L_2(f_{111.1}^d) = \frac{1}{A^2}[(2F_1 + 1)(f_{111.0}^d)' - F_1\eta(f_{111.0}^d)'' + f_{0.0}'(f_{0.1})' +$$

$$+ f_{0.1}'(f_{0.0}^d)' - f_{0.0}'' f_{0.1}^d - f_{0.1}'' f_{0.0}^d],$$

. . . .

$$L_2(f_{12.0}^d) = \frac{1}{A^2}[(f_{11.0}^d)' f_{0.0}' - (f_{11.0}^d)'' f_{0.0} + (f_{1.0}^d)'],$$

. . . .

$$L_2(f_{23.0}^d) = 0,$$

. . . .

$$L_2(f^d_{13.0}) = \frac{1}{A^2}[f'_{0.0}(f^d_{111.0})' - f''_{0.0}(f^d_{111.0} + f'_{0.0}(f^d_{11.10})' - f_{0.0}(f^d_{111.0})'' +$$

$$+ f'_{1.0}(f^d_{0.0})' + f'_{0.0}(f^d_{1.0})' - f''_{1.0} f^d_{0.0} - f''_{0.0} f^d_{1.0}],$$

. . . .

$$L_2(f^d_{1a.0}) = \frac{1}{A^2}[f'_{1.0}(f^d_{0.0})' + f'_{0.0}(f^d_{1.0})' - f_{1.0}(f^d_{0.0})''(f^d_{1.0})''],$$

. . . .

$$L_2(f^d_{11a.0}) = 0,$$

. . . .

$$L_2(f^d_{111a.0}) = \frac{1}{A^2}[f''_{0.0} f^d_{111.0} - (f^d_{111.0})' + f'_{0.0}(f^d_{111.0})' - f''_{0.0} f^d_{111.0}],$$

. . . .

. . . .

$$f^d_{0.0}(0) = f^{d'}_{0.0}(0) = 0, \quad f^{d'}_{0.0}(\infty) = 1,$$

$$f^d_{0.1}(0) = f^d_{0.1}(0) = f^d_{1.0}(0) = \cdots = f^{d'}_{0.1}(0) = f^{d'}_{0.11}(0) = f^{d'}_{1.0}(0) = \cdots =$$

$$= f^{d'}_{0.1}(\infty = f^{d'}_{0.11}(\infty) = f^{d'}_{1.0}(\infty) = \cdots = 0.$$

On donne ici quelques solutions analytiques correspondant à la „simple solution“:

$$f^d_{0.0}(\eta) = \eta + g_{\frac{1}{2}}(\eta) - \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$f^{d'}_{0.1}(\eta) = -\frac{\pi}{24} g_{-1}(\eta),$$

$$f^{d'}_{1.0}(\eta) = f^{d'}_{111.0}(\eta) = -\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2}{3}\right) g_1(\eta) + \frac{\pi}{2} g_0(\eta) + \frac{\pi}{2} g^2_{\frac{1}{2}}(\eta) +$$

$$+ \frac{\pi}{16} g_1(\eta) - \frac{\pi}{2} g_1(\eta) g_0(\eta) - \frac{\sqrt{\pi}}{6} g_{-\frac{1}{2}}(\eta),$$

$$f^{d'}_{11.0}(\eta) = -\pi g_1(\eta) + \frac{\pi}{4} g_0(\eta).$$

3.3. Universalisation de l'équation pour — $\Psi^{\circ\,k}_{1}$.

Avant de traiter cette équation (8), il faut la dériver par rapport à N, en ajoutant une condition de plus à la frontière de la couche limite:

$$\frac{\partial^3 \Psi^{\circ\,k}_{1}}{\partial N^3} \to 0 \text{ pour } N \to \infty;$$

$$\frac{\partial^4 \Psi^{\circ\,k}_{1}}{\partial N^4} + \frac{\partial^3 \Psi^{\circ}_{0}}{\partial N^3}\frac{\partial \Psi^{\circ\,k}_{1}}{\partial s} - \frac{\partial^3 \Psi^{\circ}_{0}}{\partial N^2 \partial s}\frac{\partial \Psi^{\circ\,k}_{1}}{\partial N} + \frac{\partial^2 \Psi^{\circ}_{0}}{\partial s}\frac{\partial^3 \Psi^{\circ\,k}_{1}}{\partial N^3} - \frac{\partial \Psi^{\circ}_{0}}{\partial N}\frac{\partial^3 \Psi^{\circ\,k}_{1}}{\partial N^2 \partial s} -$$

