Зборник радова Математичкоі института, Нова серија, књ. 2 (10), 1977.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 2 (10), 1977.

Symposium: Set Theory. Foundations of Mathematics, Beograd, 29. 08. — 2. 09. 1977.

НЕСКОЛЬКО КОМБИНАТОРНЫХ ПРОБЛЕМ

Б. С. СТЕЧКИН

Здесь приводится несколько довольно общих задач, к которым я обращался в последнее время. По некоторым из них даются частные или прикидочные результаты. Большинство из этих проблем настолько широки, что безосновательно ожидать скорого и исчерпывающего их решения, однако и менее общие продвижения по этим задачам представили бы несомненный интерес. Вот перечень обсуждаемых здесь тематик:

I Критерий гамильтоновости.

II Закон факторизации.

III Реализуемость валентностей.

IV Структурные константы.

V Структурно-векторные покрытия.

Выражаю свою искреннюю признательность профессору Дж. К. Роте и доктору К. Баклавскому, которые во многом способствовали написанию этой работы.

I. Критерий гамильтоновости.

Согласно теореме Менгера, см. [I], граф d — связен тогда и только тогда, когда любая пара его вершин соединена по крайней мере d вершинно-непересекающимися путями. Будем говорить, что граф d-покрывающе-связен, если всякая пара его вершин соединена по крайней мере d вершинно-непересекающимися путями такими, что пути эти покрывают всех вершины графа, т.е. множество всех вершин всех этих путей есть все множество вершин графа. Граф будем именовањ четно-покрывающе-связным, если для всякой пары его вершин существует в этом графе система из четного числа вершинно-непересекающихся и покрывающих путей, соединяющих эти вершины.

ГИПОТЕЗА. *Граф гамильтонов тогда и только тогда, когда он четно-покрывающе связен.*

Необходимость очевидна, поскольку всякая пара вершин гамильтонового цикла соединима в точности двумя вершинно-непересекающимися и покрывающими путями. Критерий становится тавтологичным, если в графе имеется вершина, степень которой не превосходит трех.

Пусть G-плоский граф, который четно-покрывающе-связен, тогда либо найдется пара вершин соединимая двумя вершинно-непересекающимися и покрывающими путями, и значит G-гамильтонов, либо всякая пара его вершин соединима по крайней мере четырьмя вершинно-непересекающимися и покывающими путями, но последнее, в частности, влечет тот факт, что G является четырехсвязным графом, а согласно теореме Татта [2] плоский и четырехсвязный граф является гамильтоновым. Таким образом имеет место

ТЕОРЕМА. *Плоский граф гамильтонов тогда и только тогда, когда он четно-покрывающе-связен.*

Имеющиеся достаточные условия гамильтоновости, см. [I], редуцируют задачу к случаю наличия пары вершин соединимой не слишком большим четным числом вершинно-непересекающихся и покрывающих путей в неплоском графе. Наблюдается, наконец, и алгоритмическое „равновесие" этой гипотезы.

Выражаю благодарность доктору Ю. В. Матиясевичу, беседы с которым помогли более точно сформулировать эту гипотезу.

Литеретура.

[1] F., HARARY „*Graph Theory*", Addison-Wesley P. C. 1969; русский перевод: Харари Ф., „Теория графов". „Мир", Москва, 1973.

[2] W. T., TUTTE *A theorem on planar graphs*, Trans. of the Amer. Math. Soc., 82 (1956); N I, 99—116; русский перевод: Татт У. Т., Теорема о плоских графах. Киб. сборник (новая серия), 10, (1973), 66—86.

