

**EBENE STATIONÄRE STRÖMUNGEN DER DISSIPATIONSFREIEN
UNTER DEM EINFLUSS EINES TRANSVERSALEN MAGNETFELDES
BEFINDLICHEN GASE**

Svetislav M. Čantrak

(Dargestellt am 22. Juni 1977)

1. Einleitung und Grundgleichungen der nicht dissipativen Magnetogasdynamik (MGD)

Die ebene, stationäre adiabatische Strömung zähigkeitsloser Gase ist in folgenden Arbeiten [6], [4], [5] ausführlich untersucht worden. Eben solche Probleme aber des idealelektrischleitenden ($\sigma = \infty$) Gases, das im transversalen Magnetfeld strömt, sind in den Arbeiten [3], [10] und [9] besonders betrachtet. Hierbei σ die elektrische Leitfähigkeit bezeichnet. Die obenerwähnte Klasse von magnetogasdynamischen Strömungen ist von besonderer theoretischer und praktischer Bedeutung [2]. Ein gedrängter Überblick über die wichtigsten technischen Anwendungen dieser nicht dissipativen MGD-Strömungen wurde z.B. in [11] gegeben.

Die Gleichungen, die durch die üblichen magnetogasdynamischen Vereinfachungen [2] abgeleitet werden und welche adiabatische Strömungen des idealleitenden zähigkeitslosen Gases vollkommen bestimmen, lauten

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{\mu \rho} \text{rot } \vec{B} \times \vec{B}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0,$$

(1)

$$p = \rho RT, \quad \frac{Ds}{Dt} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } (\vec{v} \times \vec{B}), \quad \text{div } \vec{B} = 0,$$

wobei ρ die Dichte, p der Druck, \vec{v} der Geschwindigkeitsvektor, s die spezifische Entropie, T die absolute Temperatur, R die Gaskonstante, μ die magnetische Permeabilität und \vec{B} die Magnetinduktion sind. Die Relaxationsvorgänge die Magnetisierbarkeit und die Polarisierung im strömenden idealleitenden Gas werden vernachlässigt [2].

Im Falle einer ebenen stationären Strömung unter dem Einfluß eines zur Strömungsebene senkrecht gerichteten (transversalen) Magnetfeldes lassen sich die Gleichungen (1) vereinfachen. Da es sich hier um eine ebene Strömung handelt, benützen wir die kartesischen Koordinaten x, y und z . Das Gleichungssystem (1), unter den folgenden Voraussetzungen $\partial/\partial t = \partial/\partial z = 0$, $\vec{v}(v_x, v_y, 0)$ und $\vec{B}(0, 0, B)$, lautet nun [10]

$$(2), (3) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_k = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v^2}{2} - 2\omega v_k = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{B}{\mu\rho} \frac{\partial B}{\partial x_i},$$

$$(4), (5) \quad V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\rho}{\rho^\kappa} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} B v_k = 0,$$

wobei $i, k = 1, 2$ $i \neq k$, $x_{1,2} = x, y$ $v_{1,2} = -v_x, v_y$ $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ und $2\omega = \partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y$ die Wirbelstärke sind, während κ den Isentropenexponenten darstellt.

In der vorliegenden Arbeit wird die Methode, die von K. Voronjec [1], [4] entwickelt wurde, auf die magnetogasdynamischen mit den Gleichungen (2)–(5) beschriebenen Strömungsprobleme verwendet.

2. Integration und Charakteristiken der MGD-Gleichungen

Nach der VORONJECschen Methode werden die zu der Familie der Stromlinien $\psi(x, y) = \text{const.}$ orthogonalen Trajektorien $\varphi(x, y) = \text{const.}$ eingeführt, wobei die Funktion $\gamma(x, y)$ erscheint. Die Größe $1/\rho\gamma$ stellt nämlich den Integrationsfaktor der Differentialgleichung orthogonaler etwas vorher erwähnter Trajektorien $\rho(v_x dx + v_y dy) = 0$ dar. Aus der Kontinuitätsgleichung (2) folgt [1]

$$(6) \quad \rho v_x = \rho\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad \rho v_y = \rho\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Die Energiegleichung (4) und Magnetinduktionsgleichung (5) führen mittels (2) daher zu

$$(7), (8) \quad p = \rho^\kappa \varepsilon(\psi) \quad \text{und} \quad B = \rho \mathcal{B}(\psi)$$

wobei ε und \mathcal{B} einige beliebige Funktionen von der Stromfunktion ψ sind [1], [12]. Zur Erläuterung der physikalischen Bedeutung von ε und \mathcal{B} bemerken wir, daß sich ε leicht durch die Entropie s ausdrücken läßt und daß die Funktion \mathcal{B} mit dem induzierten Magnetfeld verbunden ist. In diesem Falle bleiben die Entropie und die Größe B/ρ für jedes Gasteilchen konstant, die Strömung ist isentrop und isomagnetisch. Wenn ε und \mathcal{B} aber im gesamten Strömungsfeld konstant sind, nennen wir die Strömung homentrop und homomagnetisch.