$$- \frac{\partial^3 \Psi^{\circ\,k}_{1}}{\partial N^2 \partial t} = \frac{\partial K}{\partial s}\left(\frac{\partial \Psi^{\circ}_{0}}{\partial N}\right)^2 + K\left(\frac{\partial \Psi^{\circ}_{0}}{\partial N}\frac{\partial^2 \Psi^{\circ}_{0}}{\partial N \partial s} - 2\frac{\partial^3 \Psi^{\circ}_{0}}{\partial N^3} -\right.$$

$$\left. - N\frac{\partial^4 \Psi^{\circ}_{0}}{\partial N^4} - \frac{\partial^2 \Psi^{\circ}_{0}}{\partial N^2}\frac{\partial \Psi^{\circ}_{0}}{\partial s} + \frac{\partial^2 \Psi^{\circ}_{0}}{\partial s} + N\frac{\partial^3 \Psi^{\circ}_{0}}{\partial N^2 \partial t}\right),$$

$$t \leqslant t_a \quad \Psi^{\circ\,k}_{1} = \frac{\partial \Psi^{\circ\,k}_{1}}{\partial N} = 0 \text{ pour chaque } N,$$

$$t > t_a \quad \Psi^{\circ\,k}_{1} = \frac{\partial \Psi^{\circ\,k}_{1}}{\partial N} = 0 \text{ pour } N = 0,$$

(28) $$\frac{\partial \Psi^{\circ\,k}_{1}}{\partial N} \to - KNU_0(s, o, t); \frac{\partial^3 \Psi^{\circ\,k}_{1}}{\partial N^3} \to 0 \text{ pour } N \to \infty.$$

Après avoir introduit, ensuite, un nouvel ensemble infini de paramètres:

(29) $$p_k = \frac{1}{K}\frac{\partial^k K}{\partial s^k}\Omega^k V^k \overset{*}{Z}_p{}^k, \quad k \in (1, 2, \ldots)$$

accompagné de deux formules recurrentes:

$$h_k = kp_k(g_1 + 2F),$$

$$j_k = p_k(k\gamma_1 - p_1) + p_{k+1},$$

nous cherchons la solution pour $\psi_1{}^k$ sous la forme:

$$\Psi^{\circ\,k}_{1}(s, N, t) = \frac{\overset{*}{\delta}_p{}^2 K\Omega V}{A^2}\Phi^k(\eta, \{g_k\}, \{\gamma_k\}, \{p_k\}),$$

et trouvons aussi pour la fonction Φ^k une équation universelle:

$$\frac{\partial^4 \Phi^k}{\partial \eta^4} + \frac{\gamma_1}{A^2}\left[\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \eta^3}\Phi^k - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2}\frac{\partial \Phi^k}{\partial \eta} + F\frac{\partial^3 \Phi^k}{\partial \eta^3} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \mathcal{F}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2}\right] - \frac{g_1}{A^2}\left[\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} + \eta\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2}\right] + \frac{p_1}{A^2}\left[\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \eta^3}\Phi^k - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{F}{A^2}\eta\frac{\partial^3 \Phi^k}{\partial \eta^3} + 2\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \eta^3} + \eta\frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial \eta^4} + \frac{2F}{A^2}\eta\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2} + \frac{F}{A^2}\eta^2\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \eta^3} = \frac{1}{A^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\left(\frac{\partial^3 \Phi^k}{\partial \eta^2 \partial g_k} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta \partial g_k} + + \eta\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \eta^2 \partial g_k}\right) + b_k\left(\frac{\partial^3 \Phi^k}{\partial \eta^2 \partial \gamma_k} + \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \eta^3 \partial \gamma_k} + \eta\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \eta^2 \partial \gamma_k}\right) + h_k\frac{\partial^3 \Phi^k}{\partial \eta^2 \partial p_k}\right] +$$