II. Закон факторизации.

Через $(P, \leqslant)$ будем обозначать локально конечное частично-упорядоченное P с отношением частичного порядка $\leqslant$ на нем, см. [1, 2]. Посредством F будем обозначать факторизацию, т. е. разбиение, множества P, так что фактормножество $F(P)=\{f_i\}$ есть множество непересекающихся классов эквивалентности $f_i \subseteq P$ объединение которых дает все P. Причем будем предполагать, что факторизация F каким-то образом „наследует" порядок $\leqslant$, т. е. порядок $\leqslant$ на P посредством факторизации индуцирует некоторый новый порядок $\lessdot$ на фактормножестве $F(P)$, например, по правилу:

$$f_1 \lessdot f_2 \Leftrightarrow \exists p_i \in f_i (i=1, 2): p_1 \leqslant p_2.$$

Итак, пусть имеется множество $(P, \leqslant)$ и его фактормножество $(F, \lessdot) = (F(P, \leqslant), \lessdot)$.

(α) *Когда множество $(F, \lessdot)$ является частично-упорядоченным?*

(β) *Как связаны между собой Мебиус-функции μ_P и μ_P?*

К сожалению в рамках ротовских алгебр инциденций $AI(P)$ и $AI(F)$ ответ на основной вопрос (β) сильно зависит от ответа на первый вопрос. Оказалось возможным преодолеть это неудобство, см. [2]; был построен класс алгебр инциденций $AIK(P)$ с ядром K, которые определены и для „плохих" порядков, например, при отсуствии транзитивности. Стало быть резонно говорить и о наличии чисто технической, формальной связи между μ_P и μ_F.

Сейчас знание закона факторизации ограничено случаем существования между $(P\leqslant)$ и $(F, \lessdot)$ сильно алгебраических связей типа связи Галуа, см. [3].

Вот конкретная задача на эту тему: Пусть $(B(S_n), \subseteq)$ — беллиан, т.е. частично упорядоченное множество всех неупорядоченных разбиений множества $S_n=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ упорядоченное по склейке блоков. Пусть F-факторизация беллиана по размерам блоков, тогда $(F(B(S_n), \subseteq), \lessdot)=(F, \lessdot)=(P_{(n)}, \leqslant)$— есть частично упорядоченное множество партиций, т. е. неупорядоченный разбиений числа n на натуральные слагаемые. Мебиус-функция партиций неизвестна.

Литература

[1] ROTA G. — C., *On the foundations of combinatorial theory, 1, Theory of Möbius functions*, Z. Wahrsheinlichkeitstheorie, 2, (1964), 340—368.

[2] СТЕЧКИН Б. С., *Бинарные функции на упорядоченных множествах (теоремы обращения)*, Труды МИАН, 143, (1977), 178—186.

[3] BACLAWSKI K., *Galois connections and the Leray Spectral Sequence*, Adv. in math., 25, (1977), №3, 191—215; see also his Ph. D. Thesis, Harvard, 1976.

III. Реализуемость валентностей.

При решении экстремальных задач о гиперграфах выявляются весьма важные численные характеристики гиперграфов — их валентности, см. [1]. Пусть $S_n=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — неупорядоченное n-элементное множество (вершин), и пусть $C^k(S_n)=\{S\subseteq S_n: |S|=k\}$ — множество всех k-подмножеств S_n, или иначе — полный k-граф; положим

$$\mathcal{P}(S_n)=\sum_{k=0}^{n} C^k(S_n).$$

Рассматриваются гиперграфы $G=\{e_i\}\subseteq\mathcal{P}(S_n)$ и k-графы $G^k\subseteq C^k(S_n)$. Валентность $\nu(S, q; G)$ от системы вершин $S\subseteq S_n$, числа $q\in\mathbf{N}+\{0\}$ и гиперграфа $G\subseteq\mathcal{P}(S_n)$ определяется как число

$$\nu(S, q; G)=|\{e\in G: |e\cap S|=q\}|. \tag{1}$$

Ясно, что при $|S|=q=1$ это есть обычная степень. Если есть два гиперграфа G, $F\subseteq\mathcal{P}(S_n)$, то

$$\sum_{S\in F}\nu(S, q; G)=\sum_{e\in G}\nu(e, q; F), \tag{2}$$

и в частности

$$\sum_{S_p\subseteq S_n}\nu(S_p, q; G)=\sum_j\binom{j}{q}\binom{n-j}{p-q}\nu(S_n, j; G). \tag{3}$$

Кроме того

$$\nu(S_{p,q}; G)=\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\binom{q+i}{q}\sum_{S_{q+i}\subseteq S_p}\nu(S_{q+i}, q+i; G). \tag{4}$$

Естественен вопрос о реализуемости числовых последовательностей валентностями некоторого гиперграфа.