Nach dem Einsetzen (7) und (8) in (3) erhält man

$$(3') \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \varepsilon \rho^{\kappa-1} + \frac{1}{\mu} \rho \mathcal{B}^2 \right) = - \left(\frac{1}{\kappa-1} \rho^\kappa \varepsilon' + \frac{1}{\mu} \rho^2 \mathcal{B} \mathcal{B}' - 2\omega \right) v_k,$$

mit $i \neq k$ und $v_{1,2} = -v_x, v_y$. ε' und \mathcal{B}' sind die Ableitungen der Funktionen ε und \mathcal{B} nach ψ . Die Kompatibilitätsbedingung der Bewegungsgleichungen (3') lautet [10]

$$(9) \quad 2\omega = \rho \left(\frac{1}{x-1} \rho^{x-1} \varepsilon' + \frac{1}{\mu} \rho \mathcal{B} \mathcal{B}' - \chi' \right),$$

wo χ eine beliebige Funktion von ψ und $\chi' = d\chi/d\psi$ ist. Das Integral der Gleichungen (3') wird nun mittels (9) in folgender Form

$$(10) \quad \frac{v^2}{2} + \frac{x}{x-1} \rho^{x-1} \varepsilon(\psi) + \frac{1}{\mu} \rho [\mathcal{B}(\psi)]^2 = \chi(\psi)$$

dargestellt. Dabei χ bedeutet eine unveränderliche spezifische Gesamtenthalpie eines Gasteilchens. Es ist anschaulich, daß es sich hier um die isoenergetische Strömung handelt. Falls die Funktion χ auf allen Stromlinien denselben Wert hat, ist die Strömung homenergetisch.

Das Theorem von Crocco in der MGD [11] läßt sich aus den Bewegungsgleichungen (3) mittels (10) ableiten und im unseren Fall lautet [10]

$$(11) \quad \nabla \chi = \vec{v} \times 2\omega \vec{k} + \frac{1}{\mu} \rho \mathcal{B} \nabla \mathcal{B} + T \nabla s.$$

So wie im Ausdruck (9) verknüpft dieser Satz Entropiegradienten mit dem örtlichen Wirbel $2\omega \vec{k}$. Wie man andererseits aus (1) mit Hilfe (8) leicht einsieht, gelten nun $\vec{F}_L = (\text{rot } \vec{B} \times \vec{B})/\mu\rho = -\mathcal{B}(\mathcal{B} \nabla \rho + \rho \mathcal{B}' \nabla \psi)/\mu$. Daraus folgt, daß die LORENTZ-Kraft \vec{F}_L bei homomagnetischer Strömung ($\mathcal{B} = \text{const}$) ein Potential besitzt und daß man keine Magnetfeldwirkung auf das Wirbelfeld dann ausübt. Dieselbe Folgerung erhalten wir aus den Ausdrücken (9) und (11), die aber daher noch notwendige und hinreichende Voraussetzungen für das Auftreten von Potentialströmungen in der MGD geben [10].

Es ist leicht einzusehen, daß die Gleichungen (9) und (10) mittelst (6) lauten

$$(9') \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{d\chi}{d\psi} - \frac{1}{x-1} \rho^{x-1} \frac{d\varepsilon}{d\psi} - \frac{1}{\mu} \rho \mathcal{B} \frac{d\mathcal{B}}{d\psi},$$

$$(10') \quad \frac{1}{2\rho^2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{x}{x-1} \rho^{x-1} \varepsilon(\psi) + \frac{1}{\mu} \rho \mathcal{B}^2(\psi) = \chi(\psi).$$

Eine spezielle Lösung dieses Gleichungssystems ist in [10] betrachtet.

Die Kompatibilitätsbedingungen $\text{rot}(\vec{v}/\gamma) = 0$ und $\text{div} \rho \vec{v} = 0$ der Gleichungen (6) werden nun in der nächsten Form

$$(12) \quad 2\omega = -\nabla \gamma \cdot \nabla \psi / \rho \gamma \quad \text{und} \quad \partial(\rho v_x)/\partial x + \partial(\rho v_y)/\partial y = 0$$

dargestellt. Diese Ergänzungsverbindungen müssen dabei mit den abhängigen Veränderlichen befriedigen. Die Charakteristiken des Gleichungssystems (2)–(5) sind z.B. in [13] gegeben. In der Arbeit [10] leiteten wir mittels (2)–(5), (6) und (9) die folgende längs der Kurve $y=y(x)$ geltende Gleichung

$$(13) \quad \frac{dv_y}{dx} + \left(\frac{1}{y_1'} + \frac{1}{y_2'} - \frac{1}{y'} \right) \frac{dv_x}{dx} + \frac{(y_1' - y')(y_2' - y')}{y' y_1' y_2'} \frac{\partial v_x}{\partial x} =$$

$$\frac{-1}{v_y - v_x y'} \left\{ \frac{C_\sigma^2}{1+m} \left[\frac{1}{x(x-1)} \frac{d \ln \varepsilon}{dx} + \frac{m}{2} \frac{d \ln \mathcal{B}^2}{dx} \right] - \frac{d\chi}{dx} \right\} \left[1 - \frac{y'}{2} \left(\frac{1}{y_1'} + \frac{1}{y_2'} \right) \right]$$