$$+\frac{1}{A^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[C_k\left(-\frac{\partial^3\mathcal{F}}{\partial\eta^3}\frac{\partial\Phi^k}{\partial\gamma_k}+\frac{\partial^3\mathcal{F}}{\partial\eta^2\partial\gamma_k}\frac{\partial\Phi^k}{\partial\eta}-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\gamma_k}\frac{\partial^3\Phi^k}{\partial\eta^3}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}\frac{\partial^3\Phi^k}{\partial\eta^2\partial\gamma_k}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta\partial\gamma_k}-\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta^2}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\gamma_k}\right)+j_k\left(-\frac{\partial^3\mathcal{F}}{\partial\eta_\varepsilon}\frac{\partial\Phi^k}{\partial\gamma_k}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}\frac{\partial^3\Phi^k}{\partial\eta^2\partial p_k}\right)\right],$$

$$\eta=0\quad \Phi^k=\frac{\partial\Phi^k}{\partial\eta}=0;\quad \eta\to\infty\frac{\partial^2\Phi^k}{\partial\eta^2}\to-1,\quad \frac{\partial^3\Phi^k}{\partial\eta}\to 0. \tag{30}$$

A l'aide des dévloppements en séries:

$$\Phi^k=\Phi_0{}^k(\eta,\{g_k\})+\gamma_1\Phi_1{}^k(\eta,\{g_k\})+p_1\Phi_{11}{}^k(\eta,\{g_k\})+\gamma_1 p_1\Phi_{12}(\eta,\{g_k\})+$$

$$+\gamma_1{}^2\Phi^k_{11a}(\eta,\{g_k\})+p_1{}^2\Phi^k_{11a}(\eta,\{g_k\})+\cdots, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\Phi_0{}^k&=f^k_{0.0}(\eta)+g_1f^k_{a.1}(\eta)+g_1{}^2f^k_{a.11}(\eta)+g_2f^k_{0.2}(\eta)+\cdots,\\ \Phi_1{}^k&=f^k_{1.0}(\eta)+g_1f^k_{1.1}(\eta)+g_1{}^zf^k_{1.11}(\eta)+g_2f^k_{1.2}(\eta)+\cdots,\\ \Phi^k_{11}&=f^k_{11.0}(\eta)+g_1f^k_{11.1}(\eta)+g_1{}^2f^k_{11.11}(\eta)+g_2f^k_{11.2}(\eta)+\cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\tag{32}$$

on aura un système recursif des équations différentielles ordinaires de quatrième ordre:

$$\dot{L}_0(f^k_{0.0})=\frac{1}{A^2}[-2A^2f^{\rm III}_{0.0}-A^2\eta f^{\rm IV}_{0.0}-2F_0\eta f^{\rm II}_{0.0}-F_0\eta^2f^{\rm III}_{0.0}],$$

$$L_1(f^k_{0.1})=\frac{1}{A^2}[(f^k_{0.0})^{\rm II}+f^{\rm I}_{0.0}+\eta f^{\rm II}_{0.0}-F_1\eta(f^k_{0.0})^{\rm III}-2A^2f^{\rm III}_{0.1}-A^2\eta f^{\rm IV}_{0.1}-$$

$$-2F_1\eta f^{\rm II}_{0.0}-F_0\eta^2f^{\rm III}_{0.1}-F_1\eta^2f^{\rm III}_{0.1}+2F_0f_{0.1}],$$

$$\dot{L}(f^k_{0.11})=\frac{1}{A^2}[-F_1\eta(f^k_{0.1})^{\rm III}-F_{11}\eta(f^k_{0.0})^{\rm III}-2A^2f^{\rm III}_{0.11}-A^2\eta f^{\rm IV}_{0.11}-2F_0\eta f^{\rm II}_{0.11}-$$

$$-2F_{11}\eta f^{\rm II}_{0.0}-F\eta^2f^{\rm III}_{0.11}-F_1\eta^2f^{\rm III}_{0.1}-F_{11}\eta^2f^{\rm III}_{0.0}+2F_1(f^k_{0.1})''+4F_0f'_{0.11}+$$