(α) *Каким условиям должна удовлетворять числовая последовательность* $\{v_i\}\ 1\leqslant i\leqslant\binom{n}{p}$ *для того чтобы существовал гиперграф* $G\in\mathcal{L}$ *(из некоторого априорного класса гиперграфов* $\mathcal{L}$*) такой, что*

$$\{v_i\}_{1\leqslant i\leqslant\binom{n}{p}}=\{v(S_p,\,q;\,G)\}_{S_p\subseteq S_n}\ ?$$

Эрдеш и Галлаи, см. [1] в п. 1, решили эту задачу для обычных степеней $p=q=1$ и обычных графов. Здесь мы „естественным" образом выведем их ограничения на $\{v_i\}$. Из (4) при $G=G^2\subseteq C^2(S_n)$ и $q=1$ находим

$$v(S_p,\,1;\,G^2)=\sum_{S_1\subseteq S_p}v(S_1,1;G^2)-2\sum_{S_2\subseteq S_p}v(S_2,\,2;\,G),$$

или

$$\sum_{S_1\subseteq S_p}v(S_1,\,1;\,G^2)=v(S_p,\,1;\,G^2)+2\sum_{S_2\subseteq S_p}v(S_2,\,2;\,G^2)=$$

$$=v(S_p,\,1;\,G^2)+2\,v(S_p,\,2;\,G^2)=v(S_n-S_p,\,1;\,G^2)+2\,v(S_p,\,2;\,G^2)\leqslant$$

$$\leqslant v(S_n-S_p,\,1;\,G^2)+p\,(p-1)\leqslant p\,(p-1)+\sum_{S_1\subseteq S_n-S_p}v(S_1,\,1;\,G^2)\wedge p,$$

(здесь и везде далее $a\wedge p=\min\{a,\,p\}$), что и дает известное неравенство Эрдеша — Галлаи

$$\sum_{i-1}^{p}v_i\leqslant p\,(p-1)+\sum_{i=p+1}^{n}v_i\wedge p.$$

Условие четности суммы Σv_i следует из (3). Однако задача не решена даже для обычных степеней в гиперграфском случае. Девдней [2] имеет для этого случая рекурсивные ограничения на $\{v_i\}$. Поэтому можно поинтересоваться и более частным вопросом: действительно ли вся информация о связях между валентностями заключена в (3) и (4)? Здесь мы обратим внимание лишь на один простой факт.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\{v_i\}\ 1\leqslant i\leqslant\binom{n}{p}$ *— последовательность целых неотрицательных чисел. Для того чтобы последовательность* $\{v_i\}$ *реализовывалась валентностями* $\{v_i(S_p,\,1;\,G^1)\}$ *некоторого 1-графа* $G^1\subseteq C^1(S_n)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{\binom{n}{p}}v_i\equiv 0\left(\mathrm{mod}\binom{n-1}{p-1}\right),\tag{5}$$

$$\{v_i\}_{1\leqslant i\leqslant\binom{n}{p}}=\sum_i C(i)\binom{m}{i}\binom{n-m}{p-i}\tag{6}$$

где $\quad m=\sum_{i=1}^{\binom{n}{p}}v_i\Big/\binom{n-1}{p-1}.$

Формула (6) означает, что число o должно впоследовательности $\{v_i\}$ наличествовать ровно $\binom{m}{0}\binom{n-m}{p}$ раз, число 1-ровно $\binom{m}{1}\binom{n-m}{p-1}$ раз и т. д., подробнее обозначения см. [1]. Примечатеьно, что в этом случае существует и конструктивный критерий, именно (6) можно заменить на условие

$$\{v_i\} = \{ | S_m \cap S_p | \}_{S_p \subseteq S_n,\ (S_m \subseteq S_n)}, \tag{7}$$

поскольку правые части (6) и (7) в точности совпадают. В частности из (7) и немедленно следует достаточность теоремы.