her, wobei $d/dx = \partial/\partial x + y' \partial/\partial y$ die längs der Kurve $y=y(x)$ genommene Ableitung nach x bezeichnet. Wenn die Kurve $y=y(x)$ eine Charakteristik des Systems (2)–(5) darstellt, ist es dann $y'=y_1'$ bzw. $y'=y_2'$ (x) bei $y_{1,2} = (v_x v_y \pm C_\sigma \sqrt{v^2 - C_\sigma^2}) / (v_x^2 - C_\sigma^2)$. Die Größe $C_\sigma^2 = C^2 + C_B^2$ ist eine Phasengeschwindigkeit magnetoakustische Wellen d. h. magnetische Schallgeschwindigkeit, wobei $C_B = B/\sqrt{\mu\rho}$ die ALFVEN-Geschwindigkeit, $C^2 = \kappa p/\rho$ die Schallgeschwindigkeit und $m = (C_B/C)^2$ der Magnetparameter sind.

Nun werden die Veränderlichen x und y bzw. v_x und v_y durch die krummlinigen rechtwinkligen Koordinaten φ und ψ bzw. v und den Winkel ϑ ersetzt, den der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} mit der positiven x -Richtung bildet [1]. Es folgt dann aus (12) mittels (6) der Ausdruck $2\omega = -\rho v^2 \partial \ln \gamma / \partial \psi$, so daß die Kompatibilitätsbedingung (9) mit Hilfe (10) folgendermaßen lautet [12]

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial \chi} \ln \gamma^2 = \frac{1 - \frac{1}{\kappa-1} \rho^{\kappa-1} \frac{d\varepsilon}{d\chi} - \frac{1}{\mu} \rho \mathcal{B} \frac{d\mathcal{B}}{d\chi}}{\chi - \frac{\kappa}{\kappa-1} \rho^{\kappa-1} \varepsilon - \frac{1}{\mu} \rho \mathcal{B}^2},$$

wobei $\lambda' = \chi' d\lambda/d\chi$, $\lambda = \varepsilon, \mathcal{B}$ ist. Hierbei wurden die Ausdrücke (12) in der Form

$$(15) \quad \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \rho v}{\partial \varphi} + \rho^2 v \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = 0 \quad \text{und} \quad \rho \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{v}{\gamma} - \frac{v}{\gamma^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} = 0$$

geschrieben [1]. Diese Bedingungen (15) lassen sich nun unter Benutzung der Gleichungen (10) und (14) nach einfachen Umformungen [10] auf die folgende Form

$$(16) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = \frac{\frac{\kappa(\kappa+1)}{\kappa-1} \rho^{\kappa-1} \varepsilon + \frac{3}{\mu} \rho \mathcal{B}^2 - 2\chi}{2\kappa\gamma\rho^{\kappa+1}\varepsilon \left(\chi - \frac{\kappa}{\kappa-1} \rho^{\kappa-1} \varepsilon - \frac{1}{\mu} \rho \mathcal{B}^2 \right)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho^\kappa \varepsilon),$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} = - \frac{\gamma}{2 \left(\chi - \frac{\kappa}{\kappa-1} \rho^{\kappa-1} \varepsilon - \frac{1}{\mu} \rho \mathcal{B}^2 \right)} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\rho^\kappa \varepsilon + \frac{1}{2\mu} \rho^2 \mathcal{B}^2 \right),$$

bringen. Falls, daß kein Magnetfeld vorhanden ist, gehen die Ausdrücke (16) in die Bedingungen von K. Voronjec [1] über. Der Ausdruck (13), wenn $y=y(x)$ die mit der Gleichung $(y')_{1,2}=\operatorname{tg}(\vartheta \pm \alpha_\sigma)$ gegebene Charakteristik bedeutet, lautet nun [10]

$$(17) \quad d\vartheta \mp (M_\sigma^2 - 1)^{1/2} \frac{dv}{v} = \pm \frac{(M_\sigma^2 - 1)^{1/2}}{M_\sigma^2 C_\sigma^2} \left\{ \frac{C_\sigma^2}{1+m} \left[\frac{1}{x(x-1)} d \ln \varepsilon + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m}{2} d \ln \mathcal{B}^2 \right] - d\chi \right\},$$

und stellt dabei eine Verallgemeinerung der bekannten Formel [11] dar, wo $\alpha_\sigma = \arcsin M_\sigma^{-1}$ und $M_\sigma = v/C_\sigma$ sind.

Mit Hilfe der oben hergeleiteten Beziehungen kann man schließen, daß die betrachtete magnetische Strömung durch die Gleichungen (6), (9), (10), d.h. (9') und (10') bzw. (14), (15), (10) d.h. (14) und (16) definiert ist. Es soll nämlich ρ , v_x und v_y d.h. φ und ψ bzw. v , ϑ und ρ finden, so daß die Bedingungen (6), (9) und (10) bzw. (14) und (16) befriedigt werden. Die Größen ε , \mathcal{B} , χ und γ sind unbestimmt, während p und B aus den Gleichungen (7) und (8) hervorgehen. Die Zahl der unbekanntenen Größen ist also größer als die Zahl der Bedingungen, die diese Größen befriedigen müssen, so daß wir nun die verschiedenen Voraussetzungen physikalischer Bedeutung über die Form der beliebigen Funktionen ε , \mathcal{B} und χ bzw. γ einführen können.