$$+2F_1f'_{0.1}+4F_0\eta f''_{0.11}],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{L}_1(f^k_{1.0})=\frac{1}{A^2}[-f^{\rm III}_{0.0}f^k_{0.0}+f^{\rm II}_{0.0}(f^k_{0.0})'-f_{0.0}(f^k_{0.0})^{\rm III}+f'_{0.0}(f^k_{0.0})^{\rm II}+(f'_{0.0})^2-$$

$$-f_{0.0}f^{\rm II}_{0.0}-2A^2f^{\rm III}_{1.0}-A^2\eta f^{\rm IV}_{1.0}-F_0\eta^2f^{\rm III}_{1.0}+2F_0f'_{1.0}],$$

$$\begin{aligned}\overset{*}{L}_2(f^k_{1.1}) = \frac{1}{A^2}[& -f^{\mathrm{III}}_{0.0} f^k_{0.1} - f^{\mathrm{III}}_{0.1} f^k_{0.0} + f''_{0.0}(f^k_{0.1})' + f^{\mathrm{II}}_{0.1}(f^k_{0.0})' - f_{0.0}(f^k_{0.1})^{\mathrm{III}} - \\ & - f_{0.1}(f^k_{0.0})^{\mathrm{III}} + f'_{0.0}(f^k_{0.1})^{\mathrm{II}} + f'_{0.1}(f^k_{0.0})^{\mathrm{II}} + 2f'_{0.0}f'_{0.1} - f_{0.0}f''_{0.1} - f''_{0.1}f''_{0.0} + 2(f^k_{1.0})'' + \\ & + 2f'_{1.0} + 2\eta f''_{1.0} - F_1\eta(f^k_{1.0})^{\mathrm{III}} - 2A^2 f^{\mathrm{III}}_{1.1} - A^2\eta f^{\mathrm{IV}}_{1.1} - F_0\eta^2 f^{\mathrm{III}}_{1.1} - F_1\eta^2 f^{\mathrm{III}}_{1.0} + \\ & + 4F_0 f'_{1.1} + 2F_1(f^k_{1.1})^{\mathrm{II}} + 2F_1 f'_{1.0} + 2F_0 f''_{1.1}],\end{aligned}$$

. . . .

$$\overset{*}{L}_1(f^k_{11.0}) = \frac{1}{A^2}[(f'_{0\cdot 0})^2 + f'_{0.0}(f^k_{0.0})'' - f^{\mathrm{III}}_{0.0}(f^k_{0\cdot 0}],$$

$$\begin{aligned}\overset{*}{L}_2(f^k_{11.1}) = \frac{1}{A^2}[& 2(f^k_{11.0})^{\mathrm{II}} + 2F_1(f^k_{11.0})^{\mathrm{II}} - f^{\mathrm{III}}_{0.0}f^k_{0.1} - f^{\mathrm{III}}_{0.1}f^k_{0\cdot 0} + f'_{0.0}(f^k_{0.1})' + \\ & + f'_{0.1}(f^k_{0.0})'' + 2f'_{0.0}f'_{0.1} - F_1\eta(f^k_{11.0})^{\mathrm{III}}],\end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned}\overset{*}{L}_2(f^k_{12.0}) = \frac{1}{A^2}[& -2f^{\mathrm{III}}_{0.0}f^k_{11.0} + 2f'_{0.0}(f^k_{11.0})^{\mathrm{II}} + f''_{0.0}(f^k_{11.0})' + (f_{0.0}(f^k_{11.0})^{\mathrm{III}} - \\ & - f^{\mathrm{III}}_{0.0}f^k_{1.0} - f^{\mathrm{III}}_{1.0}f^k_{1.0} + f'_{0.0}(f^k_{1.0})^{\mathrm{II}} + f'_{1.0}(f^k_{0.0})^{\mathrm{II}} + 2f'_{0.0}f'_{1.0}],\end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned}\overset{*}{L}_2(f^k_{11a.0}) = \frac{1}{A^2}[& -f^{\mathrm{III}}_{0.0}f^k_{1.0} - f^{\mathrm{III}}_{1.0}f^k_{0.0} + f^{\mathrm{II}}_{0.0}(f^k_{1.0})' + f^{\mathrm{II}}_{1.0}(f^k_{0.0})' - f_{0.0}(f^k_{1.0})^{\mathrm{III}} - \\ & - f_{1.0}(f^k_{0.0})^{\mathrm{III}} + f'_{0.0}(f^k_{1.0})' + f'_{1.0}(f^k_{0.0})^{\mathrm{II}} + 2f'_{0.0}f'_{1.0} - f_{0.0}f^{\mathrm{II}}_{1.0} - f_{1.0}f^{\mathrm{II}}_{0.0} - \\ & - 2f^{\mathrm{III}}_{11.0} - \eta f^{\mathrm{IV}}_{11.0} + 2F_0\eta f^{\mathrm{II}}_{11.0} - F_0\eta^2 f^{\mathrm{III}}_{11.0} + 4F_0 f_{11.0}],\end{aligned}$$