Литература

[1] СТЕЧКИН Б. С., *Обобщенные валентности*, Матем. Заметки, 17, (1975), № 3, 433—442; английский перевод: Stechkin B. S., Generalized valences, Math. Notes, 17 (1975), N 3—4, 252—258.

[2] DEWDNEY A. K., *Degree sequences in complexes and hypergraphs* Proc. of the Amer. Math. Soc., 53, (1975), № 2, 535—540.

IV. Структурные константы.

В последний период своей жизни Паль Туран большое внимание уделял комбинаторно-геометрическим вопросам, вопросам качественного использования экстремальных комбинаторных задач, [1—6]. В частности, это привело к одной чисто геометрической задаче, которую мы здесь попытаемся изложить с наибольшей полнотой.

Пусть X — линейное нормированное пространство, через $\sigma_k = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ будем обозначать совокупности из k точек этого пространства, причем для простоты примем, что $\|\alpha_i\| = 1$, $i = 1, \dots, k$, хотя это ограничение в большинстве случаев можно заменить и более слабым. Пусть $k \geqslant l \geqslant 1$ — целые числа, положим

$$\delta(l, k; X) = \min_{\sigma_k \subseteq X} \max_{\sigma_l \subseteq \sigma_k} \|\sum_{\alpha \in \sigma_l} \alpha\|,$$

константы эти будем называть структурными геометрическими константами. Задача заключается в их вычислении для данного пространства, или же класса пространств данного типа;

$$\underline{\delta}(l, k) = \inf_X \delta(l, k; X), \quad \overline{\delta}(l, k) = \sup_X \delta(l, k: X),$$

где inf и sup берется по всем пространствам данного типа.

Принято обосабливать тот специальный случай, когда $l = 2$, это связано с тем, что в этом случае максимизация длинной диагонали параллелограмма эквивалентна минимизации его короткой диагонали, точнее, пусть

$$d(2, k; X) = \max_{\sigma_k \subseteq X} \min_{\alpha_1, \alpha_2 \in \sigma_k} \|\alpha_1 - \alpha_2\|,$$

так называемые упаковочные константы. Тогда если в X выполняется правило параллелограмма, то

$$\delta^2(2, k; X) + d^2(2, k; X) = 4.$$

Так что задачи вычисления структурных и упаковочных констант в этом случае эквивалентны до тех пор, пока действует правило параллелограмма, при его нарушении задачи „расслаиваются“.

Структурные константы можно понимать и как локальную характеристику заполнения всего пространства единичными шарами.

Имеется очень глубокая связь структурных констант с числами Турана. Пусть $n \geqslant k \geqslant l \geqslant 1$ — целые числа, пусть $T(n, k, l)$ обозначает то наименьшее m, для которого существует m-членное семейство $F=\{S_l^{(i)}\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ из l-подмножеств $S_l \subseteq S_n$ (множества $S_n=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ из n элементов) такое, что

$$\forall S_k \subseteq S_n \exists S_l \subseteq S_k : \{S_l\} \in F.$$

Вычисление $T(n, k, l)$ есть комбинаторная проблема Турана, см. [7]. Оказывается имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть $n \geqslant k \geqslant l \geqslant 1$, а X — линейное нормированное пространство, тогда для всякого $\sigma_n \subseteq X$ найдется по крайней мере $T(n, k, l)$ подмножества $\sigma_l \subseteq \sigma_n$ таких, что*

$$\Big\| \sum_{\alpha \in \sigma_l} \alpha \Big\| \geqslant \delta(l, k; X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На множество точек σ_n как на вершинах построим l-граф $G^l \subseteq C^l(\sigma_n)$ по правилу: l точек $\sigma_l \subseteq \sigma_n$ считаем за одно l-ребро тогда и только тогда, когда $\| \sum_{\alpha \in \sigma_l} \alpha \| \geqslant \delta(l, k: X)$. Рассмотрим построенный таким образом l-граф G^l, он содержит по крайней мере $T(n, k, l)$ ребер, поскольку в противном случае, согласно определению $T(n, k, l)$

$$\exists \sigma_k^* \subseteq \sigma_n : \forall \sigma_l \subseteq \sigma_k^* \Big\| \sum_{\alpha \in \sigma_l} \alpha \Big\| < \delta(l, k; X),$$