3. Über einige exakte Lösungen der MGD-Wirbelströmung

In der Arbeit [10] wurden die möglichen Strömungen in Abhängigkeit vom Charakter folgender Funktionen ε , \mathcal{B} und χ betrachtet. Die gewonnenen Ergebnisse lassen einige Folgerungen ziehen, die für Theorie der magnetogasdynamischen Strömung von Interesse sind. Aus (9), (11), und (10) folgt nämlich:

a) daß die Strömung wirbelfrei ist, wenn es entweder gleichzeitig $\varepsilon = \text{const}$, $\mathcal{B} = \text{const}$ und $\chi = \text{const}$ oder $\rho^{x-1} \varepsilon' / (x-1) + \rho \mathcal{B} \mathcal{B}' / \mu = \chi'$ ist,

b) daß die homenergetische wirbelfreie Strömung für $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\psi)$ nicht homentrop bzw. die homenergetische homentropische Strömung für $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\psi)$ nicht wirbelfrei ist,

c) wenn man voraussetzt, daß p die Funktion von ψ d.h. $p = p(\psi)$ darstellt erhält man $\vec{v} \cdot \nabla \lambda \equiv v_k \partial \lambda / \partial x_k = 0$ und $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, wobei $\lambda = p, \rho, v^2, B, \varepsilon, \mathcal{B}, \chi$ und $\omega \neq 0$ sind. In [13] ist das Beispiel betrachtet, in dem die Strömungslinien entweder die konzentrischen Kreise oder die parallelen geraden Linien sind.

Es soll nun bemerkt werden, wie es oben schon festgestellt wurde, daß γ aus (14) bestimmt wird. In gewisser Beziehung erlaubt das aber, die verschiedenen Voraussetzungen über diese Funktion $\gamma(\varphi, \psi)$ einzuführen und danach die einzelnen Strömungsfälle zu erhalten. Nämlich:

a) Für $\gamma = \text{const}$ oder $\gamma = \gamma(\varphi)$ erhält man die Potentialströmung. Für $\gamma = \gamma_1(\psi) \gamma_2(\varphi) / \rho$ der Vektor $\vec{\rho v} / \gamma_1$ muß ein Potentialvektor sein, so daß die Funktionen der komplexen Variablen angewandt werden können, obwohl die Strömung wirbelbehaftet ist [10].

b) Wenn $\rho = \rho(\psi)$ ist, dann mittels (14) gilt $\gamma = \gamma(\psi)$ und aus (16) folgt $\vartheta = \vartheta(\varphi)$. Die Stromlinien sind wie in [4] und [5].

c) Unter der Voraussetzung, daß $\gamma = v$ oder $\gamma = f(\varphi)v$ ist, erhält man aus (14) und (10) $\rho^x \varepsilon + \rho^2 \mathcal{B}^2/2\mu = \mathcal{F}(\varphi)$, so daß aus (16) $\vartheta = \vartheta(\psi)$ folgt d.h. die Stromlinien die geraden Linien wie im Falle des nichtleitenden Gases [5] sind.

d) Bei Einführung der Funktion $u = u(\rho, \psi)$ durch die Definition $u(\rho, \psi) = \rho\chi - \rho^x \varepsilon/(\chi-1) - \rho^2 \mathcal{B}^2/2\mu$, ergibt sich aus (9) und (10) $2\omega = -\partial u/\partial \psi$ und $v^2 = 2 \partial u/\partial \rho$ [4]. Es ist nun aber leicht zu sehen, daß die Gleichung (14) mit $u = F(\varphi)$ befriedigt wird, wobei $\gamma^2 = f(\varphi)/\rho$ ist.

e) Die allgemeinen Voraussetzungen $\gamma = \gamma_1(\varphi)\gamma_2(\varphi, \psi)$ oder $\gamma = \gamma_1(\varphi)\gamma_2(\psi)$ d.h. $\gamma = \gamma(\psi)$ sind auch möglich.

Nun betrachtet man getrennt der besonders interessante Fall $\gamma^2 = \chi(\psi)$, wie es in dem folgenden Abschnitt zu sehen ist. Setzt man nämlich $\gamma^2 = \chi(\psi)$ in (14) ein, so erhält man $\rho^{x-1} (d\varepsilon/d\chi - \varepsilon/\chi)/(\chi-1) = \rho \mathcal{B} (\mathcal{B}/\chi - d\mathcal{B}/d\chi)/\mu$. Hieraus folgt $\varepsilon = k\chi^x$ und $\mathcal{B} = b\chi$, wobei k bzw. b Konstante sind. In diesem Fall kann man leicht bemerken, daß die homenergetische Strömung wirbelfrei ist. Wenn man nun durch die Ausdrücke $\lambda = \rho\chi$ auch $d\psi_1/d\psi = \sqrt{\chi}$ die neue Funktion $\lambda(\varphi, \psi)$ und die neue unabhängige Variable ψ_1 einführt, erhält man aus (16)