. . . .

$$\overset{*}{L}(f^k_{111a.0}) = 0,$$

. . . .

. . . .

où

$$\overset{*}{L}_n = \frac{d^4}{d\eta^4} + 2\eta\frac{d^3}{d\eta^3} - 4n\frac{d^2}{d\eta^2}.$$

Les conditions aux limites sont:

$$f_{0.0}^{k}(0)=f_{0.0}^{k'}(0)=0,\ f_{0.0}^{k''}(\infty)=-1,\ f_{0.0}^{k'''}(\infty)=0,$$

$$f_{0.1}^{k}(0)=f_{0.11}^{k}(0)=f_{1.0}^{k}(0)=\cdots=f_{0.1}^{k'}(0)=f_{0.11}^{k'}(0)=f_{1.0}^{k'}(0)=\cdots=f_{0.1}^{k''}(\infty)=$$

$$=f_{0.11}^{k''}(\infty)=f_{1.0}^{k''}(\infty)=\cdots=f_{0.1}^{k'''}(\infty)=f_{0.11}^{k'''}(\infty)=f_{1.0}^{k'''}(\infty)=\cdots=0.$$

Il est plus difficile d'intégrer ces équations que les autres, obtenues précédemment, parce qu'elles sont du quatrième ordre. Mais, on a réussi (15) quand même de les intégrer,; juste comme illustration on donne ici quelques solutions:

$$f_{0.0}^{k}(\eta)=-\frac{1}{2}\eta^2+\frac{1}{2}g_1(\eta)-\frac{1}{4}g_0(\eta)+\frac{1}{8},$$

$$f_{0\cdot 1}^{k'}(\eta)=-\frac{3\pi}{2}g_{\frac{3}{2}}(\eta)+\frac{3\pi}{8}g_{\frac{1}{2}}(\eta)+\frac{\pi}{96}g_{\frac{3}{2}}(\eta)-\frac{\pi}{24}g_{-\frac{1}{2}}(\eta),$$

$$f_{1.0}^{k'}(\eta)=\pi\eta+\frac{\pi}{3}\eta^3+\frac{\pi}{16}\left[(29+32\sqrt{2})-\frac{16}{\pi}\right]g_{\frac{3}{2}}(\eta)-\frac{33\pi}{64}g_{\frac{1}{2}}(\eta)-$$

$$-\frac{3\pi}{64}g_{\frac{3}{2}}(\eta)+\frac{1}{4}\left(3\pi+\frac{2}{3}\right)g_{\frac{1}{2}}(\eta)+\frac{\sqrt{\pi}}{12}g_0(\eta)+\frac{11\sqrt{\pi}}{120}g_{-1}(\eta)+$$

$$+\pi\int_0^{\eta}g_{\frac{1}{2}}^2\,d\eta+\frac{\sqrt{\pi}}{3}(1-\sqrt{2})-\frac{\pi}{4}g_0(\eta)\,g_{\frac{3}{2}}(\eta)+\frac{\pi}{4}g_{\frac{1}{2}}(\eta)\,g_1(\eta)-$$

$$-\frac{\pi}{8}g_0(\eta)\,g_{\frac{1}{2}}(\eta)+\frac{\pi}{8}g_1(\eta)\,g_{\frac{1}{2}}(\eta)-\frac{\pi}{3}\eta^3\operatorname{erf}\eta+\Bigg[-\pi\eta+$$