или, что одно и тоже,

$$\exists \sigma_k^* \subseteq \sigma_n : \max_{\sigma_l \subseteq \sigma_k^*} \Big\| \sum_{\alpha \in \sigma_l} \alpha \Big\| < \delta(l, k; X),$$

но тогда

$$\min_{\sigma_k \subseteq X} \max_{\sigma_l \subseteq \sigma_k} \Big\| \sum_{\alpha \in \sigma_l} \alpha \Big\| \leqslant \max_{\sigma_l \subseteq \sigma_k^*} \Big\| \sum_{\alpha \in \sigma_l} \alpha \Big\| < \delta(l, k; X),$$

стало быть

$$\min_{\sigma_k \subseteq X} \max_{\sigma_l \subseteq \sigma_k} \Big\| \sum_{\alpha \in \sigma_l} \alpha \Big\| < \delta(l, k; X),$$

но это противоречит определению $\delta(l, k; X)$. ч. т. д.

Некоторые частные случаи этой теоремы были известны и раньше. Но именно данная общность позволила перенести приложения в банахово пространство. Приведем один результат который принадлежит В. Арестову и В. Бердышеву, (приводится с согласия авторов).

ТЕОРЕМА. *Пусть B банахово пространство, тогда* $\underline{\delta}(2, 3) = \inf_B \delta(2, 3; B) = 2/3$, *где* inf *берется по всем банаховым пространствам.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сперва, что для всякого банахова пространства $\delta(2, 3; B) \geqslant 2/3$; положим $h = \max_{\sigma_2 \subseteq \sigma_3} \|\sum_{\alpha \in \sigma_2} \alpha\|$, и пусть $\sigma_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Тогда если $\alpha_1 + \alpha_2 = z_1$, $\alpha_1 + \alpha_3 = z_2$, $\alpha_2 + \alpha_3 = z_3$, то $\|z_i\| \leqslant h$ в силу определения h, но тогда $\alpha_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - z_3)$, значит

$$1 = \|\alpha_1\| \leqslant \frac{1}{2}(\|z_1\| + \|z_2\| + \|z_3\|) \leqslant \frac{3}{2}h,$$

следовательно

$$\forall \sigma_3 \subseteq B \max_{\sigma_2 \subseteq \sigma_3} \|\sum_{\alpha \in \sigma_2} \alpha\| = h \geqslant 2/3,$$

значит $\delta(2, 3; B) \geqslant 2/3$.

Докажем теперь обратное неравенство, расмотрим для этого трехмерное пространство l_1 и три вектора из него

$$\alpha_1 = \{1/3,\ 1/3,\ 1/3\},\ \alpha_2 = \{-1/3,\ -1/3,\ 1/3\},\ \alpha_3 = \{1/3,\ -1/3,\ -1/3\},$$

поскольку $\|x + y\|_{l_1} = \sum_i |x_i + y_i|$, то легко видеть что в данном случае $\|\alpha_1 + \alpha_2\| = \|\alpha_2 + \alpha_3\| = \|\alpha_2 + \alpha_3\| = 2/3$. и т. д.

Аналогичный результат для случая гильбертова пространства был получен Д. Катоной [3], который показал, что $\delta(2; 3; H) = 1$. Это в частности позволяет сравнить вероятностные приложения последних двух теорем в случае гильбертова

$$\mathcal{P}\{\|\xi + \eta\| \geqslant x\} \geqslant 1/2\,\mathcal{P}\{\|\xi\| \geqslant x\}^2$$

и банахова

$$\mathcal{P}\left\{\|\xi + \eta\| \geqslant \frac{2}{3}x\right\} \geqslant \frac{1}{2}\mathcal{P}\{\|\xi\| \geqslant x\}^2$$

пространств; здесь ξ и η — независимые и одинаково распределенные в X случайные векторы.