$$(18) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi_1} = f(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} = F(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial \psi_1},$$

wo zur Abkürzung

$$(19) \quad f(\lambda) = - \frac{1 - kx(x+1)\lambda^{x-1}/2(x-1) - 3b^2\lambda/2\mu}{\lambda^2 [1 - kx\lambda^{x-1}/(x-1) - b^2\lambda/\mu]},$$

$$F(\lambda) = - \frac{kx\lambda^{x-1} + b^2\lambda/\mu}{2 [1 - kx\lambda^{x-1}/(x-1) - b^2\lambda/\mu]}$$

bezeichnet wurde [12]. Nun wird noch auch die Größe $\tau^2 = v^2/\chi$ anstelle von v eingeführt. Die Gleichungen (6) lassen sich dann zu den Gleichungen

$$(20) \quad \lambda \tau \cos \vartheta = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad \lambda \tau \sin \vartheta = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial x}$$

zurückführen. Aus (20) kann man nun schließen, daß das durch die Dichte λ und die Geschwindigkeit τ definierte Gas wirbelfrei strömt. Diese wirbelfreie Strömung ist dabei homentrop und homomagnetisch, wie es aus dem mittels der Gleichung (10) gewonnenen Ausdruck $\tau^2/2 + kx\lambda^{x-1}/(x-1) + b^2\lambda/\mu = 1$ hervorgeht. So gelangen wir zur zwischen der wirbelfreien und wirbelbehafteten magnetogasdynamischen Strömung bestehenden Analogie [4], [12]. Daraus folgt nämlich, daß jeder bekannten homentropischen wirbelfreien MGD Strömung eines idealleitenden Gases mit der Dichte λ und der Geschwindigkeit τ eine wirbelbehaftete isentropische MGD Strömung eines idealleitenden Gases mit der Dichte ρ und mit der Geschwindigkeit v entspricht, wobei

$$(21) \quad \rho = \lambda/\chi \quad \text{und} \quad v = \tau \sqrt{\chi}$$

sind. Dabei bleibt das Strömungsbild unverändert, weil $d\psi_1/d\psi = \sqrt{\chi}$ ist. Bevor wir uns im nächsten Abschnitt der Anwendung der so erhaltenen Ergebnisse zuwenden, seien noch zwei folgende Differentialgleichungen

$$(22), (23) \quad \frac{1}{F} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \lambda^2} - f \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{1}{F}\right)' \frac{\partial \psi_1}{\partial \lambda} = 0, \quad \left(\frac{d\vartheta}{d\lambda}\right)^2 - fF = 0$$

erwähnt, die aus (18) unter der Bedingung $D \equiv \partial(\vartheta, \lambda)/\partial(\psi_1, \varphi) \neq 0$ hervorgehen [10]. Die Funktionen $\psi_1(\vartheta, \lambda)$ und $\vartheta = \vartheta(\lambda)$ werden nun aus den Gleichungen (22) und (23) bestimmt, wobei $f(\lambda)$ und $F(\lambda)$ durch (19) definiert sind. Als Beispiel betrachtet man das Prandtl-Meyer Problem, wie das aus dem folgenden Abschnitt zu sehen ist.

4. Beispiel. Eine wirbelbehaftete magnetogasdynamische Verallgemeinerung der Prandtl-Meyerschen Strömung

Die folgende Betrachtung hat vorwiegend das Ziel die wirbelbehaftete Umströmung, unter Benutzung der oben erwähnten Analogie, einer konvexen Ecke mit dem idealeitenden Gas zu untersuchen. Zu diesem Zweck muß zunächst die wirbelfreie, homentropische, homomagnetische Umströmung gelöst werden [7], [8], [10]. Um die Lösungen dieser wirbelfreien Strömung zu finden, können wir die Gleichungen (10) und (17) bzw. (23) verwenden, wie es in [10] ausführlich gegeben ist. In dieser Arbeit, indessen, werden diese Lösungen auf andere Weise erreicht. Zuerst sei angenommen, daß die Geschwindigkeit $\vec{\tau}$ ein Potential φ besitzt d.h. $\vec{\tau} = \nabla \varphi$ und daß $\partial/\partial r = 0$ ist, wobei die Polarkoordinaten r, θ angewandt werden. Unter Benutzung der in dieser Arbeit etwas vorher gewonnenen Beziehungen zeigt man leicht die Gültigkeit folgender Formeln $m = m_* \zeta^{n-2}$, $\lambda/\lambda_* = \zeta^n$ und $C_\sigma/C_{\sigma,*} = \zeta [(1 + m_* \zeta^{n-2})/(1 + m_*)]^{1/2}$, wobei $n = 2/(\alpha - 1)$, $\zeta = C/C_*$, $m_* = (C_{B,*}/C_*)^2$ und $0 \leq m_* < \infty$ sind. Kritische Werte d.h. die Werte der magnetogasdynamischen Größen für $M_\sigma = 1$ kennzeichnen wir durch den Index „*“. Im betrachteten Problem ist $\varphi = r q(\theta)$, so daß die Gleichungen (10) und (2) ($\text{div } \lambda \vec{\tau} = 0$) nun folgendermaßen lauten