$$+\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{12}-\frac{5\sqrt{\pi}}{6}\eta^2\right)e^{-\eta^2}\Bigg]\operatorname{erf}\eta+\left(-\frac{7\sqrt{\pi}}{12}+\frac{\sqrt{\pi}}{6}\eta^2\right)e^{-\eta^2}-\frac{1}{2}\eta\,e^{-2\eta^2},$$

$$f_{11\cdot 0}^{k'}(\eta)=\frac{\pi}{8}\left(\frac{9}{2}+8\sqrt{2}\right)g_{\frac{3}{2}}(\eta)-\frac{\pi}{96}g_{-\frac{3}{2}}(\eta)-\frac{7\pi}{64}g_{-\frac{1}{2}}(\eta)-\frac{\pi}{8}g_{\frac{1}{2}}(\eta)-$$

$$-\frac{\pi}{4}g_{\frac{3}{2}}(\eta)\,g_0(\eta)+\frac{\pi}{4}g_{\frac{1}{2}}(\eta)\,g_1(\eta)-\frac{\sqrt{\pi}}{6}(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{2}\int_0^{\eta}g_{\frac{1}{2}}^2\,d\eta,$$

$$\operatorname{erf}\eta=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}e^{-\gamma^2}d\gamma.$$

Les solutions des équations (6), (7) et (8), obtenues ici, peuvent être utilisées pour traiter des problèmes particuliers. On pourait même faire des comparaisons des solutions trouvées à l'aide de la méthode présentée ici et celles trouvées par une intégration des équations de Navier-Stokes (/15/, /17/). Mais, ce sera le sujet d'un autre travail.

References

[1] Loicjanski, L., *Equations universelles et approximations paramétriques dans la théorie de la couche limite laminaire*, Prikl. Mat. Meh. 29(1), 1965.

[2] Van Dyke, M., *Higher approximations in boundary layer theory*. Part 1. *General analysis*, J. Fluid Mech. 14, 1962.

[3] Van Dyke, M., *Higher approximations in boundary layer theory*. Part 2. *Application to leading edges*, J. Fluid Mech. 14, 1962.

[4] Van Dyke, M., *Higher approximations in boundary layer theory*. Part 3. *Parabola in uniform stream*, J. Fluid Mech. 19, 1964.

[5] Van Dyke, M., *Perturbation methods in fluid mechanics*, Academic Press, New York 1964.

[6] Seban, A. R., Bond, R., *Skin-friction and heat-transfer characteristics of a laminar boundary layer on a cylinder in axial incompressible flow*, J.A.S. 18, 1951.

[7] Stewartson K., *The theory of laminar boundary layer in compressible fluids*, Oxford math. monographs, Oxford 1964.

[8] Murphy S., *Some effects of surface curvature on laminar boundary layer flow*, J.A.S. 20, 1953.

[9] Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co. sixth ed. 1968.

]10] Imai, I., *Second approximation to the laminar boundary-layer flow over a flat plate* J.A.S. 24, 1957.

[11] Ferri A., Libby P.A., *Note on a interaction between t!he boundary layer and inviscid flow*, J.A.S. 21. 1954.

[12] Goldstein, S., *Lectures on fluid mechanics*, Interscience, New York 1960.

[13] Lenard, M., Rott N., *Vorticity effect on the stagnation-point flow of a viscous incompressible fluid*, J. Aero. / Space Sci. 26,. 1959.

[14] Đurić, M., *On the universal form of unsteady incompressible boundary layer equation and its solution*, Pub. de L'Inst. Math., 9 (23) 1969.

[15] Jovanović, J., *O aproksimacijama višega reda u teoriji nestacionarnog graničnog sloja i njihovim parametarskim rešenjima*, Magistarski rad 1978.

[16] Whittaker, T.E., Watson, N.G., *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press 1946.

[17] Jovanović, J., Ašković, R., Đurić M., *Approximations supérieures dans la théorie de la couche limite non stationnaire et leur traitement paramétrique*, GAMM annual scientific conference 28—31. 3. 1978. Brussels-Belgium.