Литература

[1[TURÁN P.. *Grafok, gnometria és generalizált potenciálok*, Elöadás a Bolyai János Mat. Társulat rendezésében, 1968, nov 22-én.

[2] TURÁN P., *On some applications of graph theory to analysis*, Proc. of the Int. Conf. on Constr. Function Theory. Varna, May 19—25, 1970, Sofia, 1972, 351—358.

[3] KATONA CY., *Grafok, vektorok és valószinüségszámitási egyenlötlenségek*, Mat. Lapok, 20, (1969), N 1—2, 123—127.

[4] SÓS V. T., *On extremal problems in graph theory, in „Combinatorial structures and their appl.“*, Proc. Calgary Inter. Conf, Calgary, Alta, 1969, Gardon and Breach, New--York, 1970, 407—410.

[5] ERDŐS P., *On some applications of graph-theory I, II, III, Meir*, I — Discrete Math., 2, (1972), N 3, 207—228; Sós V. T., II — „Stud. in pure Math“. A. P. London, 1971, 89—99; Turán P., III — Can. Math. Bull. 15, (1972), N I, 27—32.

[6] КАТОНА Д., *Неравенства для распределения длины суммы случайных векторов*. Теор. вер. и её прим. 22 (1977), № 3, 466—481.

[7] ERDŐS P., SPENCER J., *„Probalistic methods in combinatories“* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974; русский перевод: Эрдёш П., Спенсер Дж., „Вероятностые методы в комбинаторике“, „Мир“, Москва, 1976.

V. Структурно-векторные покрытия.

Пусть $\mathcal{A}=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ — некоторое (конечное) множество, а $\leqslant$ — бинарное отношение на нем. Пусть V_t — обозначает множество всех t — мерных векторов $\bar{v}=(v_1, v_2, \ldots, v_t)$ таких, что $v_i \in \mathcal{A}$, $i=1, 2, \ldots t$. Введем на этом множестве векторов V_t бинарное отношение $\leqslant$ по правилу

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in V_t \quad \bar{u} \leqslant \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u}_i \leqslant v_i \forall_i, \ 1 \leqslant i \leqslant t.$$

Рассматривается проблема покрытий, общая постановка которой такова:

Пусть $Q, P \subseteq V_t$, каково то наименьшее $Q' \subseteq Q$, для которого

$$\forall \bar{p} \in P \exists \bar{q} \in Q' : \bar{q} \leqslant \bar{p}.$$

Принято, однако, её формулировать для некоторых специальных подмножеств множества V_t, именно, если на V_t ввести некоторое отношение эквивалентности, порождающее разбиение V_t на непересекающиеся классы эквивалентности $V_t^{(l)}$, так что $\sum\limits_l V_t^{(l)} \equiv V_t$, то в качестве Q и P обычно рассматривают $V_t^{(l)}$ и $V_t^{(k)}$ — какие-то из этих классов. В ряде случаев принадлежности вектора классу эквивалентности удается идентифицировать со значениями некоторой „весовой" функции. Рассмотрим несколько конкретных задач.

Пусть $(\mathcal{A}, \leqslant)=(\mathcal{P}(S_n), \subseteq)$ есть булеан (или n-мерный гиперкуб), так что любая компонента v_i это есть некоторое подмножество $v_i \subseteq S_n$ множества S_n из n элементов; запись $|v_i|$ обозначает число членов этого подмножества, так что $0 \leqslant |v_i| \leqslant n$. Рассмотрим несколько способов за дания отношения эквивалентности на множестве векторов V_t для этого случая

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in V_t \bar{u} \sim \bar{v} \Leftrightarrow (|\bar{u}_1|, |\mathcal{U}_2|, \ldots, |\mathcal{U}_t|)=(|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_t|), \qquad (\sim)$$