$$(24) \quad \frac{1}{2} (q^2 + q'^2) + \frac{\zeta^2 + (\alpha - 1) m_* \zeta^n}{C_{\sigma,*}^{-2} (\alpha - 1) (1 + m_*)} = \frac{C_{\sigma,*}^2}{2} \frac{\alpha + 1 + 3(\alpha - 1) m_*}{(\alpha - 1) (1 + m_*)},$$

$$(25) \quad n \zeta^{n-1} q' \zeta' + (q + q'') \zeta^n = 0,$$

wo $v' \equiv d v/d \theta$, $v = q, q', \zeta$. Differenziert man die Gleichung (24) nach θ , so erhält man mit Hilfe (25) $q' = C_\sigma$. Aus (24) bestimmt man danach die Funktion q . Nun lassen sich die Lösungen der betrachteten Potentialströmung in den folgenden Formen

$$(26) \quad \lambda/\lambda_* = \zeta^n, \quad \tau_\theta = C_\sigma, \quad \tau_r/C_{\sigma,*} = \{[(\alpha + 1)(1 - \zeta^2)/(\alpha - 1) + 3m_*(1 - \zeta^n)]/(1 + m_*)\}^{1/2},$$

$$p/p_* = \zeta^{n\alpha}, \quad \tau/C_{\sigma,*} = \{[(\alpha + 1)/(\alpha - 1) - n\zeta^2 + m_*(3 - 2\zeta^n)]/(1 + m_*)\}^{1/2}$$

schreiben, wobei λ die Dichte und τ_r, τ_θ die Geschwindigkeitskomponenten sind. Die Stromfunktion $\psi_1(r, \theta) = -r \lambda q'$ lautet nun

$$(26') \quad \psi_1 = K_* r \zeta^{n+1} \{[1 + m_* \zeta^{n(2-\alpha)}]/(1 + m_*)\}^{1/2},$$

wo $K_* = -\lambda_* C_{\sigma,*}$ ist.

Die Funktion $\zeta = \zeta(\theta)$ kann durch Integration des konvergenten uneigentlichen aus (25) mittels q, q' und $q'' = \zeta' dq'/d\zeta$ gewonnenen Integrals

$$(27) \quad \theta = -\frac{1}{\kappa-1} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{1-\delta}^{\zeta} \frac{(\kappa+1+3m_*\zeta^{\kappa-2}) d\zeta}{\left\{ (1+m_*\zeta^{\kappa-2}) \left[\frac{\kappa+1}{\kappa-1} (1-\zeta^2) + 3m_* (1-\zeta^\kappa) \right] \right\}^{1/2}}$$

gefunden werden, wobei $0 \leq \zeta \leq 1$ für beliebige m_* ist. Im allgemeinen muß man diese Integration numerisch durchführen, nur in gewissen Sonderfällen ($m^*=0$, $m^* \rightarrow \infty$, $\kappa=2$ bei beliebige m^*) ergeben sich die Lösungen von der Gleichung (27) in geschlossener Form. Im folgenden betrachten wir magnetogasdynamische Strömungen, bei denen $m_* \rightarrow \infty$ d.h. $m_* \gg 1$ ist. In diesem Fall folgt aus (27)

$$(28) \quad \zeta = \cos^{\kappa-1} \theta_\sigma, \quad 0 \leq \theta_\sigma \equiv \theta/\sqrt{3} < \pi/2$$

so daß $\theta_{\max} = \sqrt{3} \pi/2 = 155^\circ 53'$ ($\theta_{\max} = 220^\circ 27'$ für $m_* = 0$ und $\kappa = 1,4$) und $\vartheta_{\max} = \theta_{\max} - \pi/2 = 65^\circ 53'$ sind. Die Ausdrücke (26) und (26') mittels (28) lauten nun

$$(29) \quad \begin{aligned} \lambda/\lambda_* &= \cos^2 \theta_\sigma, & p/p_* &= \cos^{2\kappa} \theta_\sigma, & \tau_\theta/C_{\sigma,*} &= C_\sigma/C_{\sigma,*} = \cos \theta_\sigma, \\ \tau_r/C_{\sigma,*} &= \sqrt{3} \sin \theta_\sigma, & \tau/C_{\sigma,*} &= (3-2\cos^2 \theta_\sigma)^{1/2} \text{ und } \psi_1 &= K_* r \cos^3 \theta_\sigma. \end{aligned}$$

Die wichtigsten der hier hergeleiteten Beziehungen (28) und (29) sind in Abb. 1 für $\kappa=1,4$ graphisch dargestellt.