в этом случае всякий класс эквивалентности однозначно определяется „весовым" вектором $\bar{r}=(r_1, r_2, \ldots r_t)$ где $0 \leqslant r_i \leqslant n$, $i=1, 2, \ldots, t$. Пусть $\bar{k}$ и $\bar{l}$ — два таких вектора, причем $k_i \geqslant l_i$, $i=1, 2, \ldots, t$, вопрос заключается в нахождении наименьшего покрытия класса $V_t^{(\bar{k})}$ классом $V_t^{(\bar{l})}$, в этом случае очевидна следующая

ТЕОРЕМА. *Число векторов из $V_t^{(\bar{l})}$ в наименьшем покрытии класса $V_t^{(\bar{k})}$ классом $V_t^{(\bar{l})}$ равно*

$$\prod_{i=1}^{t} T(n, k_i, l_i),$$

где T число Турана.

Пусть G_t-обозначает некоторую группу t-подстановок, положим тогда

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in V_t \bar{u} \approx \bar{v} \Leftrightarrow \exists \sigma \in G_t : \sigma(|\bar{u}_1|, \ldots, |\mathcal{U}_t|)=(|v_1|, \ldots, |v_t|), \qquad (\approx)$$

так что эквивалентность $(\sim)$ отвечает тому случаю, когда G_t состоит только из тождественной подстановки. Если G_t-симметрическая группа всех t-подстановок, то „весовой" функцией служат неупорядоченные системы состоящие из t чисел.

И в этом часном случае задача не решена.

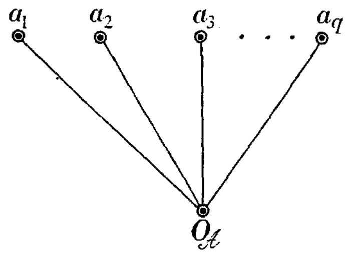
Пусть теперь отношение эквивалентости задается по правилу:

$$\forall \bar{u},\ \bar{v} \in V_t \bar{u} \approxeq \bar{v} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{t} |\bar{u}_i| = \sum_{i=1}^{t} |v_i| \qquad (\approxeq)$$

Здесь всякий класс характеризуется одним „весовым“ числом; естественно распространить этот случай на равенство каких-то функционалов определенных на V_t.

Примером иного $(\mathcal{A}, \preccurlyeq)$ может служить линейно-упорядоченное множество, в этом случае всякий вектор $\bar{v} \in V_t$ можно интерпретировать как некоторое мультимножество, в котором i-ый элемент повторен v_i раз. Невелик прогресс и в этом случае, см [1].

Наконец, геометрические интерпретации приводят к исследованию случая когда $(\mathcal{A}, \preccurlyeq)$ имеет вид



Приведенные выше примеры задаваемых на V_t отношений эквивалентности имеют смысл и для всякого $(\mathcal{A}, \preccurlyeq)$ в случае когда $\preccurlyeq$ частичный порядок, поскольку всякое частично упорядоченное множество вложимо в некоторый гиперкуб.

Имеется несколько конкретных реализаций этой проблемы, так если $t=1$, то имеем проблему покрытий в упрядоченном множестве $(\mathcal{A}, \preccurlyeq)$, если при этом $(\mathcal{A}, \preccurlyeq) = (\mathcal{P}(S_n), \subseteq)$, а экивалентность задается любым из приведенных выше способов, то получаем проблему Турана; если же $(\mathcal{A}, \preccurlyeq) = (\mathcal{P}(S_1), \subseteq)$ $t=n$, то для случая $(\approx)$ где G_t-симметрическая группа или для случая $(\approxeq)$ опять-таки получаем проблему Турана. Здесь я выражаю свою благодарность Н. Н. Кузюрину ознакомившему меня с некоторыми специальными случаями этой проблематики.

Литература

[1] CAMERON P. J., van-LINT J. H., „*Graph theory coding theory, and block designs*“ London Math. Soc., Lecture Notes, 19, C. U. P., 1975.

Мат. инст. им. Стеклова
Вавилова 42., Москва,
117333, СССР.