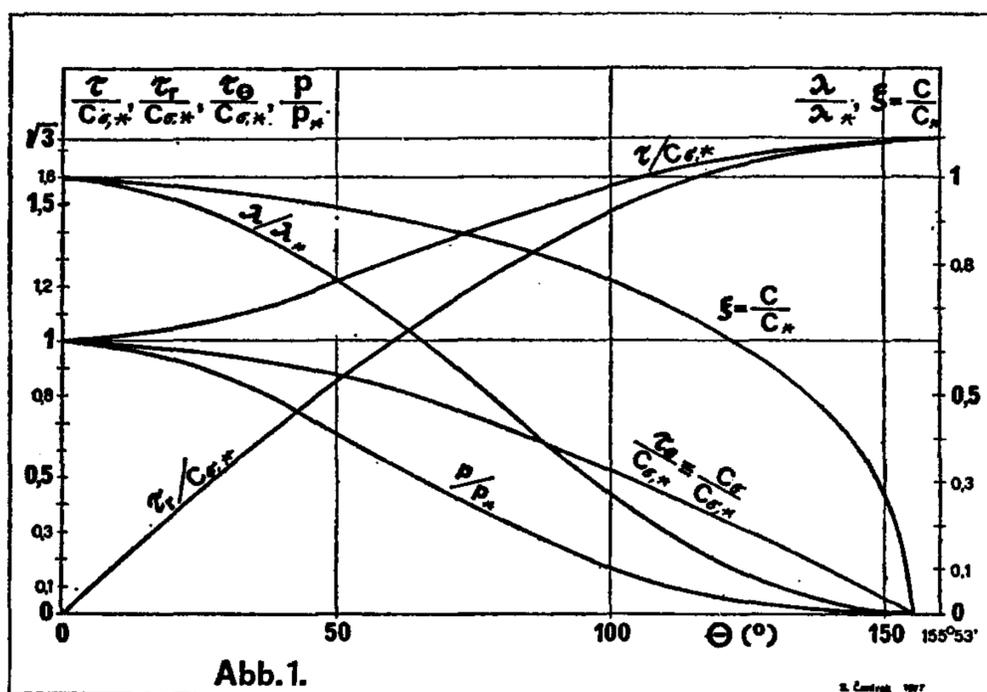


Abb. 1. Die wirbelfreie, magnetogasdynamische PRANDTL MEYERsche Strömung für $m_* \gg 1$.

Mit Hilfe (21) erhält man schließlich aus (29)

$$(30) \quad \rho = \rho_* \chi_* \cos^2 \theta_\sigma / \chi \quad \text{und} \quad v = C_{\sigma,*} [\chi (3 - 2 \cos^2 \theta_\sigma) / \chi_*]^{1/2},$$

wobei ρ die Dichte und v die Geschwindigkeit der analogen Prandtl-Meyerschen MGD-Potentialströmung sind. Die Wirbelstärke wird dabei mit dem Ausdruck

$$(31) \quad 2 \omega = \sqrt{6} K_* \left(1 - \frac{2}{3} \cos^2 \theta_\sigma \right) \cos^2 \theta_\sigma \frac{d}{d\psi_1} \sqrt{\chi(\psi_1)}$$

bestimmt [10]. Da die Form der Funktion $\chi(\psi_1)$ völlig beliebig gewählt werden kann, wird $\chi(\psi_1)$ in eine Reihe nach Potenzen von ψ_1 hier entwickelt, so daß $\chi^{1/2} = \sum_{i=0}^j \alpha_i / \psi_1^i$ ist. Für $j=2$ diese Entwicklung mittels (29) lautet

$$(32) \quad \sqrt{\chi(\psi_1)} = \sum_{i=0}^{i=2} \alpha_i / (K_* r \cos^3 \theta_\sigma)^i,$$

wobei α_i die aus konkreten Strömungsbedingungen gefolgten Konstante sind. Aus (30) und (29) erhalten wir schließlich mittels (32) die folgenden Lösungen unseres Problems

$$(33) \quad \frac{v \sqrt{\chi_*}}{\alpha_0 \tau} = \sum_{i=0}^{i=2} (r_k \cos^3 \theta_\sigma)^{-i}, \quad \frac{\rho \alpha_0^2}{\chi_* \lambda} = \left(1 + \sum_{i=1}^{i=4} \frac{K_i}{r_k^i \cos^{3i} \theta_\sigma} \right)^{-1},$$

mit $r_k = \alpha_0 K_* r / \alpha_1$, $\alpha_2 = \alpha_1^2 / \alpha_0$ und $K_{1,2,3,4} = 2, 3, 2, 1$. In Abb. 2 sind diese Abhängigkeiten (33) für die verschiedenen Werte r_k aufgetragen. Dabei muß man nur beachten, daß die Kurven, welche die Verhältnisse $\rho \alpha_0^2 / \chi_* \lambda$

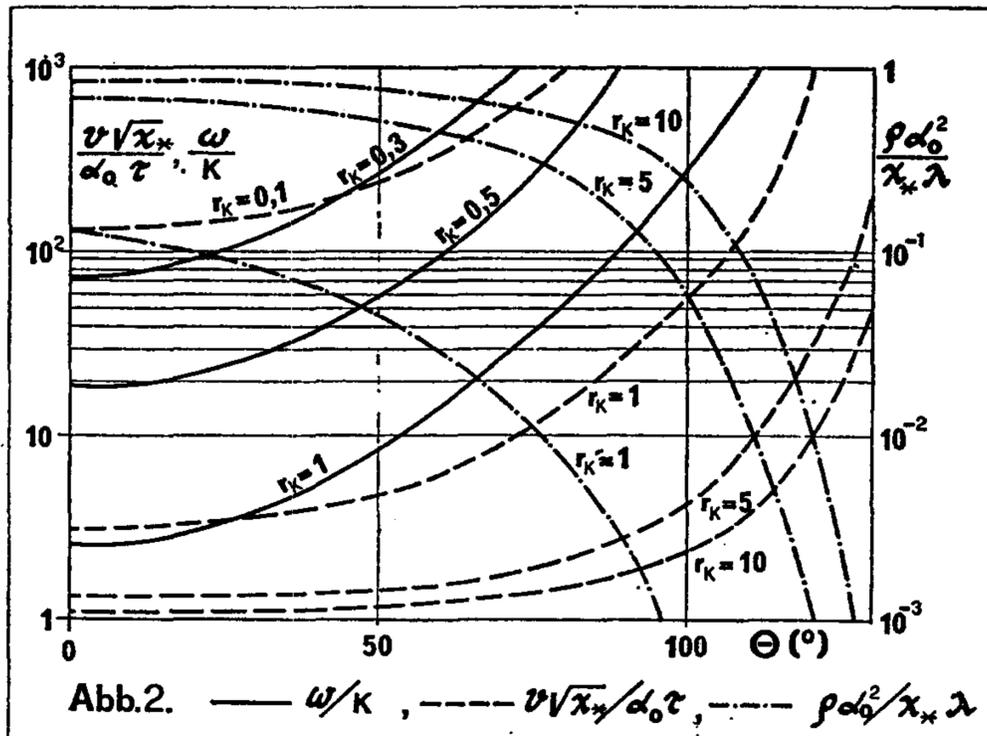


Abb. 2. Magnetogasdynamische, wirbelbehaftete PRANDTL-MEYERsche Strömung

bedeuten, in Abb. 2 strichpunktiert eingetragen sind, während die Strichlinien das Verhältnis $v\sqrt{\chi_*}/\alpha_0\tau$ darstellen. Nach Einsetzen (32) in (31) und Umformung erhält man

$$(34) \quad \frac{1}{K} \omega = \sqrt{6} \left(1 - \frac{2}{3} \cos^2 \theta_\sigma \right) \frac{r_k \cos^3 \theta_\sigma + 2}{r_k^3 \cos^7 \theta_\sigma}$$

wo $K = -\alpha_0^2 K_*/2\alpha_1$ ist. Den Verlauf von ω/K für die Werte $r_k = 0,3; 0,5; 1$ zeigt Abb. 2. Es ist deutlich zu erkennen, wie sich der Wirbel über das gesamte Strömungsgebiet ausbreitet.

Es sei hier nochmals betont, daß bei Anwendung der VORONJECschen Methode eine sehr große Freiheit in der Wahl der Funktion $\gamma(\varphi, \psi)$ bzw. $\chi(\psi)$ besteht. Daher wäre es möglich, die weiteren in vielen praktisch und theoretisch wichtigen Fällen erfüllten Voraussetzungen einzuführen.

L i t e r a t u r

- [1] Voronjес, K., *Sur quelques mouvements adiabatiques d'un gaz parfait*, Publ. Inst. Math. t. 10(24), p. 185—193, 1970, Beograd.
- [2] Shercliff, J.A., *A Textbook of Magnetohydrodynamics*, Oxford/New York, 1965, p. 247.
- [3] Smith, P., *The Steady Magnetodynamics Flow of Perfectly Conducting Fluids*, J. Math. Mech. Vol. 12, No. 4, 1963, p. 505—520.
- [4] Voronjес, K., *O nekim rešenjima problema iz adijabatskog strujanja neviskoznog gasa*, Gl. SANU, OTN, knj. 10, Beograd 1973.
- [5] Kotschin, N.J.; Kibel, I.A. und Rose, N.W., *Theoretische Hydromechanik*, Bd. II, Berlin 1955.
- [6] Седов, Л. И., *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*, Москва 1966 стр. 302—370.
- [7] Голицын, Г. С., *Плоские задачи магнитной гидродинамики*, ЖЭТФ, т. 34. Вып. 3. 1958, с. 688—693.
- [8] Шубин, А. П., *О поведении осесимметричного течения идеально проводящего газа вблизи края угла*, ЖТФ, т. 35, в. 3, 1965, с. 405—409.
- [9] Морозов, А. И., Соловьев, Л. С., *О симметричных магнитогидродинамических течениях*, ДАН СССР, 1963, т. 149, в. 3. с. 550—553.
- [10] Čantrak, S.M., *Adijabatsko strujanje neviskoznog savršeno-elektroprovodnog gasa*, Magistarski rad, Beograd 1977.
- [11] Саp, F., *Einführung in die Plasmaphysik*, Bd. I, II und III, Berlin/Oxford/Braunschweig 1975, 1972.
- [12] Čantrak, S.M., *Über einige Strömungsprobleme in leitenden und nichthomogenen Flüssigkeiten*, ZAMM 57, T 176—T 178 (1977).
- [13] Gundersen, R.M., *Nonisentropic Two-Dimensional MHD Flow*, AIAA J., Vol.4. No.8, Pages 1474—1475 (1